力学

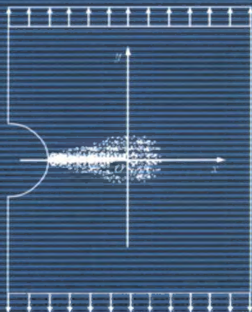
国防科工委『十五』规划专著



断裂与损伤力学

张　行　主编

崔德渝　孟庆春　王奇志
赵　军　胡卫平　杨继运　编

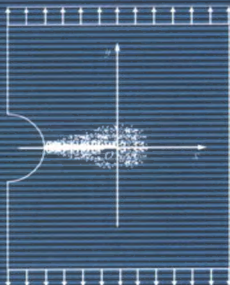


北京航空航天大学出版社

北京理工大学出版社　　西北工业大学出版社

哈尔滨工业大学出版社　　哈尔滨工程大学出版社

国防科工委『十五』规划专著



责任编辑：刘晓明
书籍装帧：彩多设计



ISBN 7-81077-631-2
定价：52.00元



国防科工委“十五”规划专著．力学

断裂与损伤力学

张　行　主编

崔德渝　孟庆春　王奇志
赵　军　胡卫平　杨继运　编

北京航空航天大学出版社

北京理工大学出版社　西北工业大学出版社
哈尔滨工业大学出版社　哈尔滨工程大学出版社

内容简介

《断裂与损伤力学》是反映作者科研成果的学术专著。其内容包括：二维驻止裂纹断裂力学解析变分解法；三维驻止裂纹断裂力学能量差率闭合解法；扩展裂纹断裂力学问题的损伤力学分析；材料抗断裂性能中尺寸效应的理论分析；复合材料层合结构分层问题的断裂力学分析。此外，为了方便读者，本书还扼要介绍了断裂力学与损伤力学的基本原理。以上关于断裂力学方面的创新成果曾获国家级科技进步三等奖与部委级科技进步一、二等奖。

本专著适用于从事飞行器及地面设备结构损伤容限与耐久性设计的工程技术人员、科研人员以及固体力学、航空航天与机械等专业的研究生。

图书在版编目(CIP)数据

断裂与损伤力学/张行主编. —北京：北京航空航天大学出版社，2006.4
ISBN 7-81077-631-2

Ⅰ.断… Ⅱ.张… Ⅲ.①断裂力学②损伤力学
Ⅳ.O346

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 124987 号

断裂与损伤力学

张 行 主编
崔德渝 孟庆春 王奇志
赵 军 胡卫平 杨继运 编
责任编辑 刘晓明

*
北京航空航天大学出版社出版发行
北京市海淀区学院路 37 号(100083) 发行部电话：010—82317024
http://www.buaapress.com.cn
E-mail:bhpress@263.net
北京市松源印刷有限公司印装 各地书店经销

开本：850×1168 1/32 印张：21.375 字数：575 千字
2006 年 4 月第 1 版 2006 年 4 月第 1 次印刷 印数：2 000 册
ISBN 7-81077-631-2 定价：52.00 元



总　　序

国防科技工业是国家战略性产业，是国防现代化的重要工业和技术基础，也是国民经济发展和科学技术现代化的重要推动力量。半个多世纪以来，在党中央、国务院的正确领导和亲切关怀下，国防科技工业广大干部职工在知识的传承、科技的攀登与时代的洗礼中，取得了举世瞩目的辉煌成就；研制、生产了大量武器装备，满足了我军由单一陆军，发展成为包括空军、海军、第二炮兵和其他技术兵种在内的合成军队的需要，特别是在尖端技术方面，成功地掌握了原子弹、氢弹、洲际导弹、人造卫星和核潜艇技术，使我军拥有了一批克敌制胜的高技术武器装备，使我国成为世界上少数几个独立掌握核技术和外层空间技术的国家之一。国防科技工业沿着独立自主、自力更生的发展道路，建立了专业门类基本齐全，科研、试验、生产手段基本配套的国防科技工业体系，奠定了进行国防现代化建设最重要的物质基础；掌握了大量新技术、新工艺，研制了许多新设备、新材料，以“两弹一星”、“神舟”号载人航天为代表的国防尖端技术，大大提高了国家的科技水平和竞争力，使中国在世界高科技领域占有了



一席之地。十一届三中全会以来,伴随着改革开放的伟大实践,国防科技工业适时地实行战略转移,大量军工技术转向民用,为发展国民经济作出了重要贡献。

国防科技工业是知识密集型产业,国防科技工业发展中的一切问题归根到底都是人才问题。50多年来,国防科技工业培养和造就了一支以“两弹一星”元勋为代表的优秀的科技人才队伍,他们具有强烈的爱国主义思想和艰苦奋斗、无私奉献的精神,勇挑重担,敢于攻关,为攀登国防科技高峰进行了创造性劳动,成为推动我国科技进步的重要力量。面向新世纪的机遇与挑战,高等院校在培养国防科技人才,传播国防科技新知识、新思想,攻克国防基础科研和高技术研究难题当中,具有不可替代的作用。国防科工委高度重视,积极探索,锐意改革,大力推进国防科技教育,特别是高等教育事业的发展。

高等院校国防特色专业教材及专著是国防科技人才培养当中重要的知识载体和教学工具,但受种种客观因素的影响,现有的教材与专著整体上已落后于当今国防科技的发展水平,不适应国防现代化的形势要求,对国防科技高层次人才的培养造成了相当不利的影响。为尽快改变这种状况,建立起质量上乘、品种齐全、特点突出、适应当代国防科技发展的国防特色专业教材体系,国防科工委全额资助编写、出版200种国防



特色专业重点教材和专著。为保证教材及专著的质量，在广泛动员全国相关专业领域的专家、学者竞投编著工作的基础上，以陈懋章、王泽山、陈一坚院士为代表的100多位专家、学者，对经各单位精选的近550种教材和专著进行了严格的评审，评选出近200种教材和学术专著，覆盖航空宇航科学与技术、控制科学与工程、仪器科学与技术、信息与通信技术、电子科学与技术、力学、材料科学与工程、机械工程、电气工程、兵器科学与技术、船舶与海洋工程、动力机械及工程热物理、光学工程、化学工程与技术、核科学与技术等学科领域。一批长期从事国防特色学科教学和科研工作的两院院士、资深专家和一线教师成为编著者，他们分别来自清华大学、北京航空航天大学、北京理工大学、华北工学院、沈阳航空工业学院、哈尔滨工业大学、哈尔滨工程大学、上海交通大学、南京航空航天大学、南京理工大学、苏州大学、华东船舶工业学院、东华理工学院、电子科技大学、西南交通大学、西北工业大学、西安交通大学等，具有较为广泛的代表性。在全面振兴国防科技工业的伟大事业中，国防特色专业重点教材和专著的出版，将为国防科技创新人才的培养起到积极的促进作用。

党的十六大提出，进入21世纪，我国进入了全面建设小康社会、加快推进社会主义现代化的新的发展

阶段。全面建设小康社会的宏伟目标，对国防科技工业发展提出了新的更高的要求。推动经济与社会发展，提升国防实力，需要造就宏大的人才队伍，而教育是奠基的柱石。全面振兴国防科技工业必须始终把发展作为第一要务，落实科教兴国和人才强国战略，推动国防科技工业走新型工业化道路，加快国防科技工业科技创新步伐。国防科技工业为有志青年展示才华，实现志向，提供了缤纷的舞台，希望广大青年学子刻苦学习科学文化知识，树立正确的世界观、人生观、价值观，努力担当起振兴国防科技工业、振兴中华的历史重任，创造出无愧于祖国和人民的业绩。祖国的未来无限美好，国防科技工业的明天将再创辉煌。

张华祝



前　言

作者编写《断裂与损伤力学》一书的宗旨是希望它能成为一部可以作为固体力学与结构设计专业研究生教学参考的学术专著。

断裂力学可分为：驻止裂纹断裂力学与扩展裂纹断裂力学(这是分类方法之一)。

驻止裂纹断裂力学的研究已处于高级阶段。问题的关键在于创立出计算效率高、适用范围广的分析方法。然而扩展裂纹断裂力学的研究尚处于初级阶段，属于破坏过程的研究领域。这是固体力学中的一大难题(可与流体力学中的湍流问题相提并论)。

本书作者认为，引入损伤力学是研究扩展裂纹断裂力学问题的一种有效途径。这也就是我们编写这部学术专著的原因。

本书共有18章，除前3章外，后15章均为本书主编及其合作者的研究成果。其内容可以大致分为以下5类：

① 二维驻止裂纹断裂力学的解析变分解法；

② 三维驻止裂纹断裂力学的能量差率闭合解法；

③ 扩展裂纹断裂力学的损伤力学研究；

④ 材料抗断裂性能的固体力学研究；

⑤ 复合材料层合结构分层力学研究。

由于以上研究成果比较系统、全面，因此这部专著可以作为固体力学、结构设计与机械设计等有关专业研究



生的参考书。

驻止裂纹断裂力学的研究方法大体上可以分为：解析解法、数值解法、解析–数值解法与工程闭合解法。

众所周知，解析解法的优点是计算结果准、计算效率高，其缺点是适用范围窄；而数值解法的优点是适用范围宽、计算精度高，其缺点是计算效率低。

本书作者在研究二维驻止裂纹断裂力学中，提出了一种解析数值解法，也可称为解析变分解法。这种解法兼有解析解法与数值解法的优点，即计算精度高，计算效率高，而且适用范围宽。

本书作者在研究三维驻止裂纹断裂力学中提出了一种工程闭合解法，这就是能量差率闭合解法。这种解法的优点是可充分利用二维成果求解三维问题。它的计算效率相当高，计算精度在多数情况下满足工程需求，同时其适用范围随二维成果的丰富而不断扩大。

扩展裂纹断裂力学的研究虽然已经取得了显著成果，但尚远不及驻止裂纹的情况。目前，在工程上还是依靠实验手段与经验公式的方法解决实际问题。

本书作者在损伤力学基本理论研究中还提出了一种描述各向异性损伤的结构力学模型，并由此建立了计及各向异性损伤耦合效应的本构关系以及损伤演化方程，形成了损伤力学新的理论体系。

本书作者在扩展裂纹的损伤力学研究中，进行了裂纹尖端场耦合渐近分析，并得到了重复加载与单调加载下裂纹扩展速率的解析表达式，使裂纹扩展速率的研究由经验公式的水平上升到理论分析的高度。



在材料抗断裂性能的研究中，首次建立了考虑断裂韧度与裂纹扩展阻力曲线厚度效应的力学模型，并通过实验研究与理论分析分别提出了含裂纹板当量平面应变区相对厚度的经验公式与理论公式，大量地节省了实验费用与工作量。在这一研究中，还提出了疲劳裂纹萌生寿命与扩展寿命预估的损伤力学——有限单元附加载荷数值解法，将疲劳裂纹萌生与扩展寿命的预报统一在损伤力学理论框架之内。

在复合材料层合结构分层力学的研究中，作者发展了在金属材料断裂力学研究中所提出的解析变分方法与能量差率闭合解法，分别用于求解二维与三维分层问题的断裂力学参量，并给出了系统的计算结果。

本书主编张行负责全书内容的统筹安排，崔德渝承担部分章节的校验工作。本书第 1 章至第 4 章以及第 9 章由张行编写；第 5 章、第 6 章由崔德渝编写；第 7 章、第 8 章由王奇志编写；第 10 章至第 12 章由赵军编写；第 13 章至第 15 章由张行与杨继运编写；第 16 章至第 18 章由孟庆春与胡卫平编写。

本书主编与有关参编人员对吴建国与刘亮两位博士生在本书编写过程中所提供的帮助表示感谢。

作　者

2005 年 3 月

目　录























第1章　二维线弹性断裂力学分析的解析方法

各向同性二维线弹性断裂力学的分析是以相应弹性理论作基础的。为此，首先列出有关基本方程与边界条件，并应用复变函数方法，导出通解；然后，在此基础上，建立满足裂纹表面静力边界条件与位移单值条件的含内部裂纹二维问题的通解；最后，根据这一通解给出在无限大尺寸情况下内部裂纹问题的全场解析解与裂纹尖端近场解。

1.1　弹性理论平面问题力法支配方程

1.1.1　平衡方程、相容方程与本构关系

平面问题的平衡方程具有如下形式：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}+F_x=0\\&\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}+F_y=0\\&\sigma_{yx}=\sigma_{xy}\end{aligned}\right\}\tag{1-1}$$

式中，σ_{xx}与σ_{yy}为正应力分量；σ_{xy}与σ_{yx}为切应力分量；F_x与F_y则为体力分量。

在以上三个平衡方程中存在四个应力分量。从力法看，这是一个静不定问题，需要建立补充方程，这就是相容方程。



为此，首先建立变形几何方程。平面问题的几何方程具有如下形式：

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u_x}{\partial x},\qquad \varepsilon_{yy}=\frac{\partial u_y}{\partial y}\\&\varepsilon_{xy}=\varepsilon_{yx}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}\gamma_{xy}\end{aligned}\right\}\tag{1-2}$$

式中，u_x 与 u_y 为位移分量；ε_{xx} 与 ε_{yy} 为正应变分量；$\varepsilon_{xy}=\varepsilon_{yx}$ 为张量切应变分量，且等于工程切应变分量 $\gamma_{xy}=\gamma_{yx}$ 的 1/2。

由式(1-2)消去位移分量 u_x 与 u_y，则可得平面问题中三个应变分量的相容方程，即

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{xx}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_{yy}}{\partial x^2}=2\frac{\partial^2\varepsilon_{xy}}{\partial x\partial y}\tag{1-3}$$

为了得到上述补充方程，需将以应变分量表示的相容方程式(1-3)变成以应力分量表示的相容方程。因此，引入本构关系。

平面问题的线弹性本构关系具有如下形式：

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_{xx}=\frac{1}{E_1}(\sigma_{xx}-\nu_1\sigma_{yy})\\&\varepsilon_{yy}=\frac{1}{E_1}(\sigma_{yy}-\nu_1\sigma_{xx})\\&\varepsilon_{xy}=\frac{1+\nu_1}{E_1}\sigma_{xy}\end{aligned}\right\}\tag{1-4}$$

式中，E_1 与 ν_1 为材料弹性常量，并有

$$\left.\begin{aligned}&E_1=\frac{E}{1-\nu^2},\qquad \nu_1=\frac{\nu}{1-\nu}\quad(\text{平面应变})\\&E_1=E,\qquad \nu_1=\nu\qquad(\text{平面应力})\end{aligned}\right\}\tag{1-5}$$

这里，E 与 ν 分别为杨氏弹性模量与泊松比。

在无体力情况下，将式(1-4)代入式(1-3)，并利用平衡方程式(1-1)，可得平面问题中以应力分量表示的相容方程，即

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})=\nabla^2(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})=0\tag{1-6}$$

平面问题的静力边界条件具有以下形式：



$$\left.\begin{aligned}\sigma_{xx}l_x+\sigma_{xy}l_y&=T_x\\ \sigma_{yx}l_x+\sigma_{yy}l_y&=T_y\end{aligned}\right\} \tag{1-7}$$

式中，l_x 与 l_y 为边界外法线的方向余弦；T_x 与 T_y 为面力分量。

在断裂力学中，还需用到体元的刚性转动。在平面问题中，体元刚性转动 ω 与位移分量具有如下关系：

$$\omega=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tag{1-8}$$

1.1.2 应力函数与力法支配方程

为了简化弹性理论平面问题的求解，引入应力函数 A。在无体力的情况下，A 与应力分量具有如下关系：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{xx}&=\frac{\partial^2 A}{\partial y^2},\qquad \sigma_{yy}=\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\\ \sigma_{xy}&=-\frac{\partial^2 A}{\partial x\partial y}\end{aligned}\right\} \tag{1-9}$$

于是，平衡方程式(1-1)在无体力的情况下变为恒等式，而相容方程式(1-6)具有如下形式：

$$\nabla^2\nabla^2 A=0 \tag{1-10}$$

式(1-10)就是弹性理论平面问题的力法支配方程，它是应力函数 A 的双调和方程。

边界上外法线方向余弦可以写成

$$l_x=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s},\qquad l_y=-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} \tag{1-11}$$

式中，s 为沿边界的曲线坐标。由式(1-9)，可将静力边界条件式(1-7)用应力函数 A 表示为

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)=T_x,\qquad \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)=-T_y \tag{1-12}$$

由式(1-10)求得满足式(1-12)的应力函数 A 后，即可由式(1-9)通过微分求得应力分量，再由式(1-4)确定应变分量，然

后由式(1－2)通过积分导出位移分量表达式。现推导如下：

由式(1－2)的第一、二两式，可知

$$\left.\begin{aligned} u_x &= \int \varepsilon_{xx}\,\mathrm{d}x + g(y) \\ u_y &= \int \varepsilon_{yy}\,\mathrm{d}y + f(x) \end{aligned}\right\} \tag{1-13}$$

将上式代入式(1－2)的第三式，有

$$f'(x) + g'(y) = \Gamma(x,y) \tag{1-14}$$

式中，Γ 为已知函数，且

$$\Gamma = 2\varepsilon_{xy} - \int \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y}\mathrm{d}x - \int \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial x}\mathrm{d}y \tag{1-15}$$

由式(1－3)，容易证明

$$\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x \partial y} = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = 0 \tag{1-16}$$

积分上式，可知

$$\Gamma(x,y) = \alpha(x) + \beta(y) \tag{1-17}$$

式中，$\alpha(x)$与 $\beta(y)$分别为 x 与 y 的已知函数。

将式(1－17)代回式(1－14)，有

$$f'(x) - \alpha(x) = -g'(y) + \beta(y) = \omega \tag{1-18}$$

式中，ω 为一常量。于是有

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \int \alpha(x)\mathrm{d}x + \omega x + a \\ g(y) &= \int \beta(y)\mathrm{d}y - \omega y + b \end{aligned}\right\} \tag{1-19}$$

将式(1－19)代回式(1－13)，可知

$$\left.\begin{aligned} u_x &= \int \varepsilon_{xx}\mathrm{d}x + \int \beta(y)\mathrm{d}y - \omega y + b \\ u_y &= \int \varepsilon_{yy}\mathrm{d}y + \int \alpha(x)\mathrm{d}x + \omega x + a \end{aligned}\right\} \tag{1-20}$$

式中，ω，a 与 b 将由位移边界条件确定。



1.2　弹性理论平面问题的复变函数通解

1.2.1　应力函数的复变函数表达式

为了求解应力函数 A 所必须满足的双调和方程式(1-10)，要应用复变函数方法。引入复变量 z 与其共轭复变量 $\bar{z}$，即

$$z = x + \mathrm{i}y, \qquad \bar{z} = x - \mathrm{i}y \tag{1-21}$$

式中，$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$。于是有

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial \bar{z}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\\
&\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial \bar{z}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \mathrm{i}\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)\\
&\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^2, \qquad \frac{\partial^2}{\partial y^2} = -\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^2\\
&\nabla^2 = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}, \qquad \nabla^2\nabla^2 = 16\frac{\partial^4}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2}
\end{aligned}\right\} \tag{1-22}$$

于是，双调和方程式(1-10)具有如下形式：

$$\frac{\partial^4 A}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} = 0 \tag{1-23}$$

通过逐次偏积分，并考虑到应力函数为实函数，可得 A 的通解为

$$A = \frac{1}{2}\left[\bar{z}\varphi(z) + z\bar{\varphi}(\bar{z}) + \theta(z) + \bar{\theta}(\bar{z})\right] \tag{1-24}$$

由此可见，应力函数 A 可由两个复变函数表示。

1.2.2　应力分量的复变函数表达式

将式(1-24)代入式(1-9)，有

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{xx}&=-\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}-2\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}}+\frac{\partial^2}{\partial\bar{z}^2}\right)A\\\sigma_{yy}&=\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+2\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}}+\frac{\partial^2}{\partial\bar{z}^2}\right)A\\\sigma_{xy}&=-\mathrm{i}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\partial^2}{\partial\bar{z}^2}\right)A\end{aligned}\right\}\tag{1-25}$$

由上式可知

$$\sigma_{xx}+\sigma_{yy}=4\frac{\partial^2A}{\partial z\partial\bar{z}}\tag{1-26}$$

$$\sigma_{yy}-\sigma_{xx}+2\mathrm{i}\sigma_{xy}=4\frac{\partial^2A}{\partial z^2}\tag{1-27}$$

将式(1-24)代入式(1-26)和式(1-27),并引入

$$\psi(z)=\theta'(z)\tag{1-28}$$

有

$$\sigma_{xx}+\sigma_{yy}=2[\varphi'(z)+\bar{\varphi}'(\bar{z})]=4\mathrm{Re}\varphi'(z)\tag{1-29}$$

$$\sigma_{yy}-\sigma_{xx}+2\mathrm{i}\sigma_{xy}=2[\bar{z}\varphi''(z)+\psi'(z)]\tag{1-30}$$

在已知复变函数 $\varphi(z)$ 与 $\psi(z)$ 的情况下,可由式(1-29)与式(1-30)求得应力分量。这两式系由穆斯海里什维利(Muskhelishvili)导出的。

1.2.3 位移分量的复变函数表达式

由式(1-2)、式(1-4)与式(1-9),可知

$$\left.\begin{aligned}E_1\frac{\partial u_x}{\partial x}&=\frac{\partial^2A}{\partial y^2}-\nu_1\frac{\partial^2A}{\partial x^2}\\E_1\frac{\partial u_y}{\partial y}&=\frac{\partial^2A}{\partial x^2}-\nu_1\frac{\partial^2A}{\partial y^2}\\\left(\frac{E_1}{1+\nu_1}\right)\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)&=\frac{\partial^2A}{\partial x\partial y}\end{aligned}\right\}\tag{1-31}$$

引入调和函数 P,即

$$P=\nabla^2A\tag{1-32}$$



可将式(1-31)的前两式改写为

$$\left.\begin{aligned} E_1\frac{\partial u_x}{\partial x} &= -(1+\nu_1)\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}+P \\ E_1\frac{\partial u_y}{\partial y} &= -(1+\nu_1)\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}+P \end{aligned}\right\} \tag{1-33}$$

由式(1-9)与式(1-29),可知

$$P = 4\mathrm{Re}\,\varphi'(z) \tag{1-34}$$

引入共轭调和函数 Q,即

$$Q = 4\mathrm{Im}\,\varphi'(z) \tag{1-35}$$

于是,有

$$4\varphi'(z) = P+\mathrm{i}Q \tag{1-36}$$

设

$$\varphi(z) = p+\mathrm{i}q \tag{1-37}$$

则由解析函数理论,有

$$P = 4\frac{\partial p}{\partial x} = 4\frac{\partial q}{\partial y},\qquad Q = -4\frac{\partial p}{\partial y} = 4\frac{\partial q}{\partial x} \tag{1-38}$$

将式(1-38)代入式(1-33),并进行偏积分,可知

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{E_1}{1+\nu_1}\right)u_x &= -\frac{\partial A}{\partial x}+\left(\frac{4}{1+\nu_1}\right)p+g_1(y) \\ \left(\frac{E_1}{1+\nu_1}\right)u_y &= -\frac{\partial A}{\partial y}+\left(\frac{4}{1+\nu_1}\right)q+f_1(x) \end{aligned}\right\} \tag{1-39}$$

式中,$f_1(x)$与 $g_1(y)$为积分函数。将式(1-39)代入式(1-31)的第三式,并考虑到式(1-38),有

$$f_1'(x) = -g_1'(y) = \omega \tag{1-40}$$

式中,ω 为常数。积分式(1-40),可知

$$f_1(x) = \omega x+u_{y0},\qquad g_1(y) = -\omega y+u_{x0} \tag{1-41}$$

将式(1-41)代回式(1-39),可得

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{E_1}{1+\nu_1}\right)u_x &= -\frac{\partial A}{\partial x}+\left(\frac{4}{1+\nu_1}\right)p-\omega y+u_{x0} \\ \left(\frac{E_1}{1+\nu_1}\right)u_y &= -\frac{\partial A}{\partial y}+\left(\frac{4}{1+\nu_1}\right)q+\omega x+u_{y0} \end{aligned}\right\} \tag{1-42}$$



由此可见，$f_1(x)$与$g_1(y)$不产生应变，而只提供总体刚性运动。ω与u_{x0}，u_{y0}分别产生总体刚性转动与刚性移动。故纯变形位移为

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{E_1}{1+\nu_1}\right)u_x &= -\frac{\partial A}{\partial x}+\left(\frac{4}{1+\nu_1}\right)p\\ \left(\frac{E_1}{1+\nu_1}\right)u_y &= -\frac{\partial A}{\partial y}+\left(\frac{4}{1+\nu_1}\right)q\end{aligned}\right\} \qquad (1-43)$$

根据式(1-43)，并考虑式(1-22)与式(1-24)，可得复位移$u_x+\mathrm{i}u_y$的表达式，即

$$2\mu(u_x+\mathrm{i}u_y)=\kappa\varphi(z)-z\varphi'(z)-\psi(z) \qquad (1-44)$$

式中，μ为剪切弹性模量。

$$\mu=\frac{E_1}{2(1+\nu_1)} \qquad (1-45)$$

$$\kappa=\frac{3-\nu_1}{1+\nu_1} \qquad (1-46)$$

以上复位移表达式也是由Muskhelishvili导出的。

体元刚性转动也可由复变函数表达。将式(1-43)代入式(1-8)，有

$$\omega=\frac{2}{E_1}\left(\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}\right) \qquad (1-47)$$

进一步，考虑到式(1-37)与式(1-38)，则式(1-47)变成

$$\omega=\frac{2}{\mathrm{i}E_1}\left[\varphi'(z)-\bar{\varphi}'(\bar{z})\right] \qquad (1-48)$$

1.3 含内部裂纹有限大板的通解

1.3.1 满足裂纹表面静力边界条件的解答

图1-1表示一个含内部裂纹的有限大板，裂纹半长为a。



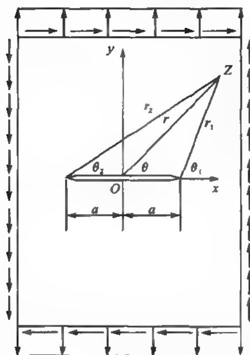


图 1-1　含内部裂纹有限大板平面问题

裂纹上、下表面均为自由表面，相应静力边界条件为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{yy}^{(+)} &= 0, \quad & \sigma_{xy}^{(+)} &= 0\\ \sigma_{yy}^{(-)} &= 0, \quad & \sigma_{xy}^{(-)} &= 0\end{aligned}\right\} \tag{1-49}$$

式中，上标(+)与(—)分别表示裂纹上、下表面。

由式(1-29)与式(1-30)消去 σ_{xx}，有

$$\sigma_{yy} - \mathrm{i}\sigma_{xy} = \varphi'(z) + \bar{\varphi}'(z) + z\bar{\varphi}''(z) + \bar{\psi}'(\bar{z}) \tag{1-50}$$

为了简化裂纹表面边界条件的表达式，现引入新的复变函数 $\Omega(z)$，即

$$\Omega(z) = z\varphi'(z) + \psi(z) \tag{1-51}$$

于是，式(1-50)可以改写成

$$\sigma_{yy} - \mathrm{i}\sigma_{xy} = \varphi'(z) + \bar{\Omega}'(\bar{z}) + (z - \bar{z})\bar{\varphi}''(\bar{z}) \tag{1-52}$$

从而，裂纹表面静力边界条件变为

$$\varphi'(t)^{(+)} + \bar{\Omega}'(t)^{(-)} = 0 \tag{1-53}$$



$$\varphi'(t)^{(-)}+\bar{\Omega}'(t)^{(+)}=0 \tag{1-54}$$

式中，对于裂纹上、下表面的点，$z=\bar{z}=t$。将式(1-53)和式(1 54)相减与相加，可分别得到

$$[\varphi'(t)-\bar{\Omega}'(t)]^{(+)}-[\varphi'(t)-\Omega'(t)]^{(-)}=0 \tag{1-55}$$

$$[\varphi'(t)+\bar{\Omega}'(t)]^{(+)}+[\varphi'(t)+\bar{\Omega}'(t)]^{(-)}=0 \tag{1-56}$$

式(1-55)表明，当 z 越过裂纹表面时，函数 $\varphi'(z)-\bar{\Omega}'(z)$ 是连续函数，从而有

$$\varphi'(z)-\Omega'(z)=2g(z)=2\sum_{n=0}^{N}G_n z^n \tag{1-57}$$

式(1-56)表明，当 z 越过裂纹表面时，函数 $\varphi'(z)+\bar{\Omega}'(z)$ 是反对称的间断函数，并可写成

$$\varphi'(z)+\bar{\Omega}'(z)=2(z^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}f(z)=$$

$$2(z^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}\sum_{m=0}^{M}F_m z^m \tag{1-58}$$

现在证明 $(z^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}$ 具有这一反对称间断性。显然，由图 1-1可知

$$(z^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}=[(z-a)(z+a)]^{-\frac{1}{2}}=$$

$$(r_1r_2)^{\frac{1}{2}}\exp\left[-\mathrm{i}\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\right] \tag{1-59}$$

于是，当 z 从上半平面趋向于裂纹上表面时，$\theta_1=\pi, \theta_2=0$。这时，由式(1-59)，可知

$$(z^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}=-\mathrm{i}(r_1r_2)^{-\frac{1}{2}} \tag{1-60a}$$

然而，当 z 从下半平面趋向于裂纹下表面时，$\theta_1=-\pi, \theta_2-0$。这时，由式(1-59)，可知

$$(z^2-a^2)^{\frac{1}{2}}=\mathrm{i}(r_1r_2)^{-\frac{1}{2}} \tag{1-60b}$$

这样，$\varphi'(z)+\Omega'(z)$ 的表达式(1-58)满足 了反对称间断性的要求。

由式(1-57)与式(1-58)，有



$$\varphi'(z) = (z^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}} f(z) + g(z) \tag{1-61}$$

$$\bar{\Omega}'(z) = (z^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}} f(z) - g(z) \tag{1-62}$$

式中

$$f(z) = \sum_{m=0}^{M} F_m z^m, \qquad F_m = F_m^{(R)} + \mathrm{i} F_m^{(I)} \tag{1-63}$$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{N} G_n z^n, \qquad G_n = G_n^{(R)} + \mathrm{i} G_n^{(I)} \tag{1-64}$$

式中，上标(R)与(I)分别表示实部与虚部。

由式(1-51)可知

$$\psi(z) = \Omega(z) - z\varphi'(z) \tag{1-65}$$

$$\psi'(z) = \Omega'(z) - \varphi'(z) - z\varphi''(z) \tag{1-66}$$

从而，应力分量的复变函数表达式(1-29)不变，而式(1-30)将用 $\varphi(z)$ 与 $\Omega(z)$ 表示。于是有

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 2[\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z})] \tag{1-67}$$

$$\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2\mathrm{i}\sigma_{xy} = 2[(\bar{z} - z)\varphi''(z) - \varphi'(z) + \Omega'(z)] \tag{1-68}$$

考虑到式(1-61)与式(1-62)，可将式(1-67)与式(1-68)改写如下：

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 2[(z^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}} f(z) + g(z) + (z^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}} f(\bar{z}) + \bar{g}(z)] \tag{1-69}$$

$$\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2\mathrm{i}\sigma_{xy} = 2\{(z^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}}[\bar{f}(z) - f(z)] - [g(z) + \bar{g}(z)] - (z - \bar{z})[(z^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}} f'(z) - (z^2 - a^2)^{-\frac{3}{2}} z f(z) + g'(z)]\} \tag{1-70}$$

式(1-69)和式(1-70)就是含内部裂纹板满足裂纹表面静力边界条件的应力分量复变函数表达式。

1.3.2 满足围绕裂纹位移单值条件的解答

考虑到式(1-51),可将位移分量的复变函数表达式(1-44)写成以下形式:

$$2\mu(u_x + \mathrm{i}u_y) = \kappa\varphi(z) \quad (z-\bar{z})\varphi'(\bar{z}) - \overline{\Omega}(z) \quad (1-71)$$

令

$$\alpha_m = \int (z^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}} z^m \mathrm{d}z \quad (1-72)$$

$$\beta_n = \int z^n \mathrm{d}z = \frac{1}{n+1} z^{n+1} \quad (1-73)$$

从而,由式(1-61)与式(1-62),可得复变函数 $\varphi(z)$ 与 $\Omega(z)$ 的表达式,即

$$\varphi(z) = \sum_{m=0}^{M} F_m \alpha_m(z) + \sum_{n=0}^{N} G_n \beta_n(z) \quad (1-74)$$

$$\Omega(z) = \sum_{m=0}^{M} \overline{F}_m \alpha_m(z) - \sum_{n=0}^{N} \overline{G}_n \beta_n(z) \quad (1-75)$$

将式(1-74)与式(1-75)代回式(1-71),可得

$$2\mu(u_x + \mathrm{i}u_y) = \kappa\Big[\sum_{m=0}^{M} F_m \alpha_m(z) + \sum_{n=0}^{N} G_n \beta_n(z)\Big] -$$

$$(z-z)\Big[\sum_{m=0}^{M} \overline{F}_m \overline{\alpha}'_m(\bar{z}) + \sum_{n=0}^{N} \overline{G}_n \overline{\beta}'_n(z)\Big] -$$

$$\Big[\sum_{m=0}^{M} F_m \alpha_m(\bar{z}) - \sum_{n=0}^{N} G_n \beta_n(\bar{z})\Big] \quad (1-76)$$

应用分部积分公式,可得以下关于 $\alpha_m(z)$ 的递推公式,即

$$\alpha_m(z) = \frac{1}{m} z^{m-1}(z^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{m-1}{m} a^2 \alpha_{m-2}(z) \quad (1-77)$$

同时,有

$$\alpha_0(z) = \ln\left(z + \sqrt{z^2 - a^2}\right) \quad (1-78)$$

$$\alpha_1(z) = \sqrt{z^2 - a^2} \quad (1-79)$$



令

$$\xi_{2k}=\frac{1}{2k}\left[z^{2k-1}+\frac{2k-1}{2k-2}a^2z^{2k-3}+\cdots+\frac{(2k-1)!!}{(2k-3)!!}a^{2k-2}z\right]\quad(k\neq 0)\tag{1-80}$$

$$\xi_{2k}=0,\qquad k=0\tag{1-81}$$

$$\eta_{2k}=\frac{1}{2k}\frac{(2k-1)!!}{(2k-2)!!}\qquad(k\neq 0)\tag{1-82}$$

$$\eta_{2k}=1\qquad(k=0)\tag{1-83}$$

$$\zeta_{2k+1}=\frac{1}{2k+1}\left[z^{2k}+\frac{2k}{2k-1}a^2z^{2k-2}+\cdots+\frac{2k!!}{(2k-1)!!}a^{2k}\right]\tag{1-84}$$

则

$$\alpha_{2k}=\sqrt{z^2-a^2}\,\xi_{2k}(z)+\eta_{2k}a^{2k}\alpha_0(z)\tag{1-85}$$

$$\alpha_{2k+1}=\sqrt{z^2-a^2}\,\zeta_{2k+1}(z)\tag{1-86}$$

考虑到式(1-85)与式(1-86),位移分量的复变函数表达式(1-76)可写成以下形式:

$$\begin{aligned}2\mu(u_x+\mathrm{i}u_y)=&\kappa\Big[\sqrt{z^2-a^2}\sum_{k=0}^{K}F_{2k}\xi_{2k}(z)+\alpha_0(z)\sum_{k=0}^{K}F_{2k}\eta_{2k}a^{2k}+\\&\sqrt{z^2-a^2}\sum_{k=0}^{K}F_{2k+1}\zeta_{2k+1}(z)+\sum_{n=0}^{N}G_n\beta_n(z)\Big]-\\&(z-\bar{z})\Big[\sum_{m=0}^{M}\bar{F}_m\bar{\alpha}'_m(\bar{z})+\sum_{n=0}^{N}G_n\beta'_n(\bar{z})\Big]-\\&\Big[\sqrt{\bar{z}^2-a^2}\sum_{k=0}^{K}F_{2k}\xi_{2k}(\bar{z})+\alpha_0(z)\sum_{k=0}^{K}F_{2k}\eta_{2k}a^{2k}+\\&\sqrt{\bar{z}^2-a^2}\sum_{k=0}^{K}F_{2k+1}\zeta_{2k+1}(z)-\sum_{n=0}^{N}G_n\beta_n(\bar{z})\Big]\end{aligned}\tag{1-87}$$

由式(1－78)可知,$\alpha_0(z)$是 z 的多值函数。故根据位移单值条件,位移表达式(1－87)中 $\alpha_0(z)$的系数应等于零,即

$$\sum_{k=0}^{K} F_{2k}\eta_{2k}a^{2k} = 0 \tag{1-88}$$

从而,式(1－87)变为以下形式:

$$\begin{aligned}2\mu(u_x + \mathrm{i}u_y) = &\kappa\Big[\sqrt{z^2-a^2}\sum_{k=0}^{K} F_{2k}\xi_{2k}(z) + \\ &\sqrt{z^2-a^2}\sum_{k=0}^{K} F_{2k+1}\zeta_{2k+1}(z) + \sum_{n=0}^{N} G_n\beta_n(z)\Big] - \\ &(z-\bar{z})\Big[\sum_{m=0}^{M} \bar{F}_m\bar{\alpha}'_m(\bar{z}) + \sum_{n=0}^{N} \bar{G}_n\bar{\beta}'_n(\bar{z})\Big] - \\ &\Big[\sqrt{\bar{z}^2-a^2}\sum_{k=0}^{K} F_{2k}\xi_{2k}(\bar{z}) + \sqrt{\bar{z}^2-a^2}\sum_{k=0}^{K} F_{2k+1}\zeta_{2k+1}(\bar{z}) - \\ &\sum_{n=0}^{N} G_n\beta_n(\bar{z})\Big]\end{aligned} \tag{1-89}$$

式(1－89)即为满足围绕内部裂纹的位移单值条件的位移分量表达式。应当指出,由式(1－88)与式(1－83),有

$$F_0 = -\sum_{k=1}^{K} F_{2k}\eta_{2k}a^{2k} \tag{1-90}$$

上式表明,F_0 不是独立的,它是 $F_{2k}(k\neq 0)$的一个线性组合。

本节内容系由主编张行与刘森和赖俊彪导出。

1.3.3 裂纹尖端近场解与应力强度因子

首先,研究裂纹尖端附近的应力场。

在裂纹右端附近,存在以下关系式:



$$\left.\begin{array}{ll} z=a, & \bar{z}=a \\ z+a=2a, & z+a=2a \\ z-a=re^{i\theta}, & \bar{z}-a=re^{-i\theta} \\ z-\bar{z}=2ri\sin\theta & \end{array}\right\} \tag{1-91}$$

将上式代入式(1-69)与式(1-70)，并略去当 r 趋于零时低于 $r^{-\frac{1}{2}}$ 的项，有

$$\sigma_{xx}+\sigma_{yy}=2(2a)^{-\frac{1}{2}}r^{-\frac{1}{2}}[e^{-i\frac{\theta}{2}}f(a)+e^{i\frac{\theta}{2}}\bar{f}(a)] \tag{1-92}$$

$$\sigma_{yy}-\sigma_{xx}+2i\sigma_{xy}=2(2a)^{-\frac{1}{2}}r^{-\frac{1}{2}}\{e^{-i\frac{\theta}{2}}[\bar{f}(a)-f(a)]+i\sin\theta e^{-i\frac{3\theta}{2}}f(a)\} \tag{1-93}$$

令

$$f(a)=A+iB \tag{1-94}$$

并将式(1-93)分为实部与虚部，可得

$$\sigma_{xx}+\sigma_{yy}=4(2a)^{-\frac{1}{2}}r^{-\frac{1}{2}}\left[A\cos\frac{\theta}{2}+B\sin\frac{\theta}{2}\right] \tag{1-95}$$

$$\sigma_{yy}-\sigma_{xx}=2(2a)^{-\frac{1}{2}}r^{-\frac{1}{2}}\left[A\sin\theta\sin\frac{3}{2}\theta-B\sin\theta\cos\frac{3}{2}\theta-2B\sin\frac{\theta}{2}\right] \tag{1-96}$$

$$2\sigma_{xy}=2(2a)^{-\frac{1}{2}}r^{-\frac{1}{2}}\left[A\sin\theta\cos\frac{3}{2}\theta+B\sin\theta\sin\frac{3}{2}\theta-2B\cos\frac{\theta}{2}\right] \tag{1-97}$$

进一步，令

$$K_{\mathrm{I}}=\sqrt{2\pi}2(2a)^{-\frac{1}{2}}A \tag{1-98}$$

$$K_{\mathrm{II}}=-\sqrt{2\pi}2(2a)^{-\frac{1}{2}}B \tag{1-99}$$

则由式(1-95)、式(1-96)与式(1-97)，可得裂纹尖端附近的应力场表达式如下：

$$\sigma_{xx}=\frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)-$$

$$\frac{K_{\mathrm{II}}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}\left(2+\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right) \qquad (1-100)$$

$$\sigma_{yy}=\frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)+$$

$$\frac{K_{\mathrm{II}}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} \qquad (1-101)$$

$$\sigma_{xy}=\frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}+$$

$$\frac{K_{\mathrm{II}}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) \qquad (1-102)$$

式(1-100)、式(1-101)和式(1-102)表明，裂纹尖端是应力场奇异点，奇异性阶次为$-1/2$。K_{I}与K_{II}分别称为Ⅰ型与Ⅱ型应力强度因子，并分别控制关于裂纹及其延长线对称与反对称应力场σ'_{ij}与σ''_{ij}，如图1-2所示。

然后，研究裂纹尖端附近的位移场。

根据位移单值条件式(1-88)，可将位移分量的复变函数表达式(1-89)改写为

$$2\mu(u_x+\mathrm{i}u_y)=\kappa\Big\{\sqrt{z^2-a^2}\sum_{k=0}^{K}F_{2k}[\xi_{2k}(z)+\eta_{2k}a^{2k-1}]+$$

$$\sqrt{z^2-a^2}\sum_{k=0}^{K}F_{2k+1}\zeta_{2k+1}(z)+\sum_{n=0}^{N}G_n\beta_n(z)\Big\}-$$

$$(z-z)\Big[\sum_{m=0}^{M}\bar{F}_m\bar{\alpha}'_m(z)+\sum_{n=0}^{N}G_n\bar{\beta}'_n(\bar{z})\Big]-$$

$$\Big\{\sqrt{\bar{z}^2-a^2}\sum_{k=0}^{K}F_{2k}[\xi_{2k}(\bar{z})+\eta_{2k}a^{2k-1}]+$$

$$\sqrt{\bar{z}^2-a^2}\sum_{k=0}^{K}F_{2k+1}\zeta_{2k+1}(z)-\sum_{n=0}^{N}G_n\beta_n(\bar{z})\Big\}$$

$$(1-103)$$



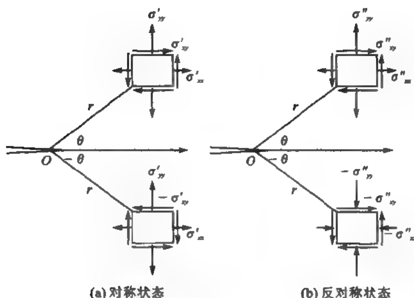


图 1-2　平面问题裂纹尖端附近的应力场

将式(1-91)代入上式，并略去刚体位移，则可得裂纹尖端附近位移场的表达式，即

$$
\begin{aligned}
2\mu(u_x+\mathrm{i}u_y)=&\kappa\sqrt{2\frac{r}{a}}\Big\{\sum_{k=0}^{K}F_{2k}\big[\xi_{2k}(a)a+\eta_{2k}a^{2k}\big]+\\
&\sum_{k=0}^{K}F_{2k+1}\zeta_{2k+1}(a)a\Big\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}-\\
&\sqrt{2\frac{r}{a}}\Big(\sum_{m=0}^{M}\bar{F}_m a^m\Big)2(\mathrm{i}\sin\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}-\\
&\sqrt{2\frac{r}{a}}\Big\{\sum_{k=0}^{K}F_{2k}\big[\xi_{2k}(a)a+\eta_{2k}a^{2k}\big]+\\
&\sum_{k=0}^{K}F_{2k+1}\zeta_{2k+1}(a)a\Big\}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}
\end{aligned}
\tag{1-104}
$$

进一步，由数学归纳法，可以证明

$$\xi_{2k}(a)a+\eta_{2k}a^{2k}=a^{2k} \tag{1-105}$$

$$\zeta_{2k+1}(a)a=a^{2k+1} \tag{1-106}$$



将式(1-105)、式(1-106)代入式(1-104),分离实部与虚部,并考虑式(1-98)与式(1-99),可得裂纹尖端附近的位移场表达式,即

$$u_x = \frac{K_{\text{I}}}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\cos\frac{\theta}{2}\left(\kappa - 1 + 2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) + \frac{K_{\text{II}}}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\sin\frac{\theta}{2}\left(\kappa + 1 + 2\cos^2\frac{\theta}{2}\right) \tag{1-107}$$

$$u_y = \frac{K_{\text{I}}}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\sin\frac{\theta}{2}\left(\kappa + 1 - 2\cos^2\frac{\theta}{2}\right) + \frac{K_{\text{II}}}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\cos\frac{\theta}{2}\left(\kappa - 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) \tag{1-108}$$

式(1-107)、式(1-108)表明,裂纹尖端是位移场的零点,其阶次为 1/2。K_{I} 与 K_{II} 分别控制关于裂纹及其延长线对称与反对称的位移场,如图 1-3 所示。

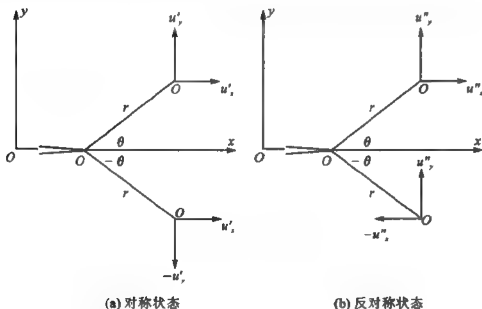


图 1-3 平面问题裂纹尖端附近的位移场



由式(1-101)与式(1-102)可知，应力强度因子 K_{I} 与 K_{II} 是平面问题裂尖场的广义应力；而由式(1-107)与式(1-108)可知，K_{I} 与 K_{II} 又是平面问题裂尖场广义位移。因此，应力强度因子在断裂力学中具有重要地位与作用。

最后，给出应力强度因子 K_{I} 与 K_{II} 的复变函数表达式。定义复应力强度因子 K 为

$$K = K_{\mathrm{I}} - \mathrm{i}K_{\mathrm{II}} \tag{1-109}$$

由式(1-94)、式(1-98)与式(1-99)，可将上式改写为

$$K = K_{\mathrm{I}} - \mathrm{i}K_{\mathrm{II}} = 2\sqrt{2\pi}(2a)^{-\frac{1}{2}} f(a) \tag{1-110}$$

考虑到式(1-61)，有

$$\lim_{z\to a}(z-a)^{\frac{1}{2}}\varphi'(z) = (2a)^{-\frac{1}{2}} f(a) \tag{1-111}$$

从而，复应力强度因子的复变函数表达式为

$$K = K_{\mathrm{I}} - \mathrm{i}K_{\mathrm{II}} = 2\sqrt{2\pi}\lim_{z\to a}(z-a)^{\frac{1}{2}}\varphi'(z) \tag{1-112}$$

1.4　含内部裂纹无限大板的特解

1.4.1　满足无限远处静力边界条件的解答

图 1-4 表示一个含内部裂纹的无限大板，在无限远处受到双向拉应力 T 与切应力 S 的作用。

无限远处的静力边界条件为

$$\lim_{z\to\infty}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 2T \tag{1-113}$$

$$\lim_{z\to\infty}(\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2\mathrm{i}\sigma_{xy}) = 2\mathrm{i}S \tag{1-114}$$

由式(1-113)、式(1-114)可知，在无限远处，应力分量取有限值。故由式(1-63)、式(1-64)以及式(1-69)与式(1-70)，可知



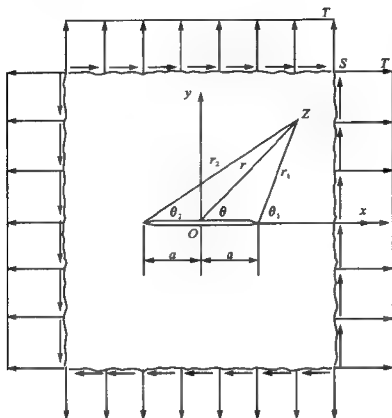


图 1-4 含内部裂纹无限大板

$$f(z) = F_0 + F_1 z, \qquad F_m = 0 \qquad (m \geqslant 2) \tag{1-115}$$

$$g(z) = G_0, \qquad G_n = 0 \qquad (n \geqslant 1) \tag{1-116}$$

由式(1-115)、式(1-116)与位移单值条件式(1-90)，可知

$$F_0 = 0 \tag{1-117}$$

于是

$$f(z) = F_1 z \tag{1-118}$$

$$g(z) = G_0 \tag{1-119}$$



1.4.2　应力分量的全场解

将式(1-118)与式(1-119)代入式(1-69)与式(1-70)，可得含内部裂纹无限大板应力分量全场解，即

$$\sigma_{xx}+\sigma_{yy}=2[(z^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}F_1z+G_0+(\bar{z}^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}\bar{F}_1\bar{z}+\bar{G}_0] \tag{1-120}$$

$$\sigma_{yy}-\sigma_{xx}+2\mathrm{i}\sigma_{xy}=2\{(z^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}(\bar{F}_1-F_1)z-(G_0+\bar{G}_0)-(z-\bar{z})[(z^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}F_1-(z^2-a^2)^{-\frac{3}{2}}F_1z^2]\} \tag{1-121}$$

引入以下极坐标

$$\left.\begin{aligned} z&=re^{\mathrm{i}\theta}=r\exp(\mathrm{i}\theta)\\ z^2-a^2&=(z+a)(z-a)=r_1r_2e^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}\end{aligned}\right\} \tag{1-122}$$

则式(1-120)与式(1-121)分别变为

$$\sigma_{xx}+\sigma_{yy}=2\left\{F_1\frac{r}{\sqrt{r_1r_2}}\exp\mathrm{i}\left(\theta-\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)+\bar{F}_1\frac{r}{\sqrt{r_1r_2}}\exp\left[-\mathrm{i}\left(\theta-\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\right]+(G_0+\bar{G}_0)\right\} \tag{1-123}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{yy}-\sigma_{xx}+2\mathrm{i}\sigma_{xy}=2\Bigg\{&(\bar{F}_1-F_1)\frac{r}{\sqrt{r_1r_2}}\exp\mathrm{i}\left(\theta-\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)-\\&(e^{\mathrm{i}\theta}-e^{-\mathrm{i}\theta})\left[F_1\frac{r}{\sqrt{r_1r_2}}\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)-\right.\\&\left.F_1\frac{r^3}{\sqrt{(r_1r_2)^3}}\exp\mathrm{i}\left(2\theta-\frac{3\theta_1+3\theta_2}{2}\right)\right]-\\&(G_0+\bar{G}_0)\Bigg\}\end{aligned} \tag{1-124}$$

将式(1-123)、式(1-124)代入无限远静力边界条件，即

式(1－113)与式(1－114)，并考虑到

$$\lim_{z\to\infty}\frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}}=1,\qquad \lim_{z\to\infty}\left(\theta-\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)=0 \quad (1-125)$$

有

$$G_0+\bar{G}_0=0,\qquad F_1=\frac{1}{2}(T-\mathrm{i}S) \qquad (1-126)$$

考虑到式(1－126)，可将式(1－120)与式(1－121)写成如下形式：

$$\sigma_{xx}+\sigma_{yy}=(T-\mathrm{i}S)\frac{z}{\sqrt{z^2-a^2}}+(T+\mathrm{i}S)\frac{\bar{z}}{\sqrt{\bar{z}^2-a^2}} \qquad (1-127)$$

$$\sigma_{yy}-\sigma_{xx}+2\mathrm{i}\sigma_{xy}=2\mathrm{i}S\frac{z}{\sqrt{z^2-a^2}}+(T-\mathrm{i}S)\left(\frac{z-z}{\sqrt{z^2-a^2}}\right)\left(\frac{a^2}{z^2-a^2}\right) \qquad (1-128)$$

式(1－127)、式(1－128)就是含内部裂纹无限大板在远方承受均匀载荷时应力场的全场解。

1.4.3 位移分量的全场解

由式(1－89)、式(1－115)、式(1－116)与式(1－117)，可得含内部裂纹无限大板位移分量全场解，即

$$2\mu(u_x+\mathrm{i}u_y)=F_1\left[\kappa\sqrt{z^2-a^2}-\sqrt{\bar{z}^2-a^2}\right]-(z-\bar{z})\bar{F}_1\frac{\bar{z}}{\sqrt{\bar{z}^2-a^2}}+G_0(\kappa z+\bar{z})-\bar{G}_0(z-\bar{z}) \qquad (1-129)$$

根据式(1－126)，可以确定 G_0 的实部与 F_1。由式(1－129)可知，为了得到位移分量，还需要确定 G_0 的虚部，因此，要研究体元的刚性转动。由式(1－48)、式(1－61)、式(1－118)与式(1－119)，有



$$\omega = -\mathrm{i}\,\frac{2}{E}\left[F_1\,\frac{z}{\sqrt{z^2-a^2}} - \overline{F}_1\,\frac{\bar{z}}{\sqrt{\bar{z}^2-a^2}} + G_0 - \overline{G}_0\right] \tag{1-130}$$

式中，$G_0-\overline{G}_0$ 是与体元位置无关的刚性转动，即代表板的总体刚性转动。故可取

$$G_0 - \overline{G}_0 = 0 \tag{1-131}$$

于是，由式(1－126)与式(1－131)，可知

$$G_0 = 0,\qquad \overline{G}_0 = 0 \tag{1-132}$$

从而，式(1－130)与式(1－129)分别变为

$$\omega = -\mathrm{i}\,\frac{2}{E}\left[F_1\,\frac{z}{\sqrt{z^2-a^2}} - F_1\,\frac{\bar{z}}{\sqrt{\bar{z}^2-a^2}}\right] \tag{1-133}$$

$$2\mu(u_x+\mathrm{i}u_y) = F_1\left(\kappa\sqrt{z^2-a^2}-\sqrt{\bar{z}^2-a^2}\right) - \overline{F}_1(z-\bar{z})\,\frac{\bar{z}}{\sqrt{\bar{z}^2-a^2}} \tag{1-134}$$

式(1－133)、式(1－134)中的 F_1 与 $\overline{F}_1$ 取决于式(1－126)。

下面考察裂纹表面位移。图 1－4 表明

$$\left.\begin{aligned}
&\sqrt{z^2-a^2} = \sqrt{r_1 r_2}\exp\left(\mathrm{i}\,\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\\
&\sqrt{\bar{z}^2-a^2} = \sqrt{r_1 r_2}\exp\left(-\mathrm{i}\,\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\\
&z-\bar{z} = 2\mathrm{i}r\sin\theta,\qquad \bar{z} = re^{-\mathrm{i}\theta}
\end{aligned}\right\} \tag{1-135}$$

将式(1－135)代入式(1－134)，并考虑到在裂纹上表面

$$\left.\begin{aligned}
&\theta_1 = \pi,\qquad \theta_2 = 0,\qquad \theta = 0 \text{ 或 } \pi\\
&r_1 = a-x,\qquad r_2 = a+x
\end{aligned}\right\} \tag{1-136}$$

有

$$2\mu(u_x+\mathrm{i}u_y) = \mathrm{i}F_1(\kappa+1)\sqrt{a^2-x^2} \tag{1-137}$$

将上式分离实部与虚部，并引入式(1－126)，可知



$$\left.\begin{aligned}\frac{u_x^2}{\left[\frac{S^2(\kappa+1)^2a^2}{16\mu^2}\right]}+\frac{x^2}{a^2}=1\\ \frac{u_y^2}{\left[\frac{T^2(\kappa+1)^2a^2}{16\mu^2}\right]}+\frac{x^2}{a^2}=1\end{aligned}\right\}\qquad(1-138)$$

上式表明，在裂纹上表面，位移呈椭圆形分布，如图 1 - 5 所示。对裂纹下表面，位移亦呈椭圆形分布。

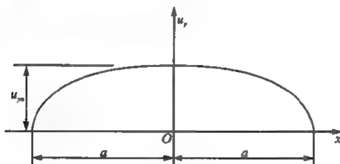


图 1 - 5　无限大板裂纹表面位移分布

1.4.4　应力强度因子的表达式

将式(1 - 126)中的 F_1 代入式(1 - 118)，再将所得结果代入式(1 - 110)，可得含内部裂纹无限大板的复应力强度因子表达式，即

$$K = K_{\text{I}} - \mathrm{i}K_{\text{II}} = (T - \mathrm{i}S)\sqrt{\pi a}\qquad(1-139)$$

将上式分离实部与虚部，有

$$K_{\text{I}} = T\sqrt{\pi a},\qquad K_{\text{II}} = S\sqrt{\pi a}\qquad(1-140)$$

将上式代入式(1 - 100)至式(1 - 102)，即可得裂尖附近应力场。将上式代入式(1 - 107)与式(1 - 108)，即可得裂尖附近位移场。

以上应力强度因子公式(1 - 140)可推广应用于以下两种情况。



(1) 无限大板受垂直于裂纹的远方拉力

由图 1-6,根据叠加原理,该情况下的应力强度因子 $K_{\rm I}$ 等于

$$K_{\rm I} = K_{\rm I}^{(a)} + K_{\rm I}^{(b)} \tag{1-141}$$

式中,$K_{\rm I}^{(a)}$ 为由式(1-140)给出的受双向远方拉力时的 $K_{\rm I}$;$K_{\rm I}^{(b)}$ 为受平行于裂纹方向远方拉力时的 $K_{\rm I}$。显然,$K_{\rm I}^{(b)}=0$ 。于是

$$K_{\rm I} = K_{\rm I}^{(a)} = T\sqrt{\pi a} \tag{1-142}$$

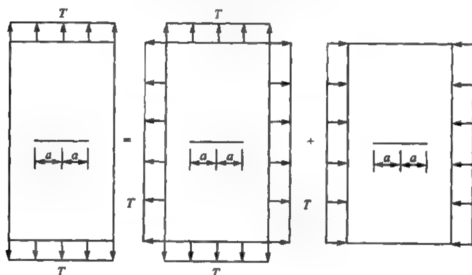


图 1-6 受单向拉伸无限大板

(2) 无限大板受斜交于裂纹的远方拉力

由图 1-7,根据应力分量坐标变换公式与局部效应原理,无限远处的面力分量为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{T}{2}(1+\cos 2\alpha)\\ \sigma_{yy} &= \frac{T}{2}(1-\cos 2\alpha)\\ \sigma_{xy} &= \frac{T}{2}\sin 2\alpha\end{aligned}\right\} \tag{1-143}$$

σ_{xx}不产生应力强度因子。由式(1-140),σ_{yy}与σ_{xy}分别产生应力强度因子$K_{\rm I}$与$K_{\rm II}$,即

$$\left.\begin{aligned} K_{\mathrm{I}} &= T\sqrt{\pi a}\cos^2\alpha \\ K_{\mathrm{II}} &= T\sqrt{\pi a}\sin\alpha\cos\alpha \end{aligned}\right\} \tag{1-144}$$

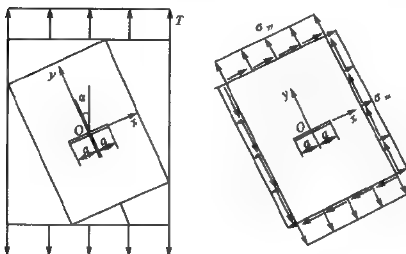


图 1-7 含斜裂纹的无限大板

(3) 有限宽板受垂直于裂纹的远方拉力

含内部裂纹无限大板的分析结果，在一定范围内，亦可近似用于有限宽板，如图 1-8 所示。对于含内部裂纹无限宽板，由式(1-127)、式(1-128)与式(1-140)，可将裂纹延长线上正应力 σ_{yy} 的分布写成以下形式：

$$\sigma_{yy}\big|_{y=0} = T\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{K_{\mathrm{I}}^{(\infty)}}{\sqrt{\pi a}}\sqrt{\frac{x^2}{x^2-a^2}} \tag{1-145}$$

式中，$K_{\mathrm{I}}^{(\infty)}$ 为无限大板的应力强度因子 K_{I}。对于含内部裂纹有限宽板，可以假定

$$\sigma_{yy}\big|_{y=0} = \eta\frac{K_{\mathrm{I}}^{(\infty)}}{\sqrt{\pi a}}\sqrt{\frac{x^2}{x^2-a^2}} = \frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{\pi a}}\sqrt{\frac{x^2}{x^2-a^2}} \tag{1-146}$$

式中，K_{I} 为有限宽板应力强度因子。由截面法，可知

$$\int_a^b \sigma_{yy}\big|_{y=0}\mathrm{d}x = Tb \tag{1-147}$$

将式(1-146)代入式(1-147)，可知



$$\eta=\sqrt{\frac{b^2}{b^2-a^2}},\qquad K_{\mathrm{I}}=\eta T\sqrt{\pi a} \tag{1-148}$$

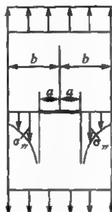


图 1-8　含中心裂纹有限宽板

1.5　含内部裂纹的反平面问题

图 1-9 表示一棱柱体横截面，它的尺寸远小于棱柱长度，作用在棱柱侧表面上的外力是沿母线方向的均布剪力。现在要求截面上的位移分布与应力分布。

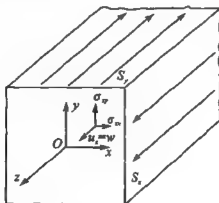


图 1-9　受反平面外力的棱柱体

1.5.1 反平面问题位移法支配方程与通解

对于反平面问题中的位移分量，作如下假设：

$$u_x = 0, \qquad u_y = 0, \qquad u_z = w(x,y) \tag{1-149}$$

表示应变分量 ε_{ij} 与位移分量 u_i 关系的几何方程为

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{1-150}$$

将式(1-149)代入式(1-150)，可知

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xy} = 0 \\ &\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial x}, \qquad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned}\right\} \tag{1-151}$$

表示应力分量 σ_{ij} 与应变分量 ε_{ij} 关系的物理方程为

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij}\lambda\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ij} \tag{1-152}$$

式中

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \qquad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{1-153}$$

将式(1-151)代入式(1-152)，有

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = 0 \\ &\sigma_{xz} = \mu\frac{\partial w}{\partial x}, \qquad \sigma_{yz} = \mu\frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned}\right\} \tag{1-154}$$

表示体力分量 F_i 与应力分量 σ_{ij} 关系的平衡方程为

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i = 0 \tag{1-155}$$

将式(1-154)代入式(1-155)，在无体力情况下，可知

$$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \tag{1-156}$$

表示面力分量 T_i 与应力分量 σ_{ij} 关系的静力边界条件为

$$\sigma_{ij} l_j = T_i \qquad (\text{在 } S_T \text{ 上}) \tag{1-157}$$

式中，l_j 为表面外法线的方向余弦。对于如图 1-10 所示的反平



面问题，有

$$\left.\begin{array}{lll} T_x = T_y = 0, & T_z = S & \\ l_x = \cos\theta, & l_y = \sin\theta, & l_z = 0 \end{array}\right\} \quad (1-158)$$

将式(1-154)与式(1-158)代入式(1-157)，可得

$$\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial w}{\partial y}\sin\theta\right) = S \qquad (\text{在 } S_T \text{ 上}) \quad (1-159)$$

若位移给定边界上的指定位移为 w^*，则位移边界条件为

$$w = w^* \qquad (\text{在 } S_u \text{ 上}) \qquad (1-160)$$

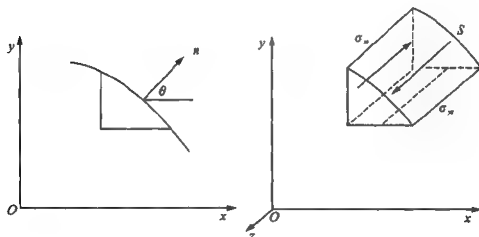


图 1-10　反平面问题的静力边界条件

由式(1-156)可知，反平面问题可归结为求解调和方程。为此，可引入解析函数 $F(z)$，并将其分解为实部 $\varphi(x,y)$ 与虚部 $\psi(x,y)$，即

$$F(z) = \varphi(x,y) + \mathrm{i}\psi(x,y) \qquad (1-161)$$

由复变函数理论，φ 与 ψ 均为调和函数，即

$$\nabla^2\varphi = 0, \qquad \nabla^2\psi = 0 \qquad (1-162)$$

于是，反平面位移 w 的通解可由以上解析函数虚部表示为

$$w(x,y) = \psi(x,y) = \frac{1}{2\mathrm{i}}[F(z) - F(\bar{z})] \qquad (1-163)$$



考虑到

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial \bar{z}},\qquad \frac{\partial}{\partial y}=\mathrm{i}\left(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)\tag{1-164}$$

与式(1-163),应力分量表达式(1-154)变成如下复变函数形式:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{xz}&=\frac{\mu}{2\mathrm{i}}[F'(z)-\bar{F}'(\bar{z})]\\ \sigma_{yz}&=\frac{\mu}{2}[F'(z)+\bar{F}'(\bar{z})]\end{aligned}\right\}\tag{1-165}$$

从而,复应力为

$$\sigma_{yz}+\mathrm{i}\sigma_{xz}=\mu F'(z)\tag{1-166}$$

将式(1-163)分别代入式(1-159)与式(1-160),可得以复变函数形式表示的边界条件,即

$$\frac{\mu}{2\mathrm{i}}\{[F'(z)-\bar{F}'(\bar{z})]\cos\theta+[F'(z)+\bar{F}'(\bar{z})]\sin\theta\}=S\qquad(\text{在 }S_T\text{ 上})\tag{1-167}$$

$$\frac{1}{2\mathrm{i}}[F(z)-\bar{F}(\bar{z})]=\omega^{*}\qquad(\text{在 }S_u\text{ 上})\tag{1-168}$$

1.5.2 满足裂纹表面静力边界条件的解答

图1-11表示一个含内部裂纹的有限大棱柱体,裂纹半长为a。裂纹上、下表面为自由表面,相应的静力边界条件为

$$\sigma_{yz}^{(+)}=\sigma_{yz}^{(-)}=0\tag{1-169}$$

将式(1-165)中第二式代入上式,并进行线性组合,有

$$[F'(t)-\bar{F}'(t)]^{(+)}-[F'(t)-\bar{F}'(t)]^{(-)}=0\tag{1-170}$$

$$[F'(t)+\bar{F}'(t)]^{(+)}+[F'(t)+\bar{F}'(t)]^{(-)}=0\tag{1-171}$$

式(1-170)、式(1-171)表明,当z越过裂纹表面时,函数$F'(z)-\bar{F}'(z)$是连续的,函数$F'(z)+\bar{F}'(z)$则呈现反对称间断。于是可将它们写成如下形式:

$$F'(z)-F'(z)-2k(z)=2\sum_{n=0}^{N}K_n z^n\tag{1-172}$$



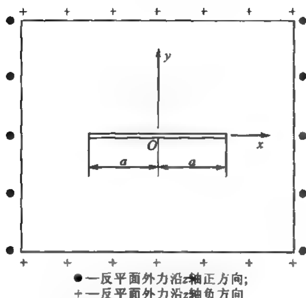


图1-11　含内部裂纹有限大棱柱体反平面问题

$$F'(z)+\bar{F}'(z)=(z^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}2h(z)=(z^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}2\sum_{m=0}^{M}H_m z^m \tag{1-173}$$

根据式(1-172)、式(1-173)可知

$$F'(z)=(z^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}h(z)+k(z) \tag{1-174}$$

$$\bar{F}'(z)=(z^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}h(z)-k(z) \tag{1-175}$$

由式(1-174),有

$$\bar{F}'(z)=(z^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}\bar{h}(z)+\bar{k}(z) \tag{1-176}$$

对比式(1-175)、式(1-176),并考虑式(1-172)与式(1-173),可知

$$h(z)=\bar{h}(z),\qquad k(z)=-\bar{k}(z) \tag{1-177}$$

$$H_m=\bar{H}_m,\qquad K_n=-\bar{K}_n \tag{1-178}$$

即 H_m 为实数,K_n 为虚数。



将式(1-174)代入式(1-166)，有

$$\sigma_{yz}+\mathrm{i}\sigma_{xz}=\mu[(z^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}h(z)+k(z)] \quad (1-179)$$

$$\sigma_{yz}+\mathrm{i}\sigma_{xz}=\mu\left[(z^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}\sum_{m=0}^{M}H_m z^m+\sum_{n=0}^{N}K_n z^n\right] \quad (1-180)$$

1.5.3 满足围绕裂纹位移单值条件的解答

由式(1-163)，反平面位移 w 的表达式为

$$w=\frac{1}{2\mathrm{i}}[F(z)-\bar{F}(\bar{z})] \quad (1-181)$$

考虑到式(1-172)与式(1-173)，可将式(1-174)改写成

$$F'(z)=(z^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}\sum_{m=0}^{M}H_m z^m+\sum_{n=0}^{N}K_n z^n \quad (1-182)$$

积分上式，并考虑到式(1-72)与式(1-73)，可得

$$F(z)=\sum_{m=0}^{M}H_m\alpha_m(z)+\sum_{n=0}^{N}K_n\beta_n(z) \quad (1-183)$$

进一步，应用式(1-77)至式(1-86)，可将式(1-183)改写为

$$F(z)=\sqrt{z^2-a^2}\sum_{k=0}^{K}H_{2k}\xi_{2k}(z)+\alpha_0(z)\sum_{k=0}^{K}H_{2k}\eta_{2k}a^{2k}+\sqrt{z^2-a^2}\sum_{k=0}^{K}H_{2k+1}\zeta_{2k+1}(z)+\sum_{n=0}^{N}K_n\beta_n(z) \quad (1-184)$$

由于 $\alpha_0(z)$是 z 的多值函数，根据位移单值条件，由上式可知

$$\sum_{k=0}^{K}H_{2k}\eta_{2k}a^{2k}=0 \quad (1-185)$$

从而，式(1-184)变成

$$F(z)=\sqrt{z^2-a^2}\sum_{k=0}^{K}H_{2k}\xi_{2k}(z)+\sqrt{z^2-a^2}\sum_{k=0}^{K}H_{2k+1}\zeta_{2k+1}(z)+\sum_{n=0}^{N}K_n\beta_n(z) \quad (1-186)$$



考虑到式(1-178)，有

$$\overline{F}(\bar{z})=\sqrt{\bar{z}^2-a^2}\sum_{k=0}^{K}H_{2k}\xi_{2k}(\bar{z})+\sqrt{\bar{z}^2-a^2}\sum_{k=0}^{K}H_{2k-1}\zeta_{2k+1}(\bar{z})-\sum_{n=0}^{N}K_n\beta_n(\bar{z}) \tag{1-187}$$

将式(1-186)与式(1-187)代入式(1-181)，可知

$$w=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left\{\sqrt{z^2-a^2}\left[\sum_{k=0}^{K}H_{2k}\xi_{2k}(z)+\sum_{k=0}^{K}H_{2k+1}\zeta_{2k+1}(z)\right]+\sum_{n=0}^{N}K_n\beta_n(z)-\sqrt{\bar{z}^2-a^2}\left[\sum_{k=0}^{K}H_{2k}\xi_{2k}(\bar{z})+\sum_{k=0}^{K}H_{2k+1}\zeta_{2k+1}(\bar{z})\right]+\sum_{n=0}^{N}K_n\beta_n(\bar{z})\right\} \tag{1-188}$$

1.5.4　裂纹尖端近场解与应力强度因子

首先研究裂纹尖端附近的应力场。

在裂纹右端附近，将式(1-91)代入式(1-179)，并略去低于$r^{-\frac{1}{2}}$的项，可知

$$\sigma_{yz}+\mathrm{i}\sigma_{xz}=\mu(2a)^{-\frac{1}{2}}r^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}\right)h(a) \tag{1-189}$$

令

$$K_{\mathrm{III}}=\mu\sqrt{\frac{\pi}{a}}h(a) \tag{1-190}$$

则式(1-189)可改写为

$$\sigma_{yz}+\mathrm{i}\sigma_{xz}=\frac{K_{\mathrm{III}}}{\sqrt{2\pi r}}\left(\cos\frac{\theta}{2}-\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}\right) \tag{1-191}$$

将上式分离实部与虚部，有

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{yz}&=\frac{K_{\mathrm{III}}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\\\sigma_{xz}&=-\frac{K_{\mathrm{III}}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}\end{aligned}\right\}\qquad(1-192)$$

上式给出反平面问题裂纹尖端附近的应力场。

然后研究裂纹尖端附近的位移场。

根据位移单值条件式(1-185)，可将位移分量的复变函数表达式(1-188)改写为

$$\begin{aligned}w=\frac{1}{2\mathrm{i}}\Big\{&\sqrt{z^2-a^2}\Big[\sum_{k=0}^{K}H_{2k}(\xi_{2k}(z)+\eta_{2k}a^{2k-1})+\\&\sum_{k=0}^{K}H_{2k+1}\zeta_{2k+1}(z)\Big]+\sum_{n=0}^{N}K_n\beta_n(z)-\\&\sqrt{\bar{z}^2-a^2}\Big[\sum_{k=0}^{K}H_{2k}(\xi_{2k}(\bar{z})+\eta_{2k}a^{2k-1})+\\&\sum_{k=0}^{K}H_{2k+1}\zeta_{2k+1}(\bar{z})\Big]+\sum_{n=0}^{N}K_n\beta_n(\bar{z})\Big\}\end{aligned}\qquad(1-193)$$

将式(1-91)代入上式，并略去刚性位移，则可得裂纹尖端附近位移场表达式，即

$$w=\sqrt{2\frac{r}{a}}\Big\{\sum_{k=0}^{K}H_{2k}[\xi_{2k}(a)a+\eta_{2k}a^{2k}]+\sum_{k=0}^{K}H_{2k+1}\zeta_{2k+1}(a)a\Big\}\sin\frac{\theta}{2}\qquad(1-194)$$

利用式(1-105)与式(1-106)，上式可以改写为

$$w=h(a)\sqrt{2\frac{r}{a}}\sin\frac{\theta}{2}\qquad(1-195)$$

将式(1-190)代入上式，有

$$w=\frac{1}{\mu}K_{\mathrm{III}}\sqrt{2\frac{r}{\pi}}\sin\frac{\theta}{2}\qquad(1-196)$$

上式给出反平面问题裂纹尖端附近的位移场。

最后，给出应力强度因子 K_{III} 的复变函数表达式。



由式(1-174),可知

$$\lim_{z\to a}\left[(z-a)^{\frac{1}{2}}F'(z)\right]=(2a)^{\frac{1}{2}}h(a) \qquad (1-197)$$

将式(1-197)代入式(1-190),有

$$K_{Ⅲ}=\mu\sqrt{2\pi}\lim_{z\to a}\left[(z-a)^{\frac{1}{2}}F'(z)\right] \qquad (1-198)$$

1.5.5 无限大棱柱体特解

图1-12表示一个含内部裂纹的无限大棱柱体. 假定作用在无限远处的外力分为两部分:一部分是作用在外法线为 x 轴的边界上的剪力 S_x;另一部分是作用在外法线为 y 轴的边界上的剪力 S_y。

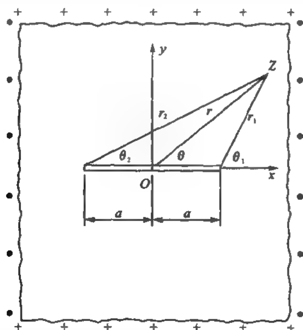


图1-12 含内部裂纹的无限大棱柱体反平面问题

无限远处的静力边界条件为

$$\lim_{z\to\infty}(\sigma_{yz}+i\sigma_{xz})=S_y+iS_x \qquad (1-199)$$



引入极坐标，并考虑到式(1-122)，复切应力表达式(1-180)变为

$$\sigma_{yz} + \mathrm{i}\sigma_{xz} = \mu\left\{\sum_{m=0}^{M} H_m\sqrt{\frac{r^2}{r_1 r_2}}r^{m-1}\exp\left[\mathrm{i}\frac{1}{2}(2\theta - \theta_1 - \theta_2)\right]\exp[\mathrm{i}(m-1)\theta] + \sum_{n=0}^{N} K_n r^n \exp(\mathrm{i}n\theta)\right\} \tag{1-200}$$

在无限远处，考虑到式(1-125)、式(1-199)与式(1-200)，可知

$$h(z) = H_0 + H_1 z, \quad H_m = 0 \quad (m \geqslant 2) \tag{1-201}$$

$$k(z) = K_0, \quad K_n = 0 \quad (n \geqslant 1) \tag{1-202}$$

由式(1-201)、式(1-202)与位移单值条件式(1-185)，可知

$$H_0 = 0 \tag{1-203}$$

于是

$$h(z) = H_1 z \tag{1-204}$$

$$k(z) = K_0 \tag{1-205}$$

将式(1-204)、式(1-205)代入式(1-180)，可得

$$\sigma_{yz} + \mathrm{i}\sigma_{xz} = \mu\left(H_1\sqrt{\frac{z^2}{z^2 - a^2}} + K_0\right) \tag{1-206}$$

引入式(1-122)，则上式变为

$$\sigma_{yz} + \mathrm{i}\sigma_{xz} = \mu\left\{H_1\sqrt{\frac{r^2}{r_1 r_2}}\exp\left[\mathrm{i}\left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)\right] + K_0\right\} \tag{1-207}$$

将上式代入无限远处边界条件式(1-199)，并考虑到式(1-125)，有

$$H_1 = \frac{S_y}{\mu}, \quad K_0 = \mathrm{i}\frac{S_x}{\mu} \tag{1-208}$$

将上式代入式(1-206)，可知

$$\sigma_{yz} + \mathrm{i}\sigma_{xz} = S_y\sqrt{\frac{z^2}{z^2 - a^2}} + \mathrm{i}S_x \tag{1-209}$$

考虑到式(1-201)、式(1-202)与式(1-203)，式(1-188)



变为

$$w = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left[H_1\left(\sqrt{z^2 - a^2} - \sqrt{\bar{z}^2 - a^2}\right) + K_0(z + \bar{z})\right] \tag{1-210}$$

将式(1-208)代入上式，有

$$w = \frac{1}{2\mathrm{i}\mu}\left[S_y\left(\sqrt{z^2 - a^2} - \sqrt{\bar{z}^2 - a^2}\right) + \mathrm{i}S_x(z + \bar{z})\right] \tag{1-211}$$

将式(1-208)代入式(1-204)，并将所得结果代入式(1-190)，则无限大棱柱体应力强度因子为

$$K_{\mathrm{III}} = S_y\sqrt{\pi a} \tag{1-212}$$

将上式代回式(1-192)与式(1-196)，即可得到相应于反平面问题的裂纹尖端附近的应力场与位移场。

参考文献

[1.1] MUSKHELISHVILI N N. Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity. Noordhoff, Grooingen, Holland, 1953.

[1.2] LIEBOWITZ H. Fracture. Volume II Mathematical Fundamentals. New York and London: Academic Press, 1968.

[1.3] 张行，方汝璐，刘森，等. 高等弹性理论. 北京：北京航空航天大学出版社，1994.

[1.4] 张行，王奇志，孟庆春，等. 断裂力学中应力强度因子的解法. 北京：国防工业出版社，1992.

[1.5] 张行，崔德渝，刘森. 断裂力学. 北京：宇航出版社，1990.

第 2 章　二维应力强度因子的能量差率解法

能量差率又称能量释放率。能量差率方法可以用于求解含裂纹构件应力强度因子，不仅适用于二维情况，而且适用于三维情况；不仅适用于线弹性情况，而且适用于弹塑性情况。此外，能量差率方法还可以用于建立含裂纹构件的起裂判据。本章只介绍能量差率概念、能量差率与应力强度因子的关系以及二维应力强度因子的能量差率解法。以上提到的其他内容将在有关章节中予以介绍。

2.1　能量差率及其与应力强度因子的关系

2.1.1　应变能差率与总势能差率

考虑一个含裂纹构件，裂纹长度为 a，在边界 S_u 上给定位移分量 $\bar{u}_i$，而在边界 S_T 上给定面力分量 T_i，同时在构件内部 ν 作用着已知的体力分量 F_i。设此时构件具有的位移分量为 u_i。在小变形情况下，相应的应变分量 ε_{ij} 为

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{2-1}$$

在线弹性情况下，相应的应力分量 σ_{ij} 为

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{2-2}$$

式中，C_{ijkl} 为材料弹性常数，同时 $C_{ijkl} = C_{klij}$。于是，构件中体元应



变能密度 W 为

$$W = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij}^* \mathrm{d}\varepsilon_{ij}^* = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \tag{2-3}$$

这时，构件的应变能，即内力势能 U 为

$$U = \int_\nu W \mathrm{d}\nu \tag{2-4}$$

构件的外力势能 U_p 为

$$U_p = -\left(\int_\nu F_i u_i \mathrm{d}\nu + \int_{S_T} T_i u_i \mathrm{d}s\right) \tag{2-5}$$

包括构件与载荷的系统总势能 Π 被定义作

$$\Pi = U + U_p \tag{2-6}$$

进一步，对于线弹性体，由弹性力学的应变能定理，可知

$$U = \frac{1}{2}\left(\int_\nu F_i u_i \mathrm{d}\nu + \int_{S_T} T_i u_i \mathrm{d}s\right) \tag{2-7}$$

从而

$$\Pi = -U \tag{2-8}$$

当裂纹长度变为 $a+\Delta a$ 时，如果位移边界 S_u 上的位移分量 $\bar{u}_i$、静力边界 S_T 上的面力分量 T_i 以及构件内部 ν 内的体力分量 F_i 均保持不变，则相应的位移分量变为 $u_i+\Delta u_i$，内力势能变为 $U+\Delta U$，外力势能变为 $U_p+\Delta U_p$，系统的总势能变为 $\Pi+\Delta\Pi$。假定板的厚度为 t，同时二维裂纹又是穿透厚度的，故由裂纹长度变化引起的裂纹面积变化为 $\Delta s=t\Delta a$。

在这种情况下，构件应变能差率被定义为

$$F = \lim_{\Delta a\to 0}\frac{\Delta U}{\Delta s} = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}a} \tag{2-9}$$

而构件总势能差率则被定义为

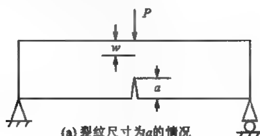
$$G = -\lim_{\Delta a\to 0}\frac{\Delta \Pi}{\Delta s} = -\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}s} = -\frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}a} \tag{2-10}$$

考虑到式(2-8)，上式变为

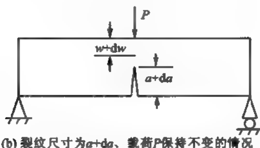
$$G = \frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}a} = F \tag{2-11}$$



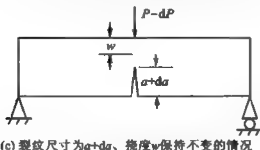
图 2-1 为含裂纹三点弯曲试件。



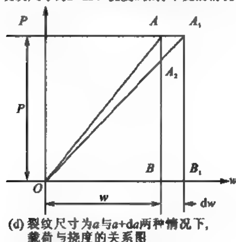
(a) 裂纹尺寸为a的情况



(b) 裂纹尺寸为$a+da$、载荷P保持不变的情况



(c) 裂纹尺寸为$a+da$、挠度w保持不变的情况



(d) 裂纹尺寸为a与$a+da$两种情况下，载荷与挠度的关系图

图 2-1　含裂纹三点弯曲试件



作为特例，考虑图 2-1(a)所示的含裂纹三点弯曲试件。集中力即载荷 P 作功的位移为中点挠度 w。图 2-1(b)表示裂纹尺寸为$a+\mathrm{d}a$而载荷 P 保持不变的情况；图 2-1(c)则表示裂纹尺寸为 $a+\mathrm{d}a$、挠度 w 保持不变的情况。

在图 2-1(d)中，当裂纹尺寸为 a 时，P 与 w 的关系由直线 OA 表示，$U=\triangle OAB$，而 $\Pi=-\triangle OAB$。当裂纹尺寸为 $a+\mathrm{d}a$ 时，P 与 w 的关系由直线 OA_1 表示。在载荷 P 保持不变的情况下，如图 2-1(b)与(d)所示，$U+\mathrm{d}U=\triangle OA_1B_1$，而同时 $\Pi+\mathrm{d}\Pi=-\triangle OA_1B_1$。于是，由图 2-1(d)可见，$\mathrm{d}U=\triangle OAA_1>0$，$\mathrm{d}\Pi=-\triangle OAA_1<0$，从而 $F=G>0$。

当裂纹尺寸变为 $a+\mathrm{d}a$ 时，如果改变静力边界上的面力分量 T_i，使该边界上位移分量 u_i 保持不变，则应变能差率被定义为

$$F=-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s}=-\frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}a} \tag{2-12}$$

总势能差率被定义为

$$G=\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}a} \tag{2-13}$$

$$G=-\frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}a}=F \tag{2-14}$$

这时，在图 2-1(c)与(d)中，挠度 w 保持不变。$U+\mathrm{d}U=\triangle OA_2B$，$\Pi+\mathrm{d}\Pi=-\triangle OA_2B$。于是，由图 2-1(d)可见，$\mathrm{d}U=-\triangle OAA_2<0$，$\mathrm{d}\Pi=\triangle OAA_2>0$，从而 $F=G>0$。

由图 2-1 还可看到，无论在静力边界保持外力不变，还是保持位移不变，能量差率都是彼此相同的。

2.1.2　能量差率与应力强度因子的关系

为了通过能量差率方法确定应力强度因子，需要建立它们二者之间的关系。首先，应用弹性力学中的应变能定理与功的互等定理建立一个有用的结论。设想在线弹性体中存在两组自相平衡

的外力系统。

由应变能定理，在这两组力系单独存在与共同存在时，应变能 U_1，U_2 与 U 的表达式分别为

$$U_1=\int_v W_1\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\int_v \sigma_{ij}^{(1)}\varepsilon_{ij}^{(1)}\mathrm{d}v=$$

$$\frac{1}{2}\left[\int_v F_i^{(1)}u_i^{(1)}\mathrm{d}v+\int_S T_i^{(1)}u_i^{(1)}\mathrm{d}s\right] \tag{2-15}$$

$$U_2=\int_v W_2\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\int_v \sigma_{ij}^{(2)}\varepsilon_{ij}^{(2)}\mathrm{d}v=$$

$$\frac{1}{2}\left[\int_v F_i^{(2)}u_i^{(2)}\mathrm{d}v+\int_S T_i^{(2)}u_i^{(2)}\mathrm{d}s\right] \tag{2-16}$$

$$U=\int_v W\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\int_v [\sigma_{ij}^{(1)}+\sigma_{ij}^{(2)}][\varepsilon_{ij}^{(1)}+\varepsilon_{ij}^{(2)}]\mathrm{d}v=$$

$$\frac{1}{2}\left[\left(\int_v F_i^{(1)}+F_i^{(2)}\right)(u_i^{(1)}+u_i^{(2)})\mathrm{d}v+\right.$$

$$\left.\int_S (T_i^{(1)}+T_i^{(2)})(u_i^{(1)}+u_i^{(2)})\mathrm{d}s\right] \tag{2-17}$$

由式(2－17)与式(2－15)，在第一组外力基础上施加第二组外力所得的应变能增量 $U-U_1$ 为

$$U-U_1=\frac{1}{2}\left[\int_v F_i^{(2)}u_i^{(2)}\mathrm{d}v+\int_S T_i^{(2)}u_i^{(2)}\mathrm{d}s\right]+$$

$$\frac{1}{2}\left[\int_v F_i^{(1)}u_i^{(2)}\mathrm{d}v+\int_S T_i^{(1)}u_i^{(2)}\mathrm{d}s\right]+$$

$$\frac{1}{2}\left[\int_v F_i^{(2)}u_i^{(1)}\mathrm{d}v+\int_S T_i^{(2)}u_i^{(1)}\mathrm{d}s\right] \tag{2-18}$$

根据功的互等定理，第一组外力在第二组外力产生的位移上所作的功等于第二组外力在第一组外力产生的位移上所作的功。于是

$$\int_v F_i^{(1)}u_i^{(2)}\mathrm{d}v+\int_S T_i^{(1)}u_i^{(2)}\mathrm{d}s=\int_v F_i^{(2)}u_i^{(1)}\mathrm{d}v+\int_S T_i^{(2)}u_i^{(1)}\mathrm{d}s \tag{2-19}$$

从而，考虑到式(2－19)，可将式(2－18)改写为



$$U-U_1=\frac{1}{2}\left[\int_v F_i^{(2)}u_i^{(2)}\,\mathrm{d}v+\int_S T_i^{(2)}u_i^{(2)}\,\mathrm{d}s\right]+$$
$$\int_v F_i^{(1)}u_i^{(2)}\,\mathrm{d}v+\int_S T_i^{(1)}u_i^{(2)}\,\mathrm{d}s \qquad (2-20)$$

上式表明：在施加第一组外力后，施加第二组外力所得的应变能增量等于第二组外力在本身产生的位移上所作的功再加上第一组外力在第二组外力产生的位移上所作的功。前者为变力作功，后者为常力作功。为了方便，可将式(2－20)称为应变能增量定理。

下面，建立总势能差率 G 与应力强度因子 K_{I}，K_{II} 的关系。图 2－2 表示两个含裂纹板。这两个板除裂纹长度外，完全相同。板 1 与板 2 的裂纹长度分别为 a 与 $a+\Delta a$。

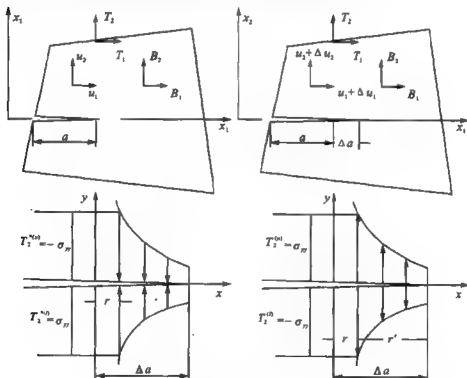


图 2－2　裂纹长度不同的两块板

对于裂纹长度为 a 的板 1，总势能为

$$\Pi = \int_A Wt\mathrm{d}A - \int_A F_i u_i t\mathrm{d}A - \int_{S_T} T_i u_i t\mathrm{d}s \qquad (2-21)$$

对于裂纹长度为 $a+\Delta a$ 的板 2，总势能为

$$\Pi + \Delta\Pi = \int_A (W+\Delta W)t\mathrm{d}A - \int_A F_i(u_i+\Delta u_i)t\mathrm{d}A - \int_{S_T} T_i(u_i+\Delta u_i)t\mathrm{d}s \qquad (2-22)$$

在式(2－21)、式(2－22)中，t 与 A 分别为板的厚度与面积，而 S_T 是板的静力边界。于是，两板的总势能差为

$$\Delta\Pi = \int_A \Delta Wt\mathrm{d}A - \int_A F_i\Delta u_i t\mathrm{d}A - \int_{S_T} T_i\Delta u_i t\mathrm{d}s \qquad (2-23)$$

使板 1 的裂纹长度增加 Δa，并在 Δa 的范围内在裂纹上岸与下岸分别施加原有约束力 $T_i^{*(u)}$ 与 $T_i^{*(l)}$。因此这块板与板 1 是等效的，如图 2－2 所示。由第 1 章可知，约束力表达式为

$$\left.\begin{aligned} T_1^{*(u)} &= -\sigma_{yz} = -K_{\mathrm{II}}\sqrt{\frac{1}{2\pi r}} \\ T_2^{*(u)} &= -\sigma_{yy} = -K_{\mathrm{I}}\sqrt{\frac{1}{2\pi r}} \\ T_1^{*(l)} &= \sigma_{yz} = K_{\mathrm{II}}\sqrt{\frac{1}{2\pi r}} \\ T_2^{*(l)} &= \sigma_{yy} = K_{\mathrm{I}}\sqrt{\frac{1}{2\pi r}} \end{aligned}\right\} \qquad (2-24)$$

进一步，在 Δa 的范围内施加反向松弛力 $T_i^{(u)}$ 与 $T_i^{(l)}$，它们分别为

$$\left.\begin{aligned} T_1^{(u)} &= \sigma_{yz} = K_{\mathrm{II}}\sqrt{\frac{1}{2\pi r}} = -T_1^{*(u)} \\ T_2^{(u)} &= \sigma_{yy} = K_{\mathrm{I}}\sqrt{\frac{1}{2\pi r}} = -T_2^{*(u)} \\ T_1^{(l)} &= -\sigma_{yz} = -K_{\mathrm{II}}\sqrt{\frac{1}{2\pi r}} = -T_1^{*(l)} \\ T_2^{(l)} &= -\sigma_{yy} = -K_{\mathrm{I}}\sqrt{\frac{1}{2\pi r}} = -T_2^{*(l)} \end{aligned}\right\} \qquad (2-25)$$



因此这块板与板 2 是等效的，如图 2－2 所示。

此时，板内位移增加 Δu_i。在 Δa 范围内，有

$$\left.\begin{aligned}
\Delta u_1^{(u)} &= u_x = \frac{\kappa+1}{2\mu}(K_{\mathrm{II}}+\Delta K_{\mathrm{II}})\sqrt{\frac{\Delta a - r}{2\pi}}\\
\Delta u_2^{(u)} &= u_y = \frac{\kappa+1}{2\mu}(K_{\mathrm{I}}+\Delta K_{\mathrm{I}})\sqrt{\frac{\Delta a - r}{2\pi}}\\
\Delta u_1^{(l)} &= -u_x = -\frac{\kappa+1}{2\mu}(K_{\mathrm{II}}+\Delta K_{\mathrm{II}})\sqrt{\frac{\Delta a - r}{2\pi}}\\
\Delta u_2^{(l)} &= -u_y = -\frac{\kappa+1}{2\mu}(K_{\mathrm{I}}+\Delta K_{\mathrm{I}})\sqrt{\frac{\Delta a - r}{2\pi}}
\end{aligned}\right\} \tag{2-26}$$

显然，对于板 2 而言，原有的外力与 Δa 范围内的约束力应该是第一组外力，而在 Δa 范围内的松弛力应视为第二组外力。于是，由应变能增量定理，即式(2－20)，可知

$$\begin{aligned}
U - U_1 = \Delta U = \int_A \Delta W t\,\mathrm{d}A = \frac{1}{2}\int_{\Delta a}[T_i^{(u)}\Delta u_i^{(u)} + T_i^{(l)}\Delta u_i^{(l)}]t\,\mathrm{d}r + \\
\int_{\Delta a}[T_i^{*(u)}\Delta u_i^{(u)} + T_i^{*(l)}\Delta u_i^{(l)}]t\,\mathrm{d}r + \\
\int_A F_i\Delta u_i t\,\mathrm{d}A + \int_S T_i\Delta u_i t\,\mathrm{d}s
\end{aligned} \tag{2-27}$$

应当指出，在位移边界上，位移保持不变，即

$$\Delta u_i = 0 \qquad (\text{在 } S_u \text{ 上}) \tag{2-28}$$

从而，在施加松弛力过程中，位移边界上约束面力不作功，即

$$\int_S T_i\Delta u_i t\,\mathrm{d}s = \int_{S_T} T_i\Delta u_i t\,\mathrm{d}s \tag{2-29}$$

考虑到式(2－25)与式(2－29)，可将式(2－27)改写为

$$\begin{aligned}
\int_A \Delta W t\,\mathrm{d}A = -\frac{1}{2}\int_{\Delta a}[T_i^{(u)}\Delta u_i^{(u)} + T_i^{(l)}\Delta u_i^{(l)}]t\,\mathrm{d}r + \\
\int_A F_i\Delta u_i t\,\mathrm{d}A + \int_{S_T} T_i\Delta u_i t\,\mathrm{d}s
\end{aligned} \tag{2-30}$$

将式(2－30)代人式(2－23)，有

$$\Delta \Pi = -\frac{1}{2}\int_{\Delta a}[T_i^{(u)}\Delta u_i^{(u)} + T_i^{(l)}\Delta u_i^{(l)}]t\,\mathrm{d}r \tag{2-31}$$



总势能差率为

$$G = -\lim_{\Delta a \to 0} \frac{1}{t} \frac{\Delta \Pi}{\Delta a} \tag{2-32}$$

将式(2-25)与式(2-26)代入式(2-31),而后进一步代入式(2-32),经积分可得

$$G = \frac{\kappa + 1}{8\mu}(K_{\mathrm{I}}^2 + K_{\mathrm{II}}^2) \tag{2-33}$$

式中,μ为剪切弹性模量,有

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{2-34}$$

对于平面应力状态

$$\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu} \tag{2-35}$$

$$G = \frac{1}{E}(K_{\mathrm{I}}^2 + K_{\mathrm{II}}^2) \tag{2-36}$$

对于平面应变状态

$$\kappa = 3 - 4\nu \tag{2-37}$$

$$G = \frac{1-\nu^2}{E}(K_{\mathrm{I}}^2 + K_{\mathrm{II}}^2) \tag{2-38}$$

2.2 均匀受载含内部裂纹无限大板能量差率解法

2.2.1 能量差率解法支配方程

图2-3表示一含中心裂纹无限大板受到均匀拉力的作用。现在,用总势能差率方法确定该板Ⅰ型应力强度因子。为此,采用叠加原理,将图2-3(a)所示情况视作由该图(b)与(c)两种情况



叠加而成。于是

$$K_{\mathrm{I}} = K_{\mathrm{I}}^{(a)} = K_{\mathrm{I}}^{(b)} + K_{\mathrm{I}}^{(c)} \tag{2-39}$$

显然，情况二等价于无裂纹情况。从而有

$$K_{\mathrm{I}}^{(b)} = 0 \tag{2-40}$$

$$K_{\mathrm{I}} = K_{\mathrm{I}}^{(c)} \tag{2-41}$$

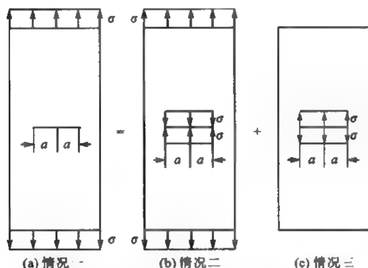


图 2-3　均匀受载含中心裂纹无限大板

现在，假定在情况三中裂纹表面张开位移($u_y = v$)服从椭圆分布规律，如图 2-4 所示。

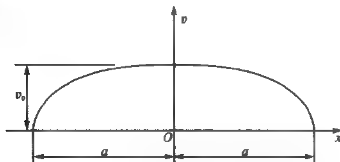


图 2-4　含中心裂纹无限大板裂纹表面张开位移

因此，有

$$\left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 = 1 \tag{2-42}$$

式中，ν_0 为 $x=0$ 点的裂纹张开位移，即位移的幅值。

引入

$$r = a - x \tag{2-43}$$

式(2-42)可改写为

$$\left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^2 = 1 - \left(\frac{a-r}{a}\right)^2 \tag{2-44}$$

在裂纹尖端附近，$r \ll a$。保留一阶小量，上式可简化成

$$\nu = \nu_0\sqrt{2\frac{r}{a}} \tag{2-45}$$

这表明，在裂尖附近，位移 ν 呈抛物线分布。

由第1章，在裂尖附近，对于平面应力情况，有

$$\nu = \frac{\kappa+1}{2\mu}K_{\mathrm{I}}\sqrt{\frac{r}{2\pi}} = \frac{4}{E}\frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{r} \tag{2-46}$$

对比式(2-45)与式(2-46)，可得

$$K_{\mathrm{I}} = \frac{E}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\nu_0 \tag{2-47}$$

进一步，由式(2-36)，可知

$$G = \frac{K_{\mathrm{I}}^2}{E} = \frac{\pi}{4}\frac{E}{a}\nu_0^2 \tag{2-48}$$

另一方面，为了确定 ν_0 与 K_{I}，给出情况三的总势能 Π 的表达式。由式(2-6)与图2-4，有

$$\Pi = U + U_p = 4\left(\frac{1}{2}\int_0^a \sigma t\nu \mathrm{d}x - \int_0^a \sigma t\nu \mathrm{d}x\right) \tag{2-49}$$

将式(2-44)代入式(2-49)，经积分，可得

$$\Pi = -\frac{\pi}{2}\sigma t a \nu_0 \tag{2-50}$$

根据式(2-10)，有

$$G = -\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}s} = -\frac{1}{2t}\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}a} \tag{2-51}$$



将式(2-50)代入式(2-51),可知

$$G = \frac{\pi}{4}\sigma\left(a\frac{\mathrm{d}\nu_0}{\mathrm{d}a} + \nu_0\right) \tag{2-52}$$

比较式(2-48)与式(2-52),可得关于 ν_0 的微分方程如下:

$$\frac{\mathrm{d}\nu_0}{\mathrm{d}a} + \frac{\nu_0}{a} = \frac{E}{\sigma a^2}\nu_0^2 \tag{2-53}$$

2.2.2　应力强度因子的求解

式(2-53)是伯努利(Bernoulli)方程的特例。伯努利方程的一般形式为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = q(x)y^n \tag{2-54}$$

它的一般解为

$$y^{(1-n)}\left[\exp(1-n)\int p(x)\mathrm{d}x\right] =$$

$$(1-n)\int q(x)\left[\exp(1-n)\int p(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x + c \qquad (n \neq 0,1) \tag{2-55}$$

对比式(2-53)与式(2-54),可知

$$\left.\begin{array}{lll} n = 2, & y = \nu_0, & x = a \\ p(x) = \left(\dfrac{1}{a}\right), & & q(x) = \dfrac{E}{\sigma a^2} \end{array}\right\} \tag{2-56}$$

将式(2-56)代入式(2-55),有

$$\nu_0 = \frac{2\sigma}{(E/a) + 2\sigma ac} \tag{2-57}$$

当 $a\to\infty$ 时,$\nu_0\to\infty$。于是由式(2-57),可知

$$c = 0 \tag{2-58}$$

$$\nu_0 = \frac{2\sigma a}{E} \tag{2-59}$$

将式(2-59)代入式(2-47),可得



$$K_{\mathrm{I}} = \sigma\sqrt{\pi a} \tag{2-60}$$

由式(2-60)给出的均匀受载含中心裂纹无限大板Ⅰ型应力强度因子与第1章由解析方法所得结果完全相同。这一方面说明能量差率解法的正确性，另一方面也说明给出的裂纹表面张开位移模态是正确的。最后，应当指出的是，能量差率方法亦可用于求解均匀受剪含中心裂纹无限大板Ⅱ型应力强度因子。

2.3 任意受载含内部裂纹能量差率解法

2.3.1 对称情况下应力强度因子的解法

图2-5表示一含中心裂纹无限大板受到对称非均匀拉力的作用。根据叠加原理，此受力状态可被看作图2-5(b)与(c)两种受力情况之和。在情况二中，裂纹表面受力状态与无裂纹时该位置的应力分布相同。从而，情况二就是无裂纹的情况，即应力强度因子为零。而在情况三中，裂纹表面受力状态与情况二相反。于是，情况一的应力强度因子等于情况三的应力强度因子。

为了决定裂纹表面受对称非均匀分布载荷时的应力强度因子，引入裂纹表面受均匀分布载荷的情况，如图2-5(d)所示。现将图2-5(d)与(c)所示的均布与非均布载荷情况分别称为情况(1)与情况(2)。

在以上两种载荷共同作用下应力强度因子 K_{I} 为

$$K_{\mathrm{I}} = K_{\mathrm{I}1} + K_{\mathrm{I}2} \tag{2-61}$$

从而，总势能差率 G 应表示为

$$G = \frac{1}{E_1}K_{\mathrm{I}}^2 = \frac{1}{E_1}(K_{\mathrm{I}1} + K_{\mathrm{I}2})^2 = \frac{1}{E_1}K_{\mathrm{I}1}^2 + \frac{1}{E_1}K_{\mathrm{I}2}^2 + \frac{2}{E_1}K_{\mathrm{I}1}K_{\mathrm{I}2} = G_1 + G_2 + \frac{2}{E_1}K_{\mathrm{I}1}K_{\mathrm{I}2} \tag{2-62}$$



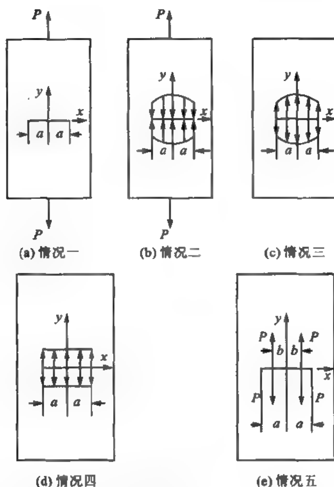


图 2-5 对称非均匀受载含中心裂纹无限大板

式中，G_1 与 G_2 分别为情况(1)与情况(2)下的总势能差率，即

$$G_1=\frac{1}{E_1}K_{11}^2,\qquad G_2=\frac{1}{E_1}K_{12}^2 \tag{2-63}$$

在以上两种载荷共同作用下总势能 Π 为

$$\begin{aligned}\Pi=&-4\left(\frac{1}{2}\int_0^a pvt\,\mathrm{d}x\right)=-2\int_0^a(p_1+p_2)(v_1+v_2)t\,\mathrm{d}x=\\&-2\int_0^a p_1v_1t\,\mathrm{d}x-2\int_0^a p_2v_2t\,\mathrm{d}x-\\&2\int_0^a p_1v_2t\,\mathrm{d}x-2\int_0^a p_2v_1t\,\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{2-64}$$



根据功的互等定理，可知

$$\int_0^a p_1 \nu_2 t \mathrm{d}x = \int_0^a p_2 \nu_1 t \mathrm{d}x \tag{2-65}$$

于是，有

$$\Pi = -2\int_0^a p_1 \nu_1 t \mathrm{d}x - 2\int_0^a p_2 \nu_2 t \mathrm{d}x - 4\int_0^a p_2 \nu_1 t \mathrm{d}x =$$

$$\Pi_1 + \Pi_2 - 4\int_0^a p_2 \nu_1 t \mathrm{d}x \tag{2-66}$$

式中，Π_1 与 Π_2 分别为情况(1)与(2)的总势能，即

$$\Pi_1 = -2\int_0^a p_1 \nu_1 t \mathrm{d}x, \qquad \Pi_2 = -2\int_0^a p_2 \nu_2 t \mathrm{d}x \tag{2-67}$$

在以上两种载荷作用下总势能差率 G 为

$$G = -\frac{1}{2t}\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}a} \tag{2-68}$$

将式(2-66)代入式(2-68)，有

$$G = -\frac{1}{2t}\frac{\mathrm{d}\Pi_1}{\mathrm{d}a} - \frac{1}{2t}\frac{\mathrm{d}\Pi_2}{\mathrm{d}a} + \frac{2}{t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\int_0^a p_2 \nu_1 t \mathrm{d}x =$$

$$G_1 + G_2 + \frac{2}{t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\int_0^a p_2 \nu_1 t \mathrm{d}x \tag{2-69}$$

式中

$$G_1 = -\frac{1}{2t}\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}a}, \qquad G_2 = -\frac{1}{2t}\frac{\mathrm{d}\Pi_2}{\mathrm{d}a} \tag{2-70}$$

对比式(2-62)与式(2-69)，可知

$$K_{12} = \frac{E_1}{K_{11}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\int_0^a p_2 \nu_1 \mathrm{d}x \tag{2-71}$$

进一步，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\int_0^a p_2 \nu_1 \mathrm{d}x = \int_0^a p_2 \frac{\mathrm{d}\nu_1}{\mathrm{d}a}\mathrm{d}x + p_2 \nu_1(a) \tag{2-72}$$

在裂纹尖端处，裂纹张开位移为零，即

$$\nu_1(a) = 0 \tag{2-73}$$



从而，式(2－71)可以改写为

$$K_{12}=\frac{K_1}{K_{11}}\int_0^a p_2\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}a}\mathrm{d}x \tag{2-74}$$

由上式可以看出，对于同一结构，只要已知一种载荷状态下的应力强度因子与裂纹张开位移，即可以求得任意载荷状态下的应力强度因子。应当指出，式(2－74)可以用于无限大板，亦可用于有限大板。

现在，考虑图2－5(e)所示无限大板在裂纹表面受双对称的四个集中载荷 P 的情况。这时，式(2－74)变成以下形式：

$$K_{12}=\frac{E_1}{K_{11}}P\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}v_1(a,b) \tag{2-75}$$

由式(2－60)、式(2－44)与式(2－59)，可知

$$K_{11}=p_1\sqrt{\pi a},\qquad v_1(a,b)=2\frac{p_1}{E_1}\sqrt{a^2-b^2} \tag{2-76}$$

将式(2－76)代入式(2－75)，有

$$K_{12}=P\sqrt{\frac{1}{\pi a}}\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}+\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\right) \tag{2-77}$$

对于对称分布载荷的情况，根据叠加原理，积分上式，可得

$$K_1=\sqrt{\frac{1}{\pi a}}\int_0^a\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}+\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\right)p(b)\mathrm{d}b \tag{2-78}$$

式中，$p(b)$为作用在横坐标 b 处的面力集度。

2.3.2　非对称情况下应力强度因子的解法

图2－6表示一含中心裂纹无限大板受非对称非均匀拉力作用。根据叠加原理，此受力状态可看作图2－6(b)与(c)两种受力情况之和。在情况二中，裂纹表面受力状态与无裂纹时该位置的应力分布相同。从而，情况二就是无裂纹的情况，即应力强度因子为零。而在情况三中，裂纹表面受力状态与情况二相反。于是，情况一的应力强度因子等于情况三的应力强度因子。



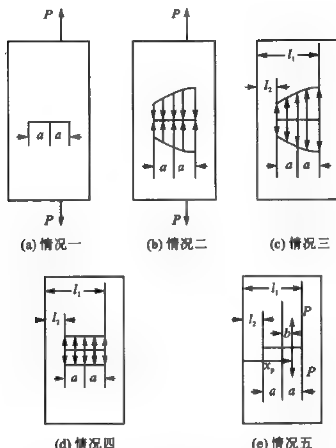


图 2-6　非对称非均匀受载含中心裂纹无限大板

为决定裂纹表面受非对称非均匀分布载荷时的应力强度因子，仍然引入裂纹表面受均匀分布载荷的情况，如图 2-6(d)所示。现将图 2-6(d)与(c)所示的均匀分布与非均匀分布载荷的情况分别称为情况(1)与情况(2)。

以上两种载荷共同作用下总势能差率 G 为

$$G = \frac{1}{E_1}K_1^2 = \frac{1}{E_1}(K_{11} + K_{12})^2 = \frac{1}{E_1}K_{11}^2 + \frac{1}{E_1}K_{12}^2 + \frac{2}{E_1}K_{11}K_{12} = G_1 + G_2 + \frac{2}{E_1}K_{11}K_{12} \qquad (2-79)$$



式中，G_1 与 G_2 分别为情况(1)与情况(2)下的总势能差率，即

$$G_1 = \frac{1}{E_1}K_{11}^2, \qquad G_2 = \frac{1}{E_1}K_{12}^2 \tag{2-80}$$

在以上两种载荷共同作用下，由叠加原理及功的互等定理，总势能 Π 为

$$\Pi = -2\left(\frac{1}{2}\int_{l_2}^{l_1} p\nu t\,\mathrm{d}x\right) = -\int_{l_2}^{l_1}(p_1+p_2)(\nu_1+\nu_2)t\,\mathrm{d}x =$$

$$-\int_{l_2}^{l_1} p_1\nu_1 t\,\mathrm{d}x - \int_{l_2}^{l_1} p_2\nu_2 t\,\mathrm{d}x - 2\int_{l_2}^{l_1} p_2\nu_1 t\,\mathrm{d}x =$$

$$\Pi_1 + \Pi_2 - 2\int_{l_2}^{l_1} p_2\nu_1 t\,\mathrm{d}x \tag{2-81}$$

式中，Π_1 与 Π_2 分别为情况(1)与情况(2)的总势能，即

$$\Pi_1 = -\int_{l_2}^{l_1} p_1\nu_1 t\,\mathrm{d}x, \qquad \Pi_2 = -\int_{l_2}^{l_1} p_2\nu_2 t\,\mathrm{d}x \tag{2-82}$$

在以上两种载荷共同作用下总势能差率 G 又为

$$G = -\frac{1}{t}\frac{\partial \Pi}{\partial l_1} \tag{2-83}$$

将式(2－81)代入式(2－83)，有

$$G = -\frac{1}{t}\frac{\partial \Pi_1}{\partial l_1} - \frac{1}{t}\frac{\partial \Pi_2}{\partial l_1} + \frac{2}{t}\frac{\partial}{\partial l_1}\int_{l_2}^{l_1} p_2\nu_1 t\,\mathrm{d}x =$$

$$G_1 + G_2 + \frac{2}{t}\frac{\partial}{\partial l_1}\int_{l_2}^{l_1} p_2\nu_1 t\,\mathrm{d}x \tag{2-84}$$

式中

$$G_1 = -\frac{1}{t}\frac{\partial \Pi}{\partial l_1}, \qquad G_2 = -\frac{1}{t}\frac{\partial \Pi_2}{\partial l_1} \tag{2-85}$$

对比式(2－79)与式(2－84)，可知

$$K_{12} - \frac{E_1}{K_{11}}\frac{\partial}{\partial l_1}\int_{l_2}^{l_1} p_2\nu_1\,\mathrm{d}x = \frac{E_1}{K_{11}}\left[\int_{l_2}^{l_1} p_2(x)\frac{\partial}{\partial l_1}\nu_1(x,l_1,l_2)\,\mathrm{d}x +\right.$$

$$\left. p_2(l_1)\nu_1(l_1,l_1,l_2)\right] \tag{2-86}$$

在裂纹尖端处，裂纹张开位移为零，即



$$\nu_1(l_1, l_1, l_2) = 0 \tag{2-87}$$

从而，式(2－86)可以改写如下：

$$K_{\mathrm{I}2} = \frac{E_1}{K_{\mathrm{I}1}}\int_{l_2}^{l_1} p_2(x)\frac{\partial}{\partial l_1}\nu_1(x, l_1, l_2)\mathrm{d}x \tag{2-88}$$

以上导出了裂纹右端的应力强度因子 $K_{\mathrm{I}2}^{(r)}$。应用此方法也可得到裂纹左端应力强度因子 $K_{\mathrm{I}2}^{(l)}$。它们的表达式为

$$K_{\mathrm{I}2}^{(r)} = \frac{E_1}{K_{\mathrm{I}1}}\int_{l_2}^{l_1} p_2(x)\frac{\partial}{\partial l_1}\nu_1(x, l_1, l_2)\mathrm{d}x \tag{2-89}$$

$$K_{\mathrm{I}2}^{(l)} = -\frac{E_1}{K_{\mathrm{I}1}}\int_{l_2}^{l_1} p_2(x)\frac{\partial}{\partial l_2}\nu_1(x, l_1, l_2)\mathrm{d}x \tag{2-90}$$

现在，考虑图 2－6(e)所示的无限大板在裂纹表面受单对称的两个集中力 P 的情况。这时，式(2－88)变成如下形式：

$$K_{\mathrm{I}2} = \frac{E}{K_{\mathrm{I}1}}P\frac{\partial}{\partial l_1}\nu_1(x_p, l_1, l_2) \tag{2-91}$$

由式(2－60)、式(2－44)与式(2－59)，可知

$$K_{\mathrm{I}1} = p_1\sqrt{\pi a}, \qquad \nu_1(a,b) = 2\frac{p_1}{E_1}\sqrt{a^2-b^2} \tag{2-92}$$

$$a = \frac{1}{2}(l_1 - l_2), \qquad b = x_p - \frac{1}{2}(l_1 + l_2) \tag{2-93}$$

于是，根据式(2－91)，有

$$K_{\mathrm{I}2} = \frac{E_1}{K_{\mathrm{I}1}}P\left(\frac{\partial \nu_1}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial l_1} + \frac{\partial \nu_1}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial l_1}\right) \tag{2-94}$$

将式(2－92)与式(2－93)代入式(2－94)，可得

$$K_{\mathrm{I}2} = P\sqrt{\frac{1}{\pi a}}\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \tag{2-95}$$

对于非对称分布载荷的情况，根据叠加原理，积分上式，有

$$K_{\mathrm{I}} = \sqrt{\frac{1}{\pi a}}\int_{-a}^{a}\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}p(b)\mathrm{d}b \tag{2-96}$$



2.4 双悬臂梁应力强度因子能量差率解法

2.4.1 不计根部效应的情况

图 2-7 表示一个双悬臂梁试样。这种试样在材料抗断裂性能测试中经常用到，如果裂纹长度，即梁的长度 a 远大于每一根梁的高度 h，则可以采用能量差率方法与材料力学中梁的理论确定双悬臂梁试样的张开型应力强度因子 K_{I}。

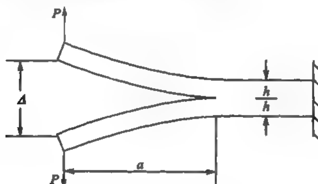


图 2-7 双悬臂梁试样

对于长裂纹的情况，试样的总势能主要由梁的开裂段所提供。故可假定，梁的未开裂段为刚体，同时略去梁开裂段的剪切变形。由材料力学中梁的经典理论，裂纹嘴张开位移 Δ，即梁自由端挠度 δ 的 2 倍为

$$\Delta = 2\delta = \frac{2Pa^3}{3EI} = \frac{8Pa^3}{Eth^3} \qquad (2-97)$$

式中，t 为梁的高度。

进一步，由式(2-7)与式(2-8)，系统总势能 Π 为

$$\Pi = -\frac{1}{2}P\Delta \tag{2-98}$$

将式(2-97)代入式(2-98),有

$$\Pi = -\frac{4P^2a^3}{Eth^3} \tag{2-99}$$

总势能差率G为

$$G = -\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}s} = -\frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}a} = \frac{12P^2a^2}{Et^2h^3} \tag{2-100}$$

由式(2-36),对于张开型裂纹,可知

$$G = \frac{1}{E}K_{\mathrm{I}}^2 \tag{2-101}$$

对比式(2-100)与式(2-101),可得双悬臂梁试样的应力强度因子K_{I}为

$$K_{\mathrm{I}} = 2\sqrt{3}\,\frac{Pa}{th^{3/2}} \tag{2-102}$$

2.4.2 计及根部效应的情况

如果裂纹长度a不是远大于梁的高度h,则需要考虑梁的未开裂段变形。为此,引入计及剪切变形的梁的近代理论。根据对称条件以及平面假设,梁的根部(未开裂段)任意点(x, y)纵向(x方向)位移u以及横向(y方向)位移ν分别为

$$u(x,y) = u_0(x) - y\varphi(x) \tag{2-103}$$

$$\nu(x,y) = 0 \tag{2-104}$$

如图2-8所示,图中,O为裂纹尖端。在式(2-103)中,$u_0(x)$代表单个悬臂梁横截面的纵向移动,$\varphi(x)$则代表该截面的转动。

于是根据弹性理论,正应变ε与切应变γ将分别为

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}x} - y\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} \tag{2-105}$$



$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\varphi \qquad (2-106)$$

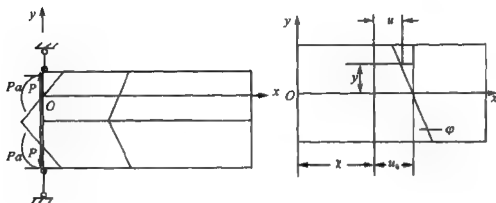


图 2-8　双悬臂梁试样的根部位移

在线弹性情况下，正应力 σ 与切应力 τ 可分别表示为

$$\sigma = E\varepsilon = E\left(\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}x} - y\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right) \qquad (2-107)$$

$$\tau = \mu^* \gamma = -\mu^* \varphi \qquad (2-108)$$

式中，μ^* 为等效剪切弹性模量，它与纯剪的剪切弹性模量 μ 之间的关系将在本节后面进行讨论。

设 $N(x)$，$M(x)$与 $Q(x)$分别表示位于 x 截面处的轴力、弯矩与剪力，如图 2-9 所示。

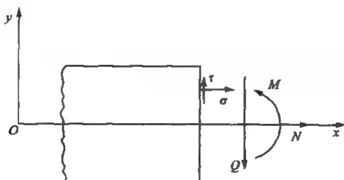


图 2-9　双悬臂梁试样根部受力状态

显然，有

$$N=\int_A \sigma \mathrm{d}A = EA\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}x}-ES\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} \tag{2-109}$$

$$M=-\int_A y\sigma \mathrm{d}A = -ES\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}x}+EI\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} \tag{2-110}$$

$$Q=-\int_A \tau \mathrm{d}A = \mu^* A\varphi \tag{2-111}$$

式中，A，S 与 I 分别为单个梁的横截面面积、静矩与惯矩，

$$A=\int_A \mathrm{d}A,\qquad S=\int_A y\mathrm{d}A,\qquad I=\int_A y^2\mathrm{d}A \tag{2-112}$$

对于具有宽度为 t、高度为 h 的矩形横截面的梁而言，有

$$A=th,\qquad S=0,\qquad I=\frac{1}{12}th^3 \tag{2-113}$$

从而有

$$N=EA\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}x} \tag{2-114}$$

$$M=EI\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} \tag{2-115}$$

$$Q=\mu^* A\varphi \tag{2-116}$$

图 2-10 表示双悬臂梁试样根部单个梁元素的自由体图。由该梁元素的平衡条件，可知

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}=q \tag{2-117}$$

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}=Q+q\frac{h}{2} \tag{2-118}$$

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}=p \tag{2-119}$$

根据对称条件，有

$$q=0 \tag{2-120}$$

于是，在将式(2-114)至式(2-116)代入式(2-117)至式(2-119)



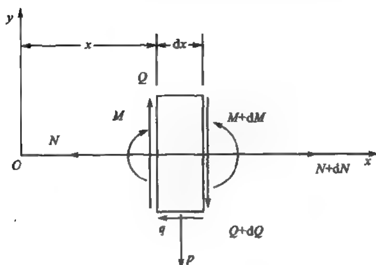


图 2-10　双悬臂梁根部单个梁元素的自由体图

后，可以建立以下微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_0}{\mathrm{d}x^2}=0 \tag{2-121}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 \varphi}{\mathrm{d}x^2}-\alpha^2\varphi=0 \tag{2-122}$$

$$p=\mu^* A\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} \tag{2-123}$$

式中，p 为法向约束反力，同时

$$\alpha^2=\frac{\mu^* A}{EI} \tag{2-124}$$

式(2-121)与式(2-122)的通解分别为

$$u_0=\lambda x+\omega \tag{2-125}$$

$$\varphi=\xi e^{\alpha x}+\eta e^{-\alpha x} \tag{2-126}$$

将式(2-125)与式(2-126)分别代入式(2-114)与式(2-115)，可得

$$N=EA\lambda \tag{2-127}$$

$$M=EI\alpha(\xi e^{\alpha x}-\eta e^{-\alpha x}) \tag{2-128}$$



下面根据未开裂段边界条件，确定积分常数 λ,ω,ξ 与 η。为简单起见，考虑未开裂段为无限长的情况。由图 2-8 可知

$$x=0,\quad N=0,\quad M=Pa \tag{2-129}$$

$$x\to\infty,\quad N=0,\quad M=0 \tag{2-130}$$

将式(2-127)与式(2-128)代入式(2-129)与式(2-130)，可得

$$\left.\begin{array}{l}\lambda=0,\quad \xi=0\\ \eta=-\dfrac{Pa}{EI\alpha}\end{array}\right\} \tag{2-131}$$

显然，由式(2-125)可知，ω 代表横截面刚体移动，故可取

$$\omega=0 \tag{2-132}$$

将式(2-131)代回式(2-127)与式(2-128)，有

$$N=0 \tag{2-133}$$

$$M=Pa\mathrm{e}^{-\alpha x} \tag{2-134}$$

将式(2-134)代入式(2-118)，可得

$$Q=-Pa\alpha\mathrm{e}^{-\alpha x} \tag{2-135}$$

应当指出，在 $X=0$ 处，剪力 Q 具有间断性。这是由于在该点，即裂纹尖端，存在铅垂约束而造成的，如图 2-8 所示。

将式(2-135)代入式(2-119)，有

$$p=Pa\alpha^2\mathrm{e}^{-\alpha x} \tag{2-136}$$

将式(2-131)与式(2-132)代回式(2-125)与式(2-126)，可得

$$u_0=0 \tag{2-137}$$

$$\varphi=-\frac{Pa}{EI}\frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha x} \tag{2-138}$$

为了确定双悬臂梁试样的应力强度因子，下面导出该梁总势能及其差率的表达式。

该梁未开裂段的应变能 U_u 为

$$U_u=2\int_0^\infty\frac{M^2}{2EI}\mathrm{d}x+2\int_0^\infty\frac{Q^2}{2\mu^* A}\mathrm{d}x \tag{2-139}$$

将式(2-134)与式(2-135)代入上式，经积分可得



$$U_s = \frac{(Pa)^2}{2EI\alpha} + \frac{(Pa)^2\alpha}{2\mu^* A} = \frac{(Pa)^2}{EI}\frac{1}{\alpha} \tag{2-140}$$

因此，可以看出，在未开裂段，剪切应变能应等于弯曲应变能。

该梁开裂段应变能为 U_C，在计及剪切变形后，应有

$$U_C = \frac{(Pa)^2}{EI}\frac{a}{3} + \frac{(Pa)^2}{\mu^* A}\frac{1}{a} \tag{2-141}$$

从而，双悬臂梁试样的总应变能为

$$U = U_s + U_C = \frac{(Pa)^2}{EI}\frac{a}{3}\left[1 + 3\frac{1}{\alpha a} + 3\frac{1}{(\alpha a)^2}\right] \tag{2-142}$$

总势能差率 G 的一般表达式为

$$G = -\frac{1}{t}\frac{d\Pi}{da} = \frac{1}{t}\frac{dU}{da} \tag{2-143}$$

将式(2-142)代入上式，可得

$$G = \frac{1}{EIt}(Pa)^2\left(1 + \frac{1}{\alpha a}\right)^2 \tag{2-144}$$

对于张开型裂纹，G 与 $K_{\rm I}$ 具有如下关系：

$$K_{\rm I} = \sqrt{EG} \tag{2-145}$$

将式(2-144)代入上式，有

$$K_{\rm I} = Pa\sqrt{\frac{1}{It}}\left(1 + \frac{1}{\alpha a}\right) \tag{2-146}$$

由上式可见，为了确定 $K_{\rm I}$，需要知道 α。

由式(2-124)可知，α 取决于等效剪切弹性模量 μ^*。它可由能量原则确定。在以上分析中，一方面，根据平面假设，切应变 γ 与切应力 τ 沿横截面均匀分布。以 τ_m 表示这一平均切应力。于是

$$\tau = \tau_m \tag{2-147}$$

同时，梁的单位长度剪切应变能为

$$\overline{U}_S = \frac{\tau_m^2 th}{2\mu^*} \tag{2-148}$$



另一方面，根据平衡方程，切应力 τ 沿着矩形横截面的高度作抛物线变化，即

$$\tau = \tau_{max}\left(1 - 4\frac{y^2}{h^2}\right) = \frac{3}{2}\tau_m\left(1 - 4\frac{y^2}{h^2}\right) \tag{2-149}$$

这时，梁的单位长度剪切应变能为

$$\overline{U}_S = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{3}{2}\tau_m\right)^2 t\int_{-h/2}^{h/2}\left(1 - 4\frac{y^2}{h^2}\right)^2 dy \tag{2-150}$$

令式(2-148)与式(2-150)相等，可得

$$\mu^* = \frac{5}{6}\mu = \frac{5}{12}\frac{E}{(1+\nu)} \tag{2-151}$$

将上式代入式(2-124)，有

$$\alpha^2 = \frac{1}{(\kappa h)^2} \tag{2-152}$$

式中

$$\kappa^2 = \frac{1+\nu}{5} \tag{2-153}$$

这里，ν 是泊松比。如果取 $\nu=1/4$，由上式可知

$$\kappa = \frac{1}{2} \tag{2-154}$$

将式(2-152)代回式(2-146)，可得计及根部效应的双悬臂梁试样应力强度因子为

$$K_{\rm I} = Pa\sqrt{\frac{1}{It}}\left(1 + \kappa\frac{h}{a}\right) \tag{2-155}$$

当 $h<10a$ 时，上式变为式(2-102)，即

$$K_{\rm I} = Pa\sqrt{\frac{1}{It}} = 2\sqrt{3}\frac{Pa}{th^{3/2}} \tag{2-156}$$



2.5　平面问题应力强度因子的刚度导数解法

2.5.1　张开型裂纹情况

如果引入有限单元法，可将应力强度因子的能量差率解法用于更为普遍的情况。首先，考虑张开型裂纹平面问题。

如果应用有限单元法已得到总体节点位移列阵$\{U\}$，则系统总势能Π可由矩阵形式表示为

$$\Pi=\frac{1}{2}\{U\}^{\mathrm{T}}[K]\{U\}-\{U\}^{\mathrm{T}}\{P\} \tag{2-157}$$

式中，$[K]$与$\{P\}$分别为总体刚度矩阵与总体节点外力列阵。

对于单位厚度的板，总势能差率为

$$G=-\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}a} \tag{2-158}$$

将式(2-157)代入式(2-158)，有

$$\begin{aligned}G=&-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\{U\}^{\mathrm{T}}\right)[K]\{U\}-\frac{1}{2}\{U\}^{\mathrm{T}}[K]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\{U\}-\\&\frac{1}{2}\{U\}^{\mathrm{T}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}[K]\right)\{U\}+\\&\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\{U\}^{\mathrm{T}}\right)\{P\}+\{U\}^{\mathrm{T}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\{P\}\end{aligned} \tag{2-159}$$

进一步，化简式(2-159)。该式等号右边第一、二两项分别为

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\{U\}^{\mathrm{T}}\right)[K]\{U\}&=\sum_{n=1}^{M}\sum_{m=1}^{M}\frac{\mathrm{d}U_m}{\mathrm{d}a}K_{mn}U_n\\\{U\}^{\mathrm{T}}[K]\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\{U\}\right)&=\sum_{n=1}^{M}\sum_{m=1}^{M}U_mK_{mn}\frac{\mathrm{d}U_n}{\mathrm{d}a}\end{aligned}\right\} \tag{2-160}$$

式中，M为总体刚度矩阵$[K]$的阶次，m与n则为刚度矩阵元素



K_{mn}所在的行序与列序。由刚度矩阵的对称性，可知

$$K_{mn} = K_{nm} \tag{2-161}$$

另外，考虑到在式(2-160)中的双重求和与求和的次序无关，有

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\{U\}^{\mathrm{T}}\right)[K]\{U\} = \{U\}^{\mathrm{T}}[K]\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\{U\}\right) \tag{2-162}$$

根据式(2-162)，可将式(2-159)写成

$$G = -\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\{U\}^{\mathrm{T}}\right)([K]\{U\} - \{P\}) - \frac{1}{2}\{U\}^{\mathrm{T}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}[K]\right)\{U\} + \{U\}^{\mathrm{T}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\{P\} \tag{2-163}$$

进一步，由有限元素法，可知

$$[K]\{U\} = \{P\} \tag{2-164}$$

同时，由于载荷与裂纹尺寸无关，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\{P\} = 0 \tag{2-165}$$

考虑到式(2-164)与式(2-165)，可将式(2-163)简化为

$$G = -\frac{1}{2}\{U\}^{\mathrm{T}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}[K]\right)\{U\} \tag{2-166}$$

为了确定式(2-166)中刚度矩阵对裂纹尺寸的导函数，围绕裂纹尖端取闭合折线Γ_0与Γ_1，如图2-11所示。当裂纹尖端向右移动Δa时，设位于Γ_1上的节点不动，而位于Γ_0上的节点与裂纹尖端一起向右移动Δa。因此，只有位于Γ_0与Γ_1之间的元素刚度矩阵发生变化，如图2-11所示。

设Γ_1与Γ_0之间的元素个数为N，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}[K] = \sum_{i=1}^{N}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}[K_i] \tag{2-167}$$

式中，$[K_i]$是第i个元素的扩阶刚度矩阵。令x_{ij}代表第i个元素第j个节点的横坐标，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}[K] = \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_{ij}}[K_i]\frac{\mathrm{d}x_{ij}}{\mathrm{d}a} \tag{2-168}$$



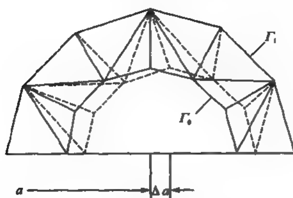


图 2-11 裂纹尖端移动时有限单元刚度的变化

$$\frac{\mathrm{d}x_{ij}}{\mathrm{d}a}=\begin{cases}1 & (\text{当节点 } j \text{ 在 } \Gamma_0 \text{ 上}) \\ 0 & (\text{当节点 } j \text{ 不在 } \Gamma_0 \text{ 上})\end{cases} \tag{2-169}$$

将式(2-168)代入式(2-166)后,K_{I} 取决于下式,即

$$G=\frac{1}{E_1}K_{\text{I}}^2 \tag{2-170}$$

2.5.2 复合型裂纹情况

图 2-12 表示一个受拉伸的含斜裂纹矩形板。可采用分解法将其分解成平面张开型与平面剪切型两种裂纹问题,然后分别采用刚度导数方法求解 K_{I} 与 K_{II}。具体做法如下:

① 划分有限元网格。在划分网格时要保证在板中每一裂纹尖端附近有一关于裂纹及其延长线为对称并包括裂尖在内的子区域,如图 2-12 所示。

② 进行有限元分析,并给出子区域边界上的节点位移或节点外力。

③ 将子区域边界上节点位移(或节点外力)分解成两种状态:关于裂纹及其延长线对称的节点位移 $u_x^{(s)}$ 与 $u_y^{(s)}$(或节点外力 $p_x^{(s)}$ 与 $p_y^{(s)}$)和关于裂纹及其延长线反对称的节点位移 $u_x^{(a)}$ 与 $u_y^{(a)}$(或



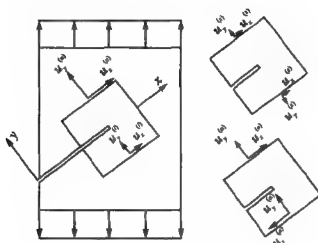


图 2-12 含斜裂纹受拉伸矩形板

节点外力 $p_x^{(a)}$ 与 $p_y^{(a)}$)。

④ 采用刚度导数方法分别求解对称与反对称状态的应力强度因子 K_{I} 和 K_{II}。

设分解前子区域边界上关于裂纹及其延长线对称点的位移分量为 $u_x^{(u)}$ 与 $u_y^{(u)}$ 以及 $u_x^{(l)}$ 与 $u_y^{(l)}$,如图 2-12 所示。于是

$$u_x^{(s)} = \frac{1}{2}[u_x^{(u)} + u_x^{(l)}], \qquad u_y^{(s)} = \frac{1}{2}[u_y^{(u)} - u_y^{(l)}] \tag{2-171}$$

$$u_x^{(a)} = \frac{1}{2}[u_x^{(u)} - u_x^{(l)}], \qquad u_y^{(a)} = \frac{1}{2}[u_y^{(u)} + u_y^{(l)}] \tag{2-172}$$

对于子区域的节点外力亦可进行类似分解。

本书主编及其研究生提出了广义刚度导数方法,用以求解变厚度板裂纹问题以及复合型裂纹问题,详见参考文献[2.1],[2.2]与[2.3]。

参考文献

[2.1] CHENG SHUMIN, WU SHAOFU, ZHANG XING. Analysis of



Stress Intensity Factors for Cracked Plates with Non-uniform Thickness by the Advanced Stiffness Derived Method. Engineering Fracture Mechanics, 1990,37(3):539-549.

[2.2] CHENG SHUMIN, ZHANG XING. Generalized Stiffness Derivative Method for Mixed Mode Crack Problems. Engineering Fracture Mechanics, 1990,17(6):437-444.

[2.3] 张行.断裂力学中应力强度因子的解法.北京:国防工业出版社,1992.

[2.4] LIEBOWITZ H. Fracture. Volume Ⅱ. Academic Press, New York and London, 1968.

[2.5] CHEREPANOV G P. Mechanics of Brittle Fracture. McGraw-Hill Inc, 1979.

[2.6] 黄克智,余寿文.弹塑性断裂力学.北京:清华大学出版社,1985.

[2.7] 张行,崔德渝,刘森.断裂力学.北京:宇航出版社,1990.

[2.8] 孟庆春,张行.DCB试样应力强度因子的一个改进公式.北京航空航天大学学报,1996,27(6):717-721.

[2.9] 崔德渝,吴绍富,张行.复合型裂纹的能量释放率计算与断裂判据.北京航空航天大学学报,1990(3):43-49.

第3章 二维应力强度因子边界配位解法

若要获得含裂纹有限大板应力场的解析解，通常在数学上有很大困难。因此，许多研究者正在探索有限尺寸板裂纹问题的半解析、半数值解。

边界配位法就是一种求解有限大板应力强度因子的一种半解析、半数值方法。这种方法在求解含边缘裂纹的单连通板问题时还是比较方便的。用于材料断裂性能测试的三点弯曲试样与紧凑拉伸试样的应力强度因子就是由这种方法求得的。边界配位解法是建立在平面问题极坐标分离变量解法原理之上的。因此首先介绍弹性力学平面问题极坐标系分离变量解法。

3.1 平面问题极坐标系分离变量解法

3.1.1 平面问题极坐标系基本方程

在直角坐标系中，线弹性平面问题的求解可归结为在一组边界条件下，求解以下双调和方程：

$$\nabla^2 \nabla^2 A(x,y) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 A = 0 \qquad (3-1)$$

式中，A 为应力函数。应力分量 σ_{xx}，σ_{yy} 和 σ_{xy} 与 A 之间存在如下微分关系：



$$\left.\begin{aligned}\sigma_{xx}&=\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\\ \sigma_{yy}&=\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\\ \sigma_{xy}&=-\frac{\partial^2 A}{\partial x\partial y}\end{aligned}\right\}\tag{3-2}$$

式(3-1)与式(3-2)分别表示在无体力时平面问题的协调方程与平衡方程。通过坐标变换，可将以上二式化成极坐标形式。

首先，根据应力分量的坐标变换公式(应力圆)，可以导出直角坐标系应力分量 σ_{xx}，σ_{yy}，σ_{xy} 与极坐标系应力分量 σ_{rr}，$\sigma_{\theta\theta}$，$\sigma_{r\theta}$ 的关系式：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{rr}&=\frac{1}{2}(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})+\frac{1}{2}(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})\cos 2\theta+\sigma_{xy}\sin 2\theta\\ \sigma_{\theta\theta}&=\frac{1}{2}(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})-\frac{1}{2}(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})\cos 2\theta-\sigma_{xy}\sin 2\theta\\ \sigma_{r\theta}&=-\frac{1}{2}(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})\sin 2\theta+\sigma_{xy}\cos 2\theta\end{aligned}\right\}\tag{3-3}$$

式中，θ 为极坐标系中的极角。

其次，列出直角坐标与极坐标变换关系：

$$\left.\begin{aligned}&x=r\cos\theta, && y=r\sin\theta\\ &r=\sqrt{x^2+y^2}, && \theta=\arctan\frac{y}{x}\end{aligned}\right\}\tag{3-4}$$

于是，可得各阶导数之间的关系：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}&=\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\\ \frac{\partial}{\partial y}&=\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\end{aligned}\right\}\tag{3-5}$$



$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2} = {} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)- \\
& \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\cos 2\theta+ \\
& \left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial \theta}\right)\sin 2\theta \\
\frac{\partial^2}{\partial y^2} = {} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)+ \\
& \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\cos 2\theta- \\
& \left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial \theta}\right)\sin 2\theta \\
\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} = {} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\sin 2\theta- \\
& \left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial \theta}\right)\cos 2\theta
\end{aligned}\right\} \tag{3-6}
$$

将式(3－6)代入式(3－2)，再将所得结果代入式(3－3)，可得极坐标系应力分量：

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= \frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} \\
\sigma_{\theta\theta} &= \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} \\
\sigma_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial \theta}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{3-7}
$$

上式等效于极坐标系的平衡方程。

将式(3－6)代入式(3－1)，可得

$$
\nabla^2\nabla^2 A = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)^2 A = 0 \tag{3-8}
$$

上式即为极坐标系的协调方程。

以上这种通过坐标变换由平面问题的直角坐标系支配方程出发建立极坐标系支配方程的方法见参考文献[3.1]。



3.1.2 极坐标系基本方程通解

现在，采用分离变量法求解协调方程式(3-8)。令

$$A(r,\theta)=\sum_{\lambda}A_{\lambda}=\sum_{\lambda}r^{\lambda+1}F_{\lambda}(\theta) \tag{3-9}$$

将式(3-9)代入式(3-8)，可得关于未知函数 $F_{\lambda}(\theta)$ 的常微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}\theta^4}F_{\lambda}(\theta)+[(\lambda+1)^2+(\lambda-1)^2]\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}F_{\lambda}(\theta)+$$

$$(\lambda+1)^2(\lambda-1)^2F_{\lambda}(\theta)=0 \tag{3-10}$$

上述方程的解具有如下形式：

$$F_{\lambda}(\theta)=\mathrm{e}^{K\theta} \tag{3-11}$$

将式(3-11)代入式(3-10)，并经因式分解，有

$$[K^2+(\lambda-1)^2][K^2+(\lambda+1)^2]=0 \tag{3-12}$$

由此可得

$$\left.\begin{aligned}K_1&=(\lambda+1)\mathrm{i},\quad K_2=-(\lambda+1)\mathrm{i}\\K_3&=(\lambda-1)\mathrm{i},\quad K_4=-(\lambda-1)\mathrm{i}\end{aligned}\right\} \tag{3-13}$$

于是，由式(3-11)与式(3-13)可知，$F_{\lambda}(\theta)$ 的通解为

$$\begin{aligned}F_{\lambda}(\theta)=&a_{\lambda}\cos(\lambda+1)\theta+b_{\lambda}\sin(\lambda+1)\theta+\\&c_{\lambda}\cos(\lambda-1)\theta+d_{\lambda}\sin(\lambda-1)\theta\end{aligned} \tag{3-14}$$

将式(3-14)代入式(3-9)，有

$$\begin{aligned}A(r,\theta)=&\sum_{\lambda}A_{\lambda}(r,\theta)=\sum_{\lambda}r^{\lambda+1}F_{\lambda}(\theta)=\\&\sum_{\lambda}r^{\lambda+1}[a_{\lambda}\cos(\lambda+1)\theta+b_{\lambda}\sin(\lambda+1)\theta+\\&c_{\lambda}\cos(\lambda-1)\theta+d_{\lambda}\sin(\lambda-1)\theta]\end{aligned} \tag{3-15}$$

进一步，将式(3-15)代入式(3-7)，可得极坐标系应力分量



$$\left.\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \sum_{\lambda}\sigma_{rr} = \sum_{\lambda} r^{\lambda-1}[(\lambda+1)F_{\lambda}(\theta) + F''_{\lambda}(\theta)] \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sum_{\lambda}\sigma_{\theta\theta} = \sum_{\lambda} r^{\lambda-1}(\lambda+1)\lambda F_{\lambda}(\theta) \\ \sigma_{r\theta} &= \sum\sigma_{r\theta} = -\sum_{\lambda} r^{\lambda-1}\lambda F'_{\lambda}(\theta)\end{aligned}\right\} \quad (3-16)$$

3.2 含边缘裂纹有限大板的通解

3.2.1 满足裂纹表面边界条件的解答

如果裂纹表面是自由的，则裂纹上、下岸的边界条件为

$$\theta = \pm\pi, \quad \sigma_{\theta\theta} = 0, \quad \sigma_{r\theta} = 0 \qquad (3-17)$$

如图 3－1 所示。

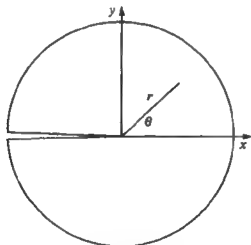


图 3－1　含边缘裂纹板

将式(3－16)代入式(3－17)，有

$$F_{\lambda}(\pm\pi) = 0, \quad F'_{\lambda}(\pm\pi) = 0 \qquad (3-18)$$



进一步，将式(3－14)代入式(3－18)，可得一组关于确定 a_λ，b_λ，c_λ 与 d_λ 的线性代数方程组：

$$a_\lambda\cos(\lambda+1)\pi\pm b_\lambda\sin(\lambda+1)\pi+ c_\lambda\cos(\lambda-1)\pi\pm d_\lambda\sin(\lambda-1)\pi=0 \tag{3-19}$$

$$\mp a_\lambda(\lambda+1)\sin(\lambda+1)\pi+b_\lambda(\lambda+1)\cos(\lambda+1)\pi\mp c_\lambda(\lambda-1)\sin(\lambda-1)\pi+ d_\lambda(\lambda-1)\cos(\lambda-1)\pi=0 \tag{3-20}$$

式(3－19)、式(3－20)代表 a_λ，b_λ，c_λ 与 d_λ 的四个齐次线性代数方程组。a_λ，b_λ，c_λ 与 d_λ 具有非零解的条件是这个方程组的系数行列式为零。展开这一行列式，则非零解的条件为

$$\sin 2\lambda\pi=0 \tag{3-21}$$

以上超越方程的根为

$$\lambda=\pm\frac{1}{2},\pm 1,\pm\frac{3}{2},\pm 2\cdots \tag{3-22}$$

为了在式(3－22)中选取力学上合理的本征值，以裂纹尖端为圆心，以 R 为半径作一径向开裂圆。λ 的取值应在 $R\to 0$ 时使圆内包含的应变能 U 不趋于无限大。

对于平面问题，应变能密度为

$$W=\frac{1}{2}(\sigma_{rr}\varepsilon_{rr}+\sigma_{\theta\theta}\varepsilon_{\theta\theta}+2\sigma_{r\theta}\varepsilon_{r\theta})= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{E}(\sigma_{rr}^2-2\nu\sigma_{rr}\sigma_{\theta\theta}+\sigma_{\theta\theta}^2)+\frac{1}{G}\sigma_{r\theta}^2\right] \tag{3-23}$$

考虑到式(3－16)，可将上式写成如下形式：

$$W=r^{2(\lambda-1)}\omega(\theta) \tag{3-24}$$

开裂圆内的应变能为

$$U=\int_0^R\int_{-\pi}^{\pi}Wr\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2\lambda}R^{2\lambda}\int_{-\pi}^{\pi}\omega(\theta)\mathrm{d}\theta \tag{3-25}$$

由上式可知，λ 只能取正值。这样，当 $R\to 0$ 时，$U\to 0$。

下面，考虑 a_λ，b_λ，c_λ 与 d_λ 的关系。

若取 λ 为半整数，即



$$\lambda = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \cdots, \frac{2k-1}{2} \cdots \tag{3-26}$$

则

$$\left.\begin{aligned} \cos(\lambda+1)\pi = \cos(\lambda-1)\pi = 0 \\ \sin(\lambda+1)\pi = \sin(\lambda-1)\pi = \mp 1 \end{aligned}\right\} \tag{3-27}$$

于是由式(3-19)与式(3-20)，可知

$$c_\lambda = -\frac{\lambda+1}{\lambda-1}a_\lambda, \qquad d_\lambda = -b_\lambda \tag{3-28}$$

若取 λ 为整数，即

$$\lambda = 1, 2, 3, \cdots, k \cdots \tag{3-29}$$

则

$$\left.\begin{aligned} \cos(\lambda+1)\pi = \cos(\lambda-1)\pi = \pm 1 \\ \sin(\lambda+1)\pi = \sin(\lambda-1)\pi = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3-30}$$

于是由式(3-19)与式(3-20)，可知

$$c_\lambda = -a_\lambda, \qquad d_\lambda = -\frac{\lambda+1}{\lambda-1}b_\lambda \tag{3-31}$$

进一步，令

$$\lambda = \frac{n}{2}, \qquad n \geqslant 1 \tag{3-32}$$

当 n 为奇数时，λ 为半整数，式(3-28)变为

$$a_n = -\frac{\frac{n}{2}-1}{\frac{n}{2}+1}c_n, \qquad b_n = -\frac{\frac{n}{2}+1}{\frac{n}{2}+1}d_n \tag{3-33}$$

当 n 为偶数时，λ 为整数，式(3-31)变为

$$a_n = -\frac{\frac{n}{2}+1}{\frac{n}{2}+1}c_n, \qquad b_n = -\frac{\frac{n}{2}-1}{\frac{n}{2}+1}d_n \tag{3-34}$$

从而，可将式(3-33)与式(3-34)写成如下统一形式：



$$a_n = -\frac{\frac{n}{2}+(-1)^n}{\frac{n}{2}+1}c_n, \qquad b_n = -\frac{\frac{n}{2}-(-1)^n}{\frac{n}{2}+1}d_n \tag{3-35}$$

最后，将式(3-35)与式(3-32)代入式(3-15)，可得满足裂纹表面边界条件的应力函数如下：

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^{\frac{n}{2}+1}\left[\cos\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta + \alpha_n \cos\left(\frac{n}{2}+1\right)\theta\right] + \sum_{n=1}^{\infty} d_n r^{\frac{n}{2}+1}\left[\sin\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta + \beta_n \sin\left(\frac{n}{2}+1\right)\theta\right] + A_1 \tag{3-36}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} \alpha_n &= -\frac{\frac{n}{2}+(-1)^n}{\frac{n}{2}+1} \\ \beta_n &= -\frac{\frac{n}{2}-(-1)^n}{\frac{n}{2}+1} \end{aligned}\right\} \tag{3-37}$$

$$A_1 = A_0 r\cos\theta + B_0 r\sin\theta + C_0 \tag{3-38}$$

则

$$A_1 = A_0 x + B_0 y + C_0 \tag{3-39}$$

3.2.2　应力分量的全场解与近场解

将式(3-36)代入式(3-7)，有

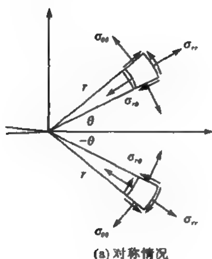


$$
\left.
\begin{aligned}
\sigma_{rr} = & \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^{\frac{n}{2}-1}\left\{\left[\left(\frac{n}{2}+1\right)-\left(\frac{n}{2}-1\right)^2\right]\cos\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta+\right.\\
& \left.\alpha_n\left[\left(\frac{n}{2}+1\right)-\left(\frac{n}{2}+1\right)^2\right]\cos\left(\frac{n}{2}+1\right)\theta\right\}+\\
& \sum_{n=1}^{\infty} d_n r^{\frac{n}{2}-1}\left\{\left[\left(\frac{n}{2}+1\right)-\left(\frac{n}{2}-1\right)^2\right]\sin\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta+\right.\\
& \left.\beta_n\left[\left(\frac{n}{2}+1\right)-\left(\frac{n}{2}+1\right)^2\right]\sin\left(\frac{n}{2}+1\right)\theta\right\}\\
\sigma_{\theta\theta} = & \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^{\frac{n}{2}-1}\ \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)\left\{\cos\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta+\alpha_n\cos\left(\frac{n}{2}+1\right)\theta\right\}+\\
& \sum_{n=1}^{\infty} d_n r^{\frac{n}{2}-1}\ \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)\left\{\sin\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta+\beta_n\sin\left(\frac{n}{2}+1\right)\theta\right\}\\
\sigma_{r\theta} = & \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^{\frac{n}{2}-1}\ \frac{n}{2}\left\{\left(\frac{n}{2}-1\right)\sin\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta+\right.\\
& \left.\alpha_n\left(\frac{n}{2}+1\right)\sin\left(\frac{n}{2}+1\right)\theta\right\}-\\
& \sum_{n=1}^{\infty} d_n r^{\frac{n}{2}-1}\ \frac{n}{2}\left\{\left(\frac{n}{2}-1\right)\cos\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta+\right.\\
& \left.\beta_n\left(\frac{n}{2}+1\right)\cos\left(\frac{n}{2}+1\right)\theta\right\}
\end{aligned}
\right\}
\tag{3-40}
$$

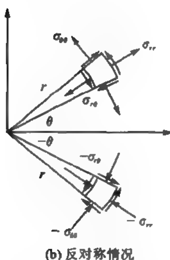
式(3－40)给出了含边缘裂纹板应力分量全场解。由该式可见：与 c_n 相关的应力分量是关于裂纹及其延长线为对称的，如图 3－2(a)所示；与 d_n 相关的应力分量是关于裂纹及其延长线为反对称的，如图 3－2(b)所示。

由式(3－40)可知：当 $r\to 0$ 时，$n=1$ 的项趋向无限大，故被称为奇异项；当 $r\to 0$ 时，$n>1$ 的项趋向零，故被称为非奇异项。因此，在裂纹尖端附近，只需考虑 $n=1$ 的项。由式(3－40)可知，在裂纹尖端附近，有





(a) 对称情况



(b) 反对称情况

图 3-2　含边缘裂纹板应力场

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= c_1 r^{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}\left(5\cos\frac{\theta}{2}-\cos\frac{3\theta}{2}\right)-d_1 r^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{4}\left(5\sin\frac{\theta}{2}-3\sin\frac{3\theta}{2}\right)\\
\sigma_{\theta\theta} &= c_1 r^{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}\left(3\cos\frac{\theta}{2}+\cos\frac{3\theta}{2}\right)-d_1 r^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{4}\left(3\sin\frac{\theta}{2}+3\sin\frac{3\theta}{2}\right)\\
\sigma_{r\theta} &= c_1 r^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{4}\left(\sin\frac{\theta}{2}+\sin\frac{3\theta}{2}\right)+d_1 r^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{4}\left(\cos\frac{\theta}{2}+3\cos\frac{3\theta}{2}\right)
\end{aligned}\right\}$$

(3-41)

令

$$K_{\mathrm{I}} = c_1\sqrt{2\pi}, \qquad K_{\mathrm{II}} = d_1\sqrt{2\pi} \tag{3-42}$$

则式(3-41)可以改写为

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= \frac{1}{4}K_{\mathrm{I}}\sqrt{\frac{1}{2\pi r}}\left(5\cos\frac{\theta}{2}-\cos\frac{3\theta}{2}\right)- \\
&\quad \frac{1}{4}K_{\mathrm{II}}\sqrt{\frac{1}{2\pi r}}\left(5\sin\frac{\theta}{2}-3\sin\frac{3\theta}{2}\right) \\
\sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{4}K_{\mathrm{I}}\sqrt{\frac{1}{2\pi r}}\left(3\cos\frac{\theta}{2}+\cos\frac{3\theta}{2}\right)- \\
&\quad \frac{1}{4}K_{\mathrm{II}}\sqrt{\frac{1}{2\pi r}}\left(3\sin\frac{\theta}{2}+3\sin\frac{3\theta}{2}\right) \\
\sigma_{r\theta} &= \frac{1}{4}K_{\mathrm{I}}\sqrt{\frac{1}{2\pi r}}\left(\sin\frac{\theta}{2}+\sin\frac{3\theta}{2}\right)+ \\
&\quad \frac{1}{4}K_{\mathrm{II}}\sqrt{\frac{1}{2\pi r}}\left(\cos\frac{\theta}{2}+3\cos\frac{3\theta}{2}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{3-43}$$

上式给出极坐标系应力分量裂尖近场解。K_{I} 与 K_{II} 分别表示Ⅰ型与Ⅱ型应力强度因子。

3.3 应力强度因子的边界配位解法

3.3.1 裂纹以外的边界条件

应力分量表达式(3-40)中的系数 c_n 与 d_n 中包含与应力强度因子直接相关的 c_1 与 d_1，需由裂纹以外边界条件确定。对于有限大板，这种边界条件不能精确满足。边界配位法可使这种边界条件近似得到满足。

首先，建立分布外力形式的边界条件，设边界单位弧长的外力



分量为 T_x 与 T_y。边界上外法线 ν 的方向余弦为 l_x 与 l_y，则

$$l_x = \cos(\nu, x), \qquad l_y = \cos(\nu, y) \tag{3-44}$$

裂纹表面以外的静力边界条件为

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{xx} l_x + \sigma_{xy} l_y &= T_x \\ \sigma_{xy} l_x + \sigma_{yy} l_y &= T_y \end{aligned}\right\} \tag{3-45}$$

如图 3－3 所示。

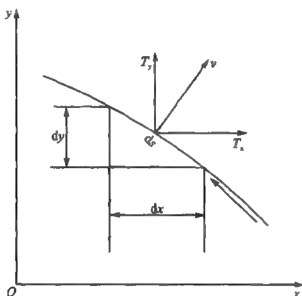


图 3－3　分布外力形式的边界条件

将式(3－2)代人式(3－45)，并考虑到

$$l_x = \frac{\partial y}{\partial s}, \qquad l_y = -\frac{\partial x}{\partial s} \tag{3-46}$$

应用复合函数求导法则，有

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right) &= T_x \\ -\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right) &- T_y \end{aligned}\right\} \tag{3-47}$$

为使边界条件表达式适用于集中外力的情况，下面建立集中外力形式的边界条件。边界 PQ 段的合力分量 R_x 与 R_y 分别为



$$\left.\begin{aligned} R_x &= \int_P^Q T_x \mathrm{d}s \\ R_y &= \int_P^Q T_y \mathrm{d}s \end{aligned}\right\} \tag{3-48}$$

如图 3-4 所示。将式(3-47)代入式(3-48),可知

$$\left.\begin{aligned} R_x &= \left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)_Q - \left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)_P \\ R_y &= -\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_Q + \left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_P \end{aligned}\right\} \tag{3-49}$$

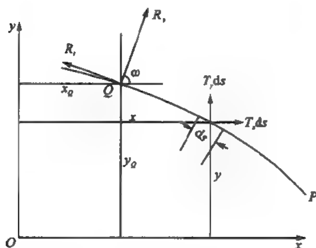


图 3-4 合力形式的边界条件

调节应力函数表达式(3-36)中的 A_0,B_0 与 C_0,使

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_P &= 0 \\ \left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)_P &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{3-50}$$

则式(3-49)变成

$$\left.\begin{aligned} R_x &= \left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)_Q \\ R_y &= -\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_Q \end{aligned}\right\} \tag{3-51}$$



还可以将式(3－51)改写成为更加简便的形式。将边界上 PQ 段的合力分量 R_x 与 R_y 向着边界在点 Q 的外法线 ν 与切线 t 方向投影，并得到合力分量 R_ν 与 R_t 如下：

$$\left.\begin{aligned} R_\nu &= R_x \cos(\nu_Q, x) + R_y \cos(\nu_Q, y) \\ R_t &= -R_x \cos(\nu_Q, y) + R_y \cos(\nu_Q, x) \end{aligned}\right\} \tag{3-52}$$

将式(3－51)代入式(3－52)，并考虑到下式

$$\left.\begin{aligned} \cos(\nu_Q, x) &= \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial x}{\partial \nu} \\ \cos(\nu_Q, y) &= -\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial y}{\partial \nu} \end{aligned}\right\} \tag{3-53}$$

则由复合函数求导法则，可知

$$R_\nu = \frac{\partial A}{\partial s} \tag{3-54}$$

$$R_t = -\frac{\partial A}{\partial \nu} \tag{3-55}$$

进一步，建立边界上 PQ 段分布外力对于点 Q 的力矩 M_Q 的表达式，有

$$M_Q = \int_P^Q \{T_y(x - x_Q) - T_x(y - y_Q)\} \mathrm{d}s \tag{3-56}$$

经过分部积分，上式变为

$$\begin{aligned} M_Q = {} & (x - x_Q)\int_P^S T_y \mathrm{d}s \Big|_P^Q - (y - y_Q)\int_P^S T_x \mathrm{d}s \Big|_P^Q - \\ & \int_P^Q \left[\left(\int_P^S T_y \mathrm{d}s\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} - \left(\int_P^S T_x \mathrm{d}s\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right]\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{3-57}$$

将式(3－48)与式(3－51)代入式(3－57)，有

$$M_Q = -\int_P^Q \left(-\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} - \frac{\partial A}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}s \tag{3-58}$$

积分上式，可得

$$M_Q = A_Q - A_P \tag{3-59}$$

调节应力函数表达式中的 A_0，B_0 与 C_0，使

$$A_P = 0 \tag{3-60}$$



于是

$$M_Q = A_Q \tag{3-61}$$

至此，裂纹以外的边界条件可由式(3－55)与式(3－61)表示；另外，还有以式(3－50)以及式(3－60)表示的三个附加条件。

3.3.2 应力强度因子的边界配位解法

为了根据以上边界条件与附加的简化条件确定应力函数 A 中与应力强度因子直接相关的待定系数 c_1 和 d_1，列出应力函数及其一阶偏导函数的表达式。由式(3－36)，可知

$$A = \sum_n c_n r^{\frac{n}{2}+1} f_n(\theta) + \sum_n d_n r^{\frac{n}{2}+1} g_n(\theta) + A_0 r\cos\theta + B_0 r\sin\theta + C_0 \tag{3-62}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} f_n(\theta) &= \cos\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta + \alpha_n\cos\left(\frac{n}{2}+1\right)\theta \\ \theta_n(\theta) &= \sin\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta + \beta_n\sin\left(\frac{n}{2}+1\right)\theta \end{aligned}\right\} \tag{3-63}$$

根据复合函数求导法则，有

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial x} &= \frac{\partial A}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial A}{\partial y} &= \frac{\partial A}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} \end{aligned}\right\} \tag{3-64}$$

$$\frac{\partial A}{\partial \nu} = \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \nu} + \frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \nu} \tag{3-65}$$

由图 3－4，可见

$$\frac{\partial x}{\partial \nu} = \cos\omega, \qquad \frac{\partial y}{\partial \nu} = \sin\omega \tag{3-66}$$

由式(3－4)，可知



$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial x}&=\cos\theta, & \frac{\partial\theta}{\partial x}&=-\frac{1}{r}\sin\theta\\ \frac{\partial r}{\partial y}&=\sin\theta, & \frac{\partial\theta}{\partial y}&=\frac{1}{r}\cos\theta\end{aligned}\right\}\tag{3-67}$$

将式(3－62)代入式(3－64)与式(3－65)，并考虑到式(3－66)与式(3－67)，可将应力函数 A 对 x，y 与 ν 的三个偏导函数写成如下形式：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial x}&=\sum_{n=1}^{N}c_n\gamma_{xn}(r,\theta)+\sum_{n=1}^{N}d_n\delta_{xn}(r,\theta)+A\\ \frac{\partial A}{\partial y}&=\sum_{n=1}^{N}c_n\gamma_{yn}(r,\theta)+\sum_{n=1}^{N}d_n\delta_{yn}(r,\theta)+B\end{aligned}\right\}\tag{3-68}$$

$$\frac{\partial A}{\partial\nu}=\sum_{n=1}^{N}c_n\gamma_{vn}(r,\theta)+\sum_{n=1}^{N}d_n\delta_{vn}(r,\theta)+A\cos\omega+B\sin\omega\tag{3-69}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}\gamma_{xn}(r,\theta)&=r^{\frac{n}{2}}\left[\left(\frac{n}{2}+1\right)f_n(\theta)\cos\theta-f'_n(\theta)\sin\theta\right]\\ \delta_{xn}(r,\theta)&=r^{\frac{n}{2}}\left[\left(\frac{n}{2}+1\right)g_n(\theta)\cos\theta-g'_n(\theta)\sin\theta\right]\\ \gamma_{yn}(r,\theta)&=r^{\frac{n}{2}}\left[\left(\frac{n}{2}+1\right)f_n(\theta)\sin\theta+f'_n(\theta)\cos\theta\right]\\ \delta_{yn}(r,\theta)&=r^{\frac{n}{2}}\left[\left(\frac{n}{2}+1\right)g_n(\theta)\sin\theta+g'_n(\theta)\cos\theta\right]\end{aligned}\right\}\tag{3-70}$$

$$\left.\begin{aligned}\gamma_{vn}&=r^{\frac{n}{2}}\left[\left(\frac{n}{2}+1\right)f_n(\theta)\cos(\theta-\omega)-f'_n(\theta)\sin(\theta-\omega)\right]\\ \delta_{vn}&=r^{\frac{n}{2}}\left[\left(\frac{n}{2}+1\right)g_n(\theta)\cos(\theta-\omega)-g'_n(\theta)\sin(\theta-\omega)\right]\end{aligned}\right\}\tag{3-71}$$

同时，应力函数 A 本身亦可写成如下简单形式：



$$A = \sum_{n=1}^{N} c_n \gamma_n(r,\theta) + \sum_{n=1}^{N} d_n \delta_n(r,\theta) + A_0 x + B_0 y + C_0 \tag{3-72}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} \gamma_n(r,\theta) &= r^{\frac{n}{2}+1} f_n(\theta) \\ \delta_n(r,\theta) &= r^{\frac{n}{2}+1} g_n(\theta) \end{aligned}\right\} \tag{3-73}$$

现在，共有 $2N+3$ 个特定常数，即 $c_1, d_1, \cdots, c_i, d_i, \cdots, c_N, d_N$ 以及 A_0, B_0, C_0。为了确定这些常数，在裂纹以外的边界上选取 $N+1$ 个点，它们是定点 P 与动点 $Q_1, \cdots, Q_i, \cdots, Q_N$。这些点的极坐标分别为 $(r_0, \theta_0), (r_1, \theta_1), \cdots, (r_i, \theta_i), \cdots, (r_N, \theta_N)$。从点 Q_1 至点 Q_N，主向量分量与主矩分别为 $R_{i1}, \cdots, R_{ii}, \cdots, R_{iN}$ 与 $M_1, \cdots, M_i, \cdots, M_N$。于是，考虑到式(3-68)与式(3-72)，可将附加简化条件式(3-50)与式(3-60)写成如下形式：

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{N} c_n \gamma_n(r_0,\theta_0) + \sum_{n=1}^{N} d_n \delta_n(r_0,\theta_0) + A_0 x_0 + B_0 y_0 + C_0 = 0 \\ &\sum_{n=1}^{N} c_n \gamma_{xn}(r_0,\theta_0) + \sum_{n=1}^{N} d_n \delta_{xn}(r_0,\theta_0) + A_0 = 0 \\ &\sum_{n=1}^{N} c_n \gamma_{yn}(r_0,\theta_0) + \sum_{n=1}^{N} d_n \delta_{yn}(r_0,\delta_0) + B_0 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3-74}$$

进一步，考虑到式(3-69)与式(3-72)，可将主向量与主矩形式的边界条件写成如下形式：

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{N} c_n \gamma_{sn}(r_i,\theta_i) + \sum_{n=1}^{N} d_n \delta_{sn}(r_i,\theta_i) + \\ &\qquad A_0 \cos\omega_i + B_0 \sin\omega_i = -R_{ii} \\ &\sum_{n=1}^{N} c_n \gamma_n(r_i,\theta_i) + \sum_{n=1}^{N} d_n \delta_n(r_i,\theta_i) + \\ &\qquad A_0 x_i + B_0 y_i + C_0 = M_i \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, \cdots, N) \tag{3-75}$$



这样，共有 $2N+3$ 个方程，以确定 $2N+3$ 个特定常数。在此基础上，即可由式(3-42)确定应力强度因子 K_{I} 与 K_{II}。

3.4 标准试样应力强度因子的表达式

3.4.1 三点弯曲试样

图 3-5 表示一个三点弯曲试样。这种试样经常用于材料的抗断裂性能测试。可采用边界配位方法求解它们的应力强度因子。

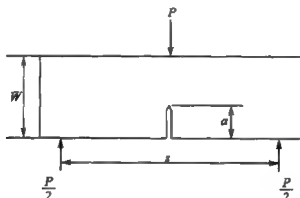


图 3-5 三点弯曲试样

这种试样的边界配位情况示于图 3-6。

应当指出，在选用边界配位方法计算应力强度因子时，需要进行收敛性验证，即不断地增加配点个数，缩短相邻配点距离，直至得到应力强度因子的稳定值。

为了便于应用，可以将在不同量纲为 1 的几何尺寸下所得量纲为 1 的应力强度因子结果拟合成为经验公式的形式。对于三点弯曲试样，这个经验公式为

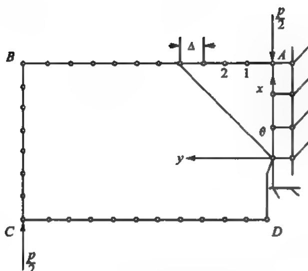


图 3-6　三点弯曲试样的边界配位图

$$\frac{K_{\mathrm{I}} BW^{\frac{3}{2}}}{M} = \left(7.30 + 0.21\sqrt{\frac{s}{W} - 2.9}\right)\sec\left(\frac{\pi a}{2W}\right)\sqrt{\tan\left(\frac{\pi a}{2W}\right)} \tag{3-76}$$

式中，s 为试样两个支点的距离（跨长）；W 为试样的高度；B 为试样的厚度；a 为裂纹深度；M 为将该试样视为简支梁时作用在中间截面的最大弯矩。显然有

$$M = \frac{1}{4}Ps \tag{3-77}$$

式中，P 为作用在该梁中间截面上方的集中力。

与数值结果相比较，式(3-76)在 $0.4 < a/W < 0.6$ 范围内的误差小于 0.5%。

3.4.2　紧凑拉伸试样

图 3-7 表示一个紧凑拉伸试样。这种试样也经常用于材料抗断裂性能测试。



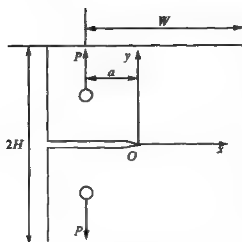


图 3-7　紧凑拉伸试样

这种试样的应力强度因子也可由边界配位方法得到，但要建立它们的简化力学模型。这是因为目前通用的边界配位方法是建立在根据分离变量方法所得应力函数通解基础之上的。这一通解只适用于含有边缘裂纹的单连通域。实际上，紧凑拉伸试件是受钉传载荷的复连通域。为此，通过两个钉孔中心作一个截面，将试件切开，保存包含裂纹尖端的右边部分，并将上、下两个半圆形缺口填平，然后在该截面的上、下两部分上按梁的切应力公式施加分布剪切载荷 q 代替原来的钉传载荷 P，如图 3-8 所示。这就是紧凑拉伸试件的力学模型。

上述剪切载荷 q 可由材料力学的公式表示为

$$q=\frac{P}{IB}\left[\frac{1}{4}H^2-\left(\frac{1}{2}H-y\right)^2\right] \tag{3-78}$$

式中，B 为试件厚度；I 为单个截面的轴惯矩。

$$I=\frac{1}{12}BH^3 \tag{3-79}$$

现在，给出根据边界配位法计算结果拟合所得量纲为 1 的应力强度因子的两个表达式：

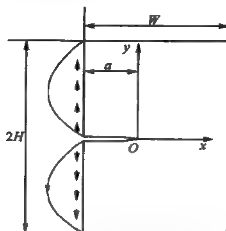


图 3-8 紧凑拉伸试样力学模型

$$K_{\mathrm{I}}\frac{BW^{\frac{1}{2}}}{P}=1.463\left(1.718+\frac{a}{W}\right)\left(1-\frac{a}{W}\right)^{-1},\qquad \frac{H}{W}\geqslant 1 \tag{3-80}$$

$$K_{\mathrm{I}}\frac{BW^{\frac{1}{2}}}{P}=29.6\left(\frac{a}{W}\right)^{\frac{1}{2}}-185.5\left(\frac{a}{W}\right)^{\frac{3}{2}}+655.7\left(\frac{a}{W}\right)^{\frac{5}{2}}-1\,017\left(\frac{a}{W}\right)^{\frac{7}{2}}+638.9\left(\frac{a}{W}\right)^{\frac{9}{2}},\qquad \frac{H}{W}=0.6 \tag{3-81}$$

参考文献

[3.1] 张行,方汝瑢,刘森,等.高等弹性理论.北京:北京航空航天大学出版社,1994.

[3.2] 张行,崔德渝,刘森.断裂力学.北京:宇航出版社,1990.

[3.3] 范天佑.断裂力学基础.南京:江苏科学技术出版社,1978.

[3.4] 王铎.断裂力学.上册.哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,1987.

第4章 二维应力强度因子的解析变分解法——各向同性板

在第3章中，介绍了应力强度因子的边界配位解法。这个方法的优点在于容易形成线性代数方程组的系数矩阵。但是，这个方法具有以下缺点：首先，在边界节点配位方面，缺少理论基础，即不能根据外力分布状况调整节点布局；其次，在由分离变量方法获得通解的基础上，无法解决复连通域的问题，因此在求解紧凑拉伸试件应力强度因子时，只能极其粗糙地将复连通域简化为单连通域。

基于以上原因，本书作者提出了二维应力强度因子的解析变分解法。

4.1 各向同性平面问题位移法支配方程及其通解

4.1.1 平面问题位移法支配方程

在平面应变问题中，应变分量 ε_{ij} 与位移分量 u_i 具有如下几何关系：

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \qquad (i,j = 1,2) \qquad (4-1)$$

对于各向同性材料，应力分量 σ_{ij} 与应变分量 ε_{ij} 具有如下本构关系：



$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \delta_{ij}\lambda\delta_{mn}\varepsilon_{mn} \qquad (i,j = 1,2) \tag{4-2}$$

式中，λ 与 μ 为拉梅(Lamé)常数。在没有体力的情况下，应力分量具有以下平衡关系：

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \qquad (i,j = 1,2) \tag{4-3}$$

将式(4－1)代入式(4－2)，再将所得结果代入式(4－3)，可得以位移分量表示的平衡方程如下：

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \mu\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = 0 \qquad (i,j = 1,2) \tag{4-4}$$

令

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{i}_1 u_1 + \boldsymbol{i}_2 u_2 \tag{4-5}$$

$$\nabla_1 = \boldsymbol{i}_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \boldsymbol{i}_2\frac{\partial}{\partial x_2} \tag{4-6}$$

$$\nabla_1^2 = \nabla_1 \cdot \nabla_1 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \tag{4-7}$$

则可将式(4－4)写成如下矢量形式：

$$(\lambda + \mu)\nabla_1(\nabla_1 \cdot \boldsymbol{u}) + \mu\nabla_1^2\boldsymbol{u} = 0 \tag{4-8}$$

对于广义平面应力问题，引入位移矢量 $\boldsymbol{u}$ 沿板厚 $2h$ 的平均值 $\boldsymbol{u}^*$：

$$\boldsymbol{u}^* = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}z \tag{4-9}$$

则可得到类似于平面应变的平衡方程：

$$(\lambda^* + \mu)\nabla_1(\nabla_1 \cdot \boldsymbol{u}^*) + \mu\nabla_1^2\boldsymbol{u}^* = 0 \tag{4-10}$$

式中，$\lambda^* = 2\lambda\mu/(\lambda + 2u)$。

4.1.2 支配方程的复变函数通解

引入复变量 z 及其共轭量 $\bar{z}$，即

$$z = x_1 + \mathrm{i}x_2, \qquad \bar{z} = x_1 - \mathrm{i}x_2 \tag{4-11}$$



并定义以下复位移 D：

$$D = u_1 + \mathrm{i}u_2 \tag{4-12}$$

则利用下式

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \qquad \frac{\partial}{\partial x_2} = \mathrm{i}\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) \tag{4-13}$$

可将式(4-8)改写如下：

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left[2(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial D}{\partial z} + \frac{\partial \overline{D}}{\partial \bar{z}}\right) + 4\mu\frac{\partial D}{\partial \bar{z}}\right] = 0 \tag{4-14}$$

将式(4-14)对 $\bar{z}$ 进行偏积分，有

$$2(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial D}{\partial z} + \frac{\partial \overline{D}}{\partial \bar{z}}\right) + 4\mu\frac{\partial D}{\partial z} = \theta'(z) \tag{4-15}$$

式中，$\theta'(z)$为积分函数。式(4-15)的共轭式为

$$2(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial \overline{D}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial D}{\partial z}\right) + 4\mu\frac{\partial \overline{D}}{\partial \bar{z}} = \overline{\theta'(z)} \tag{4-16}$$

将式(4-15)和式(4-16)相加与相减，可得$\partial D/\partial z$ 的实部与虚部如下：

$$4(\lambda+2\mu)\mathrm{Re}\left(\frac{\partial D}{\partial z}\right) = \frac{1}{2}\left[\theta'(z) + \overline{\theta'(z)}\right] \tag{4-17}$$

$$4\mu\mathrm{Im}\left(\frac{\partial D}{\partial z}\right) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\theta'(z) - \overline{\theta'(z)}\right] \tag{4-18}$$

由此可得

$$8\mu(\lambda+2\mu)\frac{\partial D}{\partial z} = (\lambda+3\mu)\theta'(z) - (\lambda+\mu)\overline{\theta'(z)} \tag{4-19}$$

将式(4-19)对 z 进行偏积分，有

$$8\mu(\lambda+2\mu)D = (\lambda+3\mu)\theta(z) - (\lambda+\mu)z\overline{\theta'(z)} + \overline{\eta(z)} \tag{4-20}$$

式中，$\overline{\eta(z)}$亦为积分函数。如果设

$$\theta(z) = \frac{4(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}\varphi(z) \tag{4-21}$$

$$\eta(z) = -4(\lambda+2\mu)\psi(z) \tag{4-22}$$

则式(4-20)可以改写为

$$2\mu D = \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} \tag{4-23}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} \kappa &= \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} = 3 - 4\nu \quad (\text{平面应变}) \\ \kappa &= \frac{\lambda^* + 3\mu}{\lambda^* + \mu} = \frac{3 - \nu}{1 + \nu} \quad (\text{平面应力}) \end{aligned}\right\} \tag{4-24}$$

由式(4-1)与式(4-2),可知

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = 2(\lambda + \mu)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) \tag{4-25}$$

$$\sigma_{11} - \sigma_{22} + 2\mathrm{i}\sigma_{12} = 2\mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + \mathrm{i}2\mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) \tag{4-26}$$

考虑到式(4-12)与式(4-13),可将式(4-25)和式(4-26)改写为

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = 2(\lambda + \mu)\left(\frac{\partial D}{\partial z} + \overline{\frac{\partial D}{\partial z}}\right) \tag{4-27}$$

$$\sigma_{11} - \sigma_{22} + 2\mathrm{i}\sigma_{12} = 4\mu\frac{\partial D}{\partial \bar{z}} \tag{4-28}$$

将式(4-23)代入式(4-27)和式(4-28),有

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] \tag{4-29}$$

$$\sigma_{11} - \sigma_{22} + 2\mathrm{i}\sigma_{12} = -2[z\overline{\varphi''(z)} + \overline{\psi'(z)}] \tag{4-30}$$

令

$$\left.\begin{aligned} &x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad u_1 = u_x, \quad u_2 = u_y \\ &\sigma_{11} = \sigma_{xx}, \quad \sigma_{22} = \sigma_{yy}, \quad \sigma_{12} = \sigma_{xy} \end{aligned}\right\} \tag{4-31}$$

则式(4-20)、式(4-29)与式(4-30)分别变为

$$2\mu(u_x + \mathrm{i}u_y) = \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} \tag{4-32}$$

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] \tag{4-33}$$

$$\sigma_{yy} - \sigma_{xx} - 2\mathrm{i}\sigma_{xy} = 2[z\overline{\varphi''(z)} + \overline{\psi'(z)}] \tag{4-34}$$



4.2　含边缘裂纹有限大板的解析变分解法

4.2.1　满足裂纹表面边界条件的解答

由图 4-1,在裂纹的上、下表面,有

$$\sigma_{yy}^{(+)}=0,\qquad \sigma_{yx}^{(+)}=0 \tag{4-35}$$

$$\sigma_{yy}^{(-)}=0,\qquad \sigma_{yx}^{(-)}=0 \tag{4-36}$$

式中,(+)与(-)分别表示裂纹上、下表面。

由式(4-35)与式(4-36),可知边界条件只与 σ_{yy} 和 σ_{yx} 有关。为此,将式(4-33)与式(4-34)相加,以消去 σ_{xx}。结果为

$$\sigma_{yy}-\mathrm{i}\sigma_{yx}=\varphi'(z)+\overline{\varphi'(z)}+z\,\overline{\varphi''(z)}+\overline{\psi'(z)} \tag{4-37}$$

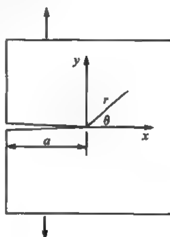


图 4-1　含边缘裂纹的有限大板

为了简化边界条件的表达式,引入以下辅助函数 $\Omega(z)$,即

$$\Omega(z)=z\varphi'(z)+\psi(z) \tag{4-38}$$

于是,式(4-37)变成以下形式:

$$\sigma_{yy}-\mathrm{i}\sigma_{yx}=\varphi'(z)+\overline{\Omega'(z)}+(z-\bar{z})\,\overline{\varphi''(z)} \tag{4-39}$$

进一步,在裂纹表面上,有

$$z-\bar{z}=0 \tag{4-40}$$

令 t 表示 z 与 $\bar{z}$ 在 x 轴上的值,将边界条件式(4-35)与式(4-36)代入式(4-39),可知

$$\varphi'(t)^{(+)}+\overline{\Omega}'(t)^{(-)}=0 \tag{4-41}$$

$$\varphi'(t)^{(-)}+\overline{\Omega}'(t)^{(+)}=0 \tag{4-42}$$



式中，$P(t)^{(+)}$ 与 $P(t)^{(-)}$ 分别为当 z 趋向裂纹上、下表面时 $P(z)$ 的极限值。

将式(4-41)与式(4-42)相减与相加，分别得到

$$[\varphi'(t)-\overline{\Omega}'(t)]^{(+)}=[\varphi'(t)-\overline{\Omega}'(t)]^{(-)} \tag{4-43}$$

$$[\varphi'(t)+\overline{\Omega}'(t)]^{(+)}=-[\varphi'(t)+\overline{\Omega}'(t)]^{(-)} \tag{4-44}$$

式(4-43)和式(4-44)表明，当 z 掠过裂纹表面时，函数$[\varphi'(z)-\overline{\Omega}'(z)]$是连续的，而函数$[\varphi'(z)+\overline{\Omega}'(z)]$是反对称间断的。于是，这两个函数可以写成

$$\varphi'(z)-\overline{\Omega}'(z)=2g(z)=2\sum_{n=0}^{N}G_n z^n \tag{4-45}$$

$$\varphi'(z)+\overline{\Omega}'(z)=2z^{-\frac{1}{2}}f(z)=2z^{-\frac{1}{2}}\sum_{m=0}^{M}F_m z^m \tag{4-46}$$

在式(4-45)和式(4-46)中，$f(z)$与 $g(z)$均为连续函数，均可由幂函数项级数表示。级数的系数 F_m 与 G_n 是待定的，一般均为复常数，可分为实部与虚部：

$$F_m=F_m^{(R)}+iF_m^{(I)} \tag{4-47}$$

$$G_n=G_n^{(R)}+iG_n^{(I)} \tag{4-48}$$

下面证明式(4-46)满足式(4-44)提出的反对称间断要求。将复变量 z 写成极坐标形式：

$$z=re^{i\theta}=r(\cos\theta+i\sin\theta) \tag{4-49}$$

于是

$$z^{-\frac{1}{2}}=r^{-\frac{1}{2}}e^{-i\frac{\theta}{2}}=r^{-\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}-i\sin\frac{\theta}{2}\right) \tag{4-50}$$

在裂纹上表面，$\theta=\pi$，且

$$z^{-\frac{1}{2}}=-r^{-\frac{1}{2}}i \tag{4-51}$$

在裂纹下表面，$\theta=-\pi$，且

$$z^{-\frac{1}{2}}=r^{-\frac{1}{2}}i \tag{4-52}$$

故式(4-46)满足了式(4-44)提出的反对称间断要求。

由式(4-45)与式(4-46)，可知



$$\varphi'(z) = z^{-\frac{1}{2}} f(z) + g(z) \tag{4-53}$$

$$\overline{\Omega'}(z) = z^{-\frac{1}{2}} f(z) - g(z) \tag{4-54}$$

式中

$$f(z) = \sum_{m=0}^{M} F_m z^m \tag{4-55}$$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{N} G_n z^n \tag{4-56}$$

4.2.2 含边缘裂纹板的应力场

由式(4-38),可将式(4-33)与式(4-34)改写如下:

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] \tag{4-57}$$

$$\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2\mathrm{i}\sigma_{xy} = 2[\Omega'(z) - \varphi'(z) - (z - \bar{z})\varphi''(z)] \tag{4-58}$$

由式(4-53)至式(4-56),可知

$$\Omega'(z) = z^{-\frac{1}{2}} \sum_{m=0}^{M} \overline{F}_m z^m - \sum_{n=0}^{N} \overline{G}_n z^n \tag{4-59}$$

$$\varphi'(z) = z^{-\frac{1}{2}} \sum_{m=0}^{M} F_m z^m + \sum_{n=0}^{N} G_n z^n \tag{4-60}$$

将式(4-59)和式(4-60)代入式(4-57)与式(4-58),可得

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 2\left(z^{-\frac{1}{2}} \sum_{m=0}^{M} F_m z^m + \bar{z}^{-\frac{1}{2}} \sum_{m=0}^{M} \overline{F}_m \bar{z}^m + \sum_{n=0}^{N} G_n z^n + \sum_{n=0}^{N} \overline{G}_n \bar{z}^n\right) \tag{4-61}$$

$$\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2\mathrm{i}\sigma_{xy} = 2\left\{z^{-\frac{1}{2}} \sum_{m=0}^{M} (\overline{F}_m - F_m) z^m - \sum_{n=0}^{N} (\overline{G}_n + G_n) z^n - (z - \bar{z})\left[\sum_{m=0}^{M} \left(m - \frac{1}{2}\right) F_m z^{m-\frac{3}{2}} + \sum_{n=0}^{N} n G_n z^{n-1}\right]\right\} \tag{4-62}$$

为简单起见，取 $M=N$，并引入极坐标

$$\left.\begin{aligned} z &= re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ \bar{z} &= re^{-i\theta} = r(\cos\theta - i\sin\theta) \end{aligned}\right\} \tag{4-63}$$

$$\left.\begin{aligned} z^{n} &= r^{n}e^{in\theta} = r^{n}(\cos n\theta + i\sin n\theta) \\ z^{-n} &= r^{-n}e^{-in\theta} = r^{-n}(\cos n\theta - i\sin n\theta) \end{aligned}\right\} \tag{4-64}$$

经分离实部与虚部，可得含边缘裂纹有限大板全场应力表达式：

$$\sigma_{ij} = 2\sum_{n=0}^{N} r^{n-\frac{1}{2}}\left[F_n^{(R)} f_{nij}^{(R)}(\theta) + F_n^{(I)} f_{nij}^{(I)}(\theta)\right] + 2\sum_{n=0}^{N} r^{n}\left[G_n^{(R)} g_{nij}^{(R)}(\theta) + G_n^{(I)} g_{nij}^{(I)}(\theta)\right] \tag{4-65}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}
f_{n11}^{(R)}(\theta) &= \cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta - \left(n-\frac{1}{2}\right)\sin\theta\sin\left(n-\frac{3}{2}\right)\theta \\
f_{n11}^{(I)}(\theta) &= -\left[2\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta + \left(n-\frac{1}{2}\right)\sin\theta\cos\left(n-\frac{3}{2}\right)\theta\right] \\
g_{n11}^{(R)}(\theta) &= 2\cos n\theta - n\sin\theta\sin(n-1)\theta \\
g_{n11}^{(I)}(\theta) &= -\left[\sin n\theta + n\sin\theta\cos(n-1)\theta\right] \\
f_{n22}^{(R)}(\theta) &= \cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta + \left(n-\frac{1}{2}\right)\sin\theta\sin\left(n-\frac{3}{2}\right)\theta \\
f_{n22}^{(I)}(\theta) &= \left(n-\frac{1}{2}\right)\sin\theta\cos\left(n-\frac{3}{2}\right)\theta \\
g_{n22}^{(R)}(\theta) &= n\sin\theta\sin(n-1)\theta \\
g_{n22}^{(I)}(\theta) &= -\sin n\theta + n\sin\theta\cos(n-1)\theta \\
f_{n21}^{(R)}(\theta) &= -\left(n-\frac{1}{2}\right)\sin\theta\cos\left(n-\frac{3}{2}\right)\theta \\
f_{n21}^{(I)}(\theta) &= -\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta + \left(n-\frac{1}{2}\right)\sin\theta\sin\left(n-\frac{3}{2}\right)\theta \\
g_{n21}^{(R)}(\theta) &= -\left[\sin n\theta + n\sin\theta\cos(n-1)\theta\right] \\
g_{n21}^{(I)}(\theta) &= n\sin\theta\sin(n-1)\theta
\end{aligned}\right\} \tag{4-66}$$



式(4-66)被称为应力分量的角分布函数。

由式(4-65)可知：当 $r\to0$ 时，在等式右边的第一个和式中，所有 $n\neq0$ 的项均趋于零；在第二个和式中，所有的项均趋于零。于是，在裂纹尖端附近，可得近场应力表达式如下：

$$\sigma_y = 2r^{-\frac{1}{2}}\left[F_0^{(R)} f_{0y}^{(R)}(\theta) + F_0^{(I)} f_{0y}^{(I)}(\theta)\right] \tag{4-67}$$

令

$$K_{\mathrm{I}} = 2\sqrt{2\pi}F_0^{(R)} \tag{4-68}$$

$$K_{\mathrm{II}} = -2\sqrt{2\pi}F_0^{(I)} \tag{4-69}$$

并考虑到式(4-66)，可将式(4-67)改写如下：

$$\sigma_{xx} = \sqrt{\frac{1}{2\pi r}}\left[K_{\mathrm{I}}\cos\frac{1}{2}\theta\left(1-\sin\frac{1}{2}\theta\sin\frac{3}{2}\theta\right) - K_{\mathrm{II}}\sin\frac{1}{2}\theta\left(2+\cos\frac{1}{2}\theta\cos\frac{3}{2}\theta\right)\right] \tag{4-70}$$

$$\sigma_{yy} = \sqrt{\frac{1}{2\pi r}}\left[K_{\mathrm{I}}\cos\frac{1}{2}\theta\left(1+\sin\frac{1}{2}\theta\sin\frac{3}{2}\theta\right) + K_{\mathrm{II}}\cos\frac{1}{2}\theta\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{3}{2}\theta\right] \tag{4-71}$$

$$\sigma_{yx} = \sqrt{\frac{1}{2\pi r}}\left[K_{\mathrm{I}}\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta\cos\frac{3}{2}\theta + K_{\mathrm{II}}\cos\frac{1}{2}\theta\left(1-\sin\frac{1}{2}\theta\sin\frac{3}{2}\theta\right)\right] \tag{4-72}$$

式(4-70)、式(4-71)与式(4-72)表明，当 $r\to0$ 时，$\sigma_{ij}\to\infty$。故在式(4-65)中，$n=0$ 的项称为奇异项，裂纹尖端为奇异点。应力分量在裂纹尖端具有－(1/2)次方阶次的奇异性，在裂纹尖端附近，只需在式(4-65)中考虑奇异项，但是在远离裂纹尖端的地方，这一结论就不成立了。故式(4-70)、式(4-71)与式(4-72)称为近场应力表达式。这三个表达式指出：与 K_{I} 相关的应力场是关于裂纹及其延长线为对称的；与 K_{II} 相关的应力场是关于裂纹及其延长线为反对称的。故 K_{I} 被称为平面张开型应力强度因子，

或Ⅰ型应力强度因子；而 K_{II} 被称为平面剪切型应力强度因子，或Ⅱ型应力强度因子。

K_{I} 与 K_{II} 亦可表示成复变函数的形式。根据式(4-68)与式(4-69)，有

$$K_{\mathrm{I}} - \mathrm{i}K_{\mathrm{II}} = 2\sqrt{2\pi}F_0 \tag{4-73}$$

进一步，由式(4-53)、式(4-55)与式(4-56)，可知

$$z^{\frac{1}{2}}\varphi'(z) = \sum_{n=0}^{N} F_n z^n + \sum_{n=0}^{N} G_n z^{n+\frac{1}{2}} \tag{4-74}$$

从而

$$\lim_{z\to 0} z^{\frac{1}{2}}\varphi'(z) = F_0 \tag{4-75}$$

对比式(4-73)与式(4-75)，可得

$$K_{\mathrm{I}} - \mathrm{i}K_{\mathrm{II}} = 2\sqrt{2\pi}\lim_{z\to 0} z^{\frac{1}{2}}\varphi'(z) \tag{4-76}$$

这就是应力强度因子的复变函数表达式。

4.2.3 含边缘裂纹板的位移场

考虑到式(4-38)，可将式(4-23)改写为

$$2\mu(u_x + \mathrm{i}u_y) = \kappa\varphi(z) - (z-\bar{z})\overline{\varphi'}(\bar{z}) - \bar{\Omega}(\bar{z}) \tag{4-77}$$

积分式(4-59)与式(4-60)，对 $\Omega(z)$ 与 $\varphi'(z)$ 进行全共轭运算，并将有关结果代入式(4-77)，可知

$$\begin{aligned}2\mu(u_x + \mathrm{i}u_y) = {} & \kappa\left(\sum_{n=0}^{N}\frac{F_n}{n+\frac{1}{2}}z^{n+\frac{1}{2}} + \sum_{n=0}^{N}\frac{G_n}{n+1}z^{n+1}\right) - \\ & (z-\bar{z})\left(\sum_{n=0}^{N}\bar{F}_n\bar{z}^{n-\frac{1}{2}} + \sum_{n=0}^{N}\bar{G}_n\bar{z}^{n}\right) - \\ & \sum_{n=0}^{N}\frac{F_n}{n+\frac{1}{2}}\bar{z}^{n+\frac{1}{2}} + \sum_{n=0}^{N}\frac{G_n}{n+1}\bar{z}^{n+1} + C\end{aligned} \tag{4-78}$$

式中，$C=A+\mathrm{i}B$ 为积分常数，代表刚体移动。



在式(4-78)中引入极坐标,并将其分离实部与虚部,有

$$2\mu u_t = \sum_{n=0}^{N} r^{n+\frac{1}{2}}\left[F_n^{(R)}s_{nt}^{(R)}(\theta) + F_n^{(I)}s_{nt}^{(I)}(\theta)\right] + \sum_{n=0}^{N} r^{n+1}\left[G_n^{(R)}t_{nt}^{(R)}(\theta) + G_n^{(I)}t_{nt}^{(I)}(\theta)\right] \tag{4-79}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}
s_{n1}^{(R)}(\theta) &= \frac{\kappa-1}{n+\frac{1}{2}}\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - 2\sin\theta\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta \\
s_{n1}^{(I)}(\theta) &= -\left[\frac{\kappa+1}{n+\frac{1}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta + 2\sin\theta\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta\right] \\
t_{n1}^{(R)}(\theta) &= \frac{\kappa+1}{n+1}\cos(n+1)\theta + 2\sin\theta\sin n\theta \\
t_{n1}^{(I)}(\theta) &= -\left[\frac{\kappa-1}{n+1}\sin(n+1)\theta + 2\sin\theta\cos n\theta\right] \\
s_{n2}^{(R)}(\theta) &= \frac{\kappa+1}{n+\frac{1}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - 2\sin\theta\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta \\
s_{n2}^{(I)}(\theta) &= \frac{\kappa-1}{n+\frac{1}{2}}\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta + 2\sin\theta\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta \\
t_{n2}^{(R)}(\theta) &= \frac{\kappa-1}{n+1}\sin(n+1)\theta - 2\sin\theta\cos n\theta \\
t_{n2}^{(I)}(\theta) &= \frac{\kappa+1}{n+1}\cos(n+1)\theta + 2\sin\theta\sin n\theta
\end{aligned}\right\} \tag{4-80}$$

由式(4-79)可知:当 $r\to 0$ 时,与第一个和式中 $n=0$ 的项相比,其余各项均为高阶小量。从而,考虑到式(4-68)与式(4-69),在裂纹尖端的附近,位移场的表达式为



$$u_x = \frac{1}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\Big[K_{\mathrm{I}}\cos\frac{1}{2}\theta\Big(\kappa - 1 + 2\sin^2\frac{1}{2}\theta\Big) +$$

$$K_{\mathrm{II}}\sin\frac{1}{2}\theta\Big(\kappa + 1 + 2\cos^2\frac{1}{2}\theta\Big)\Big] \tag{4-81}$$

$$u_y = \frac{1}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\Big[K_{\mathrm{I}}\sin\frac{1}{2}\theta\Big(\kappa + 1 - 2\cos^2\frac{1}{2}\theta\Big) -$$

$$K_{\mathrm{II}}\cos\frac{1}{2}\theta\Big(\kappa - 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}\theta\Big)\Big] \tag{4-82}$$

式(4－81)与式(4－82)表明：与 K_{I} 相关的位移场是关于裂纹及其延长线对称的；而与 K_{II} 相关的位移场是关于裂纹及其延长线反对称的。这两式还表明：在裂纹尖端附近，裂纹表面变为抛物面。

应当指出：式(4－79)给出了含边缘裂纹有限大板位移分量的全场表达式；式(4－81)与式(4－82)给出的则是该板位移分量的近场表达式。

上面给出了平板单元刚体线位移的表达式。下面建立刚体角位移的表达式。

由式(1—48)容易证明，单元刚体角位移为

$$\omega_z = \frac{\kappa+1}{4\mu \mathrm{i}}[\varphi'(z) - \overline{\varphi}'(\bar{z})] \tag{4-83}$$

将式(4－60)代人上式，有

$$\omega_z = \frac{\kappa+1}{2\mu}\Big\{\sum_{n=0}^{N} r^{n-\frac{1}{2}}[F_n^{(R)}\alpha_n^{(R)}(\theta) + F_n^{(I)}\alpha_n^{(I)}(\theta)] +$$

$$\sum_{n=0}^{N} r^n[G_n^{(R)}\beta_n^{(R)}(\theta) + G_n^{(I)}\beta_n^{(I)}(\theta)]\Big\} \tag{4-84}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} \alpha_n^{(R)}(\theta) &= \sin\Big(n - \frac{1}{2}\Big)\theta, \quad \alpha_n^{(I)}(\theta) = \cos\Big(n - \frac{1}{2}\Big)\theta \\ \beta_n^{(R)}(\theta) &= \sin n\theta, \quad \beta_n^{(I)}(\theta) = \cos n\theta \end{aligned}\right\} \tag{4-85}$$



显然，$G_0^{(1)}$ 代表板的总体刚性转动，故可令

$$G_0^{(1)} = 0 \tag{4-86}$$

4.2.4 以位移法为基础的总势能原理

前面给出了含边缘裂纹板的应力场与位移场的展开式。它们的每一项都满足几何方程、本构方程与平衡方程以及裂纹表面边界条件。展开式中的待定系数应由板的裂纹以外的边界条件确定。这种边界条件不可能被精确地满足。为此，引用势能原理近似满足这些边界条件。弹性系统的总势能 Π 被定义为

$$\Pi = \int_V W\mathrm{d}V - \int_V F_i u_i \mathrm{d}V - \int_{S_T} T_i u_i \mathrm{d}s \tag{4-87}$$

式中，W 为应变能密度；F_i 与 T_i 分别为体力与面力分量；V 为构件体积；S_T 为构件静力边界。

总势能原理表明：在位移边界条件、几何方程与本构关系预先得到满足的前提下，平衡方程和静力边界条件是等价于总势能极值条件的，即

$$\delta\Pi = 0 \tag{4-88}$$

下面证明这个原理。首先，给位移分量 u_i 以变分 δu_i。它满足以下位移边界条件：

$$\delta u_i = 0 \qquad (\text{在 } S_u \text{ 上}) \tag{4-89}$$

从而，应变分量 ε_{ij} 也将产生相应变分 $\delta\varepsilon_{ij}$。它们满足以下几何方程：

$$\delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\delta u_j}{\partial x_i}\right\} \tag{4-90}$$

因此，应变能密度 W 也会产生相应变分 δW，且

$$\delta W = \frac{\partial W}{\partial\varepsilon_{ij}}\delta\varepsilon_{ij} \tag{4-91}$$

于是，式(4-88)具有如下形式：

$$\delta \Pi = \int_V \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij} \mathrm{d}V - \int_V F_i \delta u_i \mathrm{d}V - \int_{S_T} T_i \delta u_i \mathrm{d}s = 0 \tag{4-92}$$

由本构关系，可知

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \tag{4-93}$$

从而，式(4-92)进一步变成

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} \mathrm{d}V = \int_V F_i \delta u_i \mathrm{d}V + \int_{S_T} T_i \delta u_i \mathrm{d}s \tag{4-94}$$

将式(4-90)代入式(4-94)等号左侧，并考虑到 $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$，有

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} \mathrm{d}V = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} \mathrm{d}V + \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ji} \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \mathrm{d}V = \int_V \sigma_{ij} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} \mathrm{d}V \tag{4-95}$$

进一步，采用分部积分公式与体积分-面积分变换公式，并考虑到式(4-89)，可将式(4-95)改写为

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} \mathrm{d}V = \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} \delta u_i) \mathrm{d}V - \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \delta u_i \mathrm{d}V =$$
$$\int_{S_T} (\sigma_{ij} l_j) \delta u_i \mathrm{d}s - \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \delta u_i \mathrm{d}V \tag{4-96}$$

将式(4-96)代入式(4-94)，并考虑到式(4-89)，可得

$$\int_V \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i \right) \delta u_i \mathrm{d}V - \int_{S_T} (\sigma_{ij} l_j - T_i) \delta u_i \mathrm{d}s = 0 \tag{4-97}$$

由以上分析，有

$$\delta \Pi = - \int_V \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i \right) \delta u_i \mathrm{d}V + \int_{S_T} (\sigma_{ij} l_j - T_i) \delta u_i \mathrm{d}s = 0 \tag{4-98}$$

考虑到 δu_i 的任意性，由式(4-98)可知

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i = 0 \qquad (\text{在 } V \text{ 内}) \tag{4-99}$$

$$\sigma_{ij} l_j = T_i \qquad (\text{在 } S_T \text{ 上}) \tag{4-100}$$

因此，总势能原理等价于以位移分量表示的平衡方程与静力



边界条件。

4.2.5　应力强度因子的解析变分解法

由式(4－65)与式(4－66)给出的应力分量表达式已经满足了平衡方程与裂纹表面静力边界条件。因此，变分方程式(4－98)可简化成以下形式：

$$\int_{S_T-S_c}(\sigma_{ij}l_j-T_i)\delta u_i \mathrm{d}s=0 \qquad (4-101)$$

式中，S_c 表示裂纹表面。上式等价于裂纹以外的静力边界条件。

为了利用式(4－101)确定应力强度因子，重新列出由式(4－65)与式(4－79)分别给出的应力与位移分量的表达式如下：

$$\sigma_{ij}=2\sum_{n=0}^{N}r^{n-\frac{1}{2}}[F_n^{(R)}f_{nij}^{(R)}(\theta)+F_n^{(I)}f_{nij}^{(I)}(\theta)]+$$

$$2\sum_{n=0}^{N}r^{n}[G_n^{(R)}g_{nij}^{(R)}(\theta)+G_n^{(I)}g_{nij}^{(I)}(\theta)]$$

$$2\mu u_i=\sum_{n=0}^{N}r^{n+\frac{1}{2}}[F_n^{(R)}s_{ni}^{(R)}(\theta)+F_n^{(I)}s_{ni}^{(I)}(\theta)]+$$

$$\sum_{n=0}^{N}r^{n+1}[G_n^{(R)}t_{ni}^{(R)}(\theta)+G_n^{(I)}t_{ni}^{(I)}(\theta)]$$

位移分量 u_i 的变分取决于待定系数 $F_m^{(R)}$，$F_m^{(I)}$，$G_m^{(R)}$ 与 $G_m^{(I)}$ $(m=0,1,\cdots,N)$的变分。于是

$$\left.\begin{aligned}2\mu\delta u_i&=r^{m+\frac{1}{2}}s_{mi}^{(R)}(\theta)\delta F_m^{(R)}\\2\mu\delta u_i&=r^{m+\frac{1}{2}}s_{mi}^{(I)}(\theta)\delta F_m^{(I)}\\2\mu\delta u_i&=r^{m+1}t_{mi}^{(R)}(\theta)\delta G_m^{(R)}\\2\mu\delta u_i&=r^{m+1}t_{mi}^{(I)}(\theta)\delta G_m^{(I)}\end{aligned}\right\} \qquad (4-102)$$

将式(4－65)与式(4－102)代入式(4－101)，可得关于上述待定系数的线性代数方程组



$$\sum_{n=0}^{N} a_{mn,k}F_n^{(R)} + \sum_{n=0}^{N} b_{mn,k}F_n^{(I)} + \sum_{n=0}^{N} c_{mn,k}G_n^{(R)} + \sum_{n=1}^{N} d_{mn,k}G_n^{(I)} = e_{m,k} \tag{4-103}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}
a_{mn,1} &= \int_{S_T-S_c} r^{n-\frac{1}{2}} r^{m+\frac{1}{2}} f_{nij}^{(R)}(\theta) s_{mi}^{(R)}(\theta) l_j \mathrm{d}s \\
b_{mn,1} &= \int_{S_T-S_c} r^{n-\frac{1}{2}} r^{m+\frac{1}{2}} f_{nij}^{(I)}(\theta) s_{mi}^{(R)}(\theta) l_j \mathrm{d}s \\
c_{mn,1} &= \int_{S_T-S_c} r^{n} r^{m+\frac{1}{2}} g_{nij}^{(R)}(\theta) s_{mi}^{(R)}(\theta) l_j \mathrm{d}s \\
d_{mn,1} &= \int_{S_T-S_c} r^{n} r^{m+\frac{1}{2}} g_{nij}^{(I)}(\theta) s_{mi}^{(R)}(\theta) l_j \mathrm{d}s \\
e_{m,1} &= \int_{S_T-S_c} \frac{1}{2} T_i r^{m+\frac{1}{2}} s_{mi}^{(R)}(\theta) \mathrm{d}s \\
&\vdots \\
a_{mn,4} &= \int_{S_T-S_c} r^{n-\frac{1}{2}} r^{m+1} f_{nij}^{(R)}(\theta) t_{mi}^{(I)}(\theta) l_j \mathrm{d}s \\
b_{mn,4} &= \int_{S_T-S_c} r^{n-\frac{1}{2}} r^{m+1} f_{nij}^{(I)}(\theta) t_{mi}^{(I)}(\theta) l_j \mathrm{d}s \\
c_{mn,4} &= \int_{S_T-S_c} r^{n} r^{m+1} g_{nij}^{(R)}(\theta) t_{mi}^{(I)}(\theta) l_j \mathrm{d}s \\
d_{mn,4} &= \int_{S_T-S_c} r^{n} r^{m+1} g_{nij}^{(I)}(\theta) t_{mi}^{(I)}(\theta) l_j \mathrm{d}s \\
e_{m,4} &= \int_{S_T-S_c} \frac{1}{2} T_i r^{m+1} t_{mi}^{(I)}(\theta) \mathrm{d}s
\end{aligned}\right\} \tag{4-104}$$

4.2.6 边缘裂纹情况解析变分解法

对于图 4-2 所示含径向边缘裂纹圆形紧凑拉伸试样，根据解析变分方法所得量纲为 1 的应力强度因子 $\overline{K}_{\mathrm{I}}$ 随级数项数 N 的收敛情况列于表 4-1。



表 4-1 圆形紧凑拉伸试样 $\bar{K}_{\mathrm{I}}$ 的收敛情况

项数 N	2	3	4	5	10	20	30	40
$\bar{K}_{\mathrm{I}}$	5.965	6.325	6.338	6.352	6.356	6.356	6.356	6.356

表 4-1 中，量纲为 1 的应力强度因子表达式为 $\bar{K}_{\mathrm{I}}=K_{\mathrm{I}}B\sqrt{W}/P$。$B$ 是板的厚度。

对于图 4-3 所示的含径向边缘裂纹拱形三点弯曲试样，根据解析变分方法所得量纲为 1 的应力强度因子 $\bar{K}_{\mathrm{I}}$ 随级数项数 N 的收敛情况列于表 4-2。

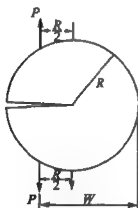


图 4-2 含径向边缘裂纹的圆形紧凑拉伸试样

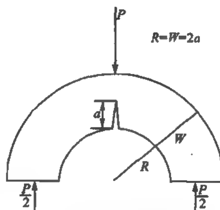


图 4-3 含径向边缘裂纹的拱形三点弯曲试样

表 4-2 拱形三点弯曲试样 $\bar{K}_{\mathrm{I}}$ 的收敛情况

项数 N	7	8	9	10	11	12	13	14
$\bar{K}_{\mathrm{I}}$	7.51	7.75	7.78	7.84	7.87	7.88	7.87	7.87

由表 4-1 与表 4-2 可以看出，由解析变分法给出的量纲为 1 的应力强度因子 $\bar{K}_{\mathrm{I}}$ 随着 N 的增多而迅速收敛，并分别接近各自的实验结果 6.24[4.1] 与 7.72[4.2]。

4.3 含内部裂纹有限大板的解析变分解法

4.3.1 满足裂纹表面边界条件的解答

图 4-4 表示一个含内部裂纹的有限大板。

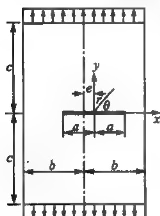


图 4-4 含内部裂纹的有限大板

由式(1-67)与式(1-68),满足所有基本方程的应力分量可表示成如下复变函数形式:

$$\sigma_{xx}+\sigma_{yy}=2[\varphi'(z)+\overline{\varphi'}(\bar{z})] \tag{4-105}$$

$$\sigma_{yy}-\sigma_{xx}+2\mathrm{i}\sigma_{xy}=2[(\bar{z}-z)\varphi''(z)-\varphi'(z)+\Omega'(z)] \tag{4-106}$$

对于含内部裂纹板,根据由裂纹表面边界条件所导出的式(1-61)与式(1-62),有

$$\varphi'(z)=(z^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}f(z)+g(z) \tag{4-107}$$

$$\Omega'(z)=(z^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}\bar{f}(z)-\bar{g}(z) \tag{4-108}$$

式中,$f(z)$与$g(z)$可用泰勒级数表示为

$$f(z)=\sum_{m=0}^{M}F_m z^m,\qquad \bar{f}(z)=\sum_{m=0}^{M}\bar{F}_m z^m \tag{4-109}$$

$$g(z)=\sum_{n=0}^{N}G_n z^n,\qquad \bar{g}(z)=\sum_{n=0}^{N}\bar{G}_n z^n \tag{4-110}$$

由式(1-71),满足所有基本方程的位移分量可写成如下复变函数形式:

$$2\mu(u_x+\mathrm{i}u_y)=\kappa\varphi(z)-(z-\bar{z})\overline{\varphi'}(\bar{z})-\bar{\Omega}(\bar{z}) \tag{4-111}$$



式中

$$\left.\begin{aligned}\kappa &= \frac{3-\nu}{1+\nu} \quad (\text{平面应力})\\ \kappa &= 3-4\nu \quad (\text{平面应变})\end{aligned}\right\} \tag{4-112}$$

对于含内部裂纹板，由式(4-109)与式(4-110)，可知

$$\varphi(z) = \sum_{m=0}^{M} F_m \alpha_m(z) + \sum_{n=0}^{N} G_n \beta_n(z) \tag{4-113}$$

$$\Omega(z) = \sum_{m=0}^{M} \bar{F}_m \alpha_m(z) - \sum_{n=0}^{N} \bar{G}_n \beta_n(z) \tag{4-114}$$

式中

$$\alpha_m(z) = \int (z^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}} z^m \mathrm{d}z \tag{4-115}$$

$$\beta_n(z) = \int z^n \mathrm{d}z = \frac{1}{n+1} z^{n+1} \tag{4-116}$$

4.3.2　满足位移单值条件的解答

应用分部积分公式，可将式(4-115)写成

$$\alpha_m(z) = \frac{1}{m} z^{m-1} (z^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}} + \frac{m-1}{m} a^2 \alpha_{m-2}(z) \tag{4-117}$$

上式即为关于 $\alpha_m(z)$ 的递推公式。同时

$$\alpha_0 = \ln(z + \sqrt{z^2 - a^2}) \tag{4-118}$$

$$\alpha_1 = \sqrt{z^2 - a^2} \tag{4-119}$$

根据递推公式(4-117)，有

$$\alpha_{2k}(z) = \sqrt{z^2 - a^2}\,\zeta_{2k}(z) + \eta_{2k} a^{2k} \alpha_0(z) \tag{4-120}$$

$$\alpha_{2k+1}(z) = \sqrt{z^2 - a^2}\,\zeta_{2k+1}(z) \tag{4-121}$$

式中

$$\eta_{2k} = \frac{(2k-1)!!}{2k(2k-2)!!} \tag{4-122}$$



$$\zeta_{2k}(z) = \frac{1}{2k}\left[z^{2k-1} + \frac{2k-1}{2k-2}a^2 z^{2k-3} + \cdots + \frac{(2k-1)!!}{(2k-2)!!}a^{2k-2} z\right] \tag{4-123}$$

$$\zeta_{2k+1}(z) = \frac{1}{2k+1}\left[z^{2k} + \frac{2k}{2k-1}a^2 z^{2k-2} + \cdots + \frac{2k!!}{(2k-1)!!}a^{2k}\right] \tag{4-124}$$

由式(4－111),绕裂纹的位移单值条件为

$$[\kappa\varphi(z) - \bar{\Omega}(\bar{z})]_c = 0 \tag{4-125}$$

将式(4－116)、式(4－120)与式(4－121)代入式(4－113)与式(4－114),再将所得结果代入式(4－125),并考虑到 $a_0(z)$ 的多值性,有

$$F_0 = -\sum_{k=1}^{K} F_{2k}\eta_{2k}a^{2k} \tag{4-126}$$

式中,当 $M=N$ 为偶数时,$K=N/2$;而当 $M=N$ 为奇数时,$K=(N-1)/2$。

将式(4－107)与式(4－108)代入式(4－105)与式(4－106),并考虑到式(4－109)与式(4－110),可得

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 2\Big[(z^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{N}F_n z^n + \sum_{n=0}^{N}G_n z^n + (\bar{z}^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{N}\bar{F}_n\bar{z}^n + \sum_{n=0}^{N}\bar{G}_n\bar{z}^n\Big] \tag{4-127}$$

$$\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2\mathrm{i}\sigma_{xy} = 2\Big\{(z^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{N}(\bar{F}_n - F_n)z^n - \sum_{n=0}^{N}(\bar{G}_n + G_n)z^n - (z-\bar{z})\Big[(z^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{N}nF_n z^{n-1} + \sum_{n=0}^{N}nG_n z^{n-1} - (z^2 - a^2)^{-\frac{3}{2}}z\sum_{n=0}^{N}F_n z^n\Big]\Big\} \tag{4-128}$$

将式(4－113)与式(4－114)代入式(4－111),有



$$2\mu(u_x + \mathrm{i}u_y) = \kappa\Big[\sum_{n=0}^{N} F_n\alpha_n(z) + \sum_{n=0}^{N} G_n\beta_n(z)\Big] - (z - \bar{z})\Big[\sum_{n=0}^{N} \bar{F}_n\alpha'_n(\bar{z}) + \sum_{n=0}^{N} \bar{G}_n\beta'_n(z)\Big] - \Big[\sum_{n=0}^{N} F_n\alpha_n(z) - \sum_{n=0}^{N} G_n\beta_n(\bar{z})\Big] \qquad (4-129)$$

将式(4－107)代入式(1－48)，并考虑到式(4－109)与式(4－110)，可得单元刚性转动 ω 的表达式：

$$\omega = -\mathrm{i}\,\frac{2}{E_1}\Big[(z^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{N} F_n z^n + \sum_{n=0}^{N} G_n z^n - (\bar{z}^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{N} \bar{F}_n\bar{z}^n - \sum_{n=0}^{N} \bar{G}_n\bar{z}^n\Big] \qquad (4-130)$$

由上式，$G_0 - \bar{G}_0 = G_0^{(1)}$ 代表总体刚性转动。

由式(1－112)，裂纹右端复应力强度因子为

$$K_{\mathrm{I}} - \mathrm{i}K_{\mathrm{II}} = 2\sqrt{2\pi}\lim_{z\to a}(z - a)^{\frac{1}{2}}\varphi'(z) \qquad (4-131)$$

将式(4－107)代入上式，并考虑到式(4－109)与式(4－110)，有

$$K_{\mathrm{I}} - \mathrm{i}K_{\mathrm{II}} = 2\sqrt{2\pi}(2a)^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{N} F_n a^n \qquad (4-132)$$

将上式分离实部与虚部，可得

$$K_{\mathrm{I}} = 2\sqrt{2\pi}(2a)^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{N} F_n^{(R)} a^n \qquad (4-133)$$

$$K_{\mathrm{II}} = -2\sqrt{2\pi}(2a)^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{N} F_n^{(1)} a^n \qquad (4-134)$$

类似地，可以证明，裂纹左端的应力强度因子为

$$K_{\mathrm{I}}^{*} = 2\sqrt{2\pi}(2a)^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{N}(-1)^{n+1} F_n^{(R)} a^n \qquad (4-135)$$

$$K_{\mathrm{II}}^{*} = -2\sqrt{2\pi}(2a)^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{N}(-1)^{n+1} F_n^{(1)} a^n \qquad (4-136)$$



4.3.3 应力强度因子的解析变分解法

由式(4－127)与式(4－128)给出的应力分量表达式已经满足了平衡方程与裂纹表面静力边界条件。因此，变分方程式(4－98)可简化成以下形式：

$$\int_{S_T-S_c}(\sigma_{ij}l_j-T_i)\delta u_i \mathrm{d}s=0 \qquad (4-137)$$

为了利用以上方程确定应力强度因子，现根据式(4－127)、式(4－128)与式(4－129)，给出应力分量与位移分量的一般表达式：

$$\sigma_{ij}=\sum_{n=1}^{N}[F_n^{(\mathrm{R})}p_{nij}^{(\mathrm{R})}(r,\theta)+F_n^{(\mathrm{I})}p_{nij}^{(\mathrm{I})}(r,\theta)]+\sum_{n=0}^{N}[G_n^{(\mathrm{R})}q_{nij}^{(\mathrm{R})}(r,\theta)+G_n^{(\mathrm{I})}q_{nij}^{(\mathrm{I})}(r,\theta)] \qquad (4-138)$$

$$u_i=\sum_{n=1}^{N}[F_n^{(\mathrm{R})}s_{ni}^{(\mathrm{R})}(r,\theta)+F_n^{(\mathrm{I})}s_{ni}^{(\mathrm{I})}(r,\theta)]+\sum_{n=0}^{N}[G_n^{(\mathrm{R})}t_{ni}^{(\mathrm{R})}(r,\theta)+G_n^{(\mathrm{I})}t_{ni}^{(\mathrm{I})}(r,\theta)] \qquad (4-139)$$

应当指出，由于 F_0 是 $F_1,\cdots,F_n,\cdots,F_N$ 的齐次线性函数，如式(4－126)所示，故在式(4－138)、式(4－139)中不出现 F_0。另外，$G_0^{(\mathrm{I})}$ 代表总体刚性转动，应令

$$G_0^{(\mathrm{I})}=0 \qquad (4-140)$$

将式(4－138)与式(4－139)代入式(4－137)，可得关于求解待定系数的线性代数方程组

$$\sum_{n=1}^{N}a_{mn,k}F_n^{(\mathrm{R})}+\sum_{n=1}^{N}b_{mn,k}F_n^{(\mathrm{I})}+\sum_{n=0}^{N}c_{mn,k}G_n^{(\mathrm{R})}+\sum_{n=1}^{N}d_{mn,k}G_n^{(\mathrm{I})}=e_{m,k} \qquad (4-141)$$

式中



$$\left.\begin{aligned}
a_{mn,1} &= \int_{S_T-S_c} p_{nij}^{(R)}(r,\theta)s_{mi}^{(R)}(r,\theta)l_j\,\mathrm{d}s \\
b_{mn,1} &= \int_{S_T-S_c} p_{nij}^{(I)}(r,\theta)s_{mi}^{(R)}(r,\theta)l_j\,\mathrm{d}s \\
c_{mn,1} &= \int_{S_T-S_c} q_{nij}^{(R)}(r,\theta)s_{mi}^{(R)}(r,\theta)l_j\,\mathrm{d}s \\
d_{mn,1} &= \int_{S_T-S_c} q_{nij}^{(I)}(r,\theta)s_{mi}^{(R)}(r,\theta)l_j\,\mathrm{d}s \\
e_{m1} &= \int_{S_T-S_c} T_i s_{mi}^{(R)}(r,\theta)\,\mathrm{d}s \\
&\vdots \\
a_{mn,4} &= \int_{S_T-S_c} p_{nij}^{(R)}(r,\theta)t_{mi}^{(I)}(r,\theta)l_j\,\mathrm{d}s \\
b_{mn,4} &= \int_{S_T-S_c} p_{nij}^{(I)}(r,\theta)t_{mi}^{(I)}(r,\theta)l_j\,\mathrm{d}s \\
c_{mn,4} &= \int_{S_T-S_c} q_{nij}^{(R)}(r,\theta)t_{mi}^{(I)}(r,\theta)l_j\,\mathrm{d}s \\
d_{mn,4} &= \int_{S_T-S_c} q_{nij}^{(I)}(r,\theta)t_{mi}^{(I)}(r,\theta)l_j\,\mathrm{d}s \\
e_{m4} &= \int_{S_T-S_c} T_i t_{mi}^{(I)}(r,\theta)\,\mathrm{d}s
\end{aligned}\right\} \qquad (4-142)$$

应当指出，式(4－141)包括 $4N+1$ 个方程。当 $k=1,2,4$ 时，$m=1,\cdots,N$；而当 $k=3$ 时，$m=0,1,\cdots,N$。同时，该式也含有 $4N+1$ 个待定量。这些待定量是 $F_1^{(R)},\cdots,F_N^{(R)}$；$F_1^{(I)},\cdots,F_N^{(I)}$；$G_0^{(R)}$，$G_1^{(R)},\cdots,G_N^{(R)}$；$G_1^{(I)},\cdots,G_N^{(I)}$。利用式(4－141)求得这些待定量后，即可由式(4－126)求得 $F_0^{(R)}$ 与 $F_0^{(I)}$，并由式(4－133)至式(4－136)得到两个应力强度因子。

对于图 4－4 所示含内部裂纹矩形拉伸试样，根据解析变分方法所得量纲为 1 的应力强度因子 $\overline{K}_{\mathrm{I}}$ 随级数项数 N 的收敛情况列于表 4－3 与表 4－4。



表 4-3　含中心裂纹矩形拉伸试样 $\bar{K}_{\mathrm{I}}$ 的收敛情况

尺　寸	$e=0, c/b=1.0, a/b=0.4$								
N	3	4	5	6	7	8	9	10	参考文献[4.3]
$\bar{K}_{\mathrm{I}}$	1.205	1.212	1.215	1.216	1.217	1.216	1.216	1.216	1.216

注：$\bar{K}_{\mathrm{I}}=K_{\mathrm{I}}/(\sigma\sqrt{\pi a})$。

表 4-4　含偏心裂纹矩形拉伸试样 $\bar{K}_{\mathrm{I}}$ 的收敛情况

尺　寸	$e/b=0.6, c/b=1.0, a/(b-e)=0.6$								
N	3	4	5	6	7	8	9	10	参考文献[4.3]
$\bar{K}_{\mathrm{I}}$	1.165	1.188	1.203	1.215	1.219	1.226	1.230	1.231	1.240
$\bar{K}_{\mathrm{I}}^{*}$	1.113	1.121	1.125	1.128	1.130	1.133	1.135	1.136	1.150

注：$\bar{K}_{\mathrm{I}}=K_{\mathrm{I}}/(\sigma\sqrt{\pi a})$。

4.4　含孔边单侧裂纹有限大板的解析变分解法

4.4.1　含孔边单侧裂纹板应力场与位移场

图 4-5 表示一含孔边单侧裂纹板。

由式(1-55)与式(1-56)，对于含孔边单侧裂纹的板，有

$$\varphi'(z)=\sqrt{\frac{z}{z-a}}f(z)+g(z) \tag{4-143}$$

$$\bar{\Omega}'(z)=\sqrt{\frac{z}{z-a}}f(z)-g(z) \tag{4-144}$$

对于含孔边裂纹的板，$f(z)$ 与 $g(z)$ 可以用罗朗(Laurent)级数表示如下：



$$f(z)=\sum_{n=-1}^{\infty}E_nz^n+\sum_{n=2}^{\infty}F_nz^{-n} \tag{4-145}$$

$$g(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}G_nz^n \tag{4-146}$$

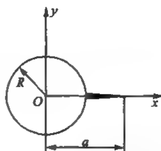


图 4-5 含孔边单侧裂纹板

这里，E_n，F_n 与 G_n 是待定复系数，并可分别由两个实常数表示如下：

$$E_n=E_n^R+\mathrm{i}E_n^I,\qquad F_n=F_n^R+\mathrm{i}F_n^I \tag{4-147}$$

$$G_n=G_n^R+\mathrm{i}G_n^I \tag{4-148}$$

定义

$$I_n(z)=\int\sqrt{\frac{z}{z-a}}z^n\mathrm{d}z \tag{4-149}$$

$$J_n(z)=\int\sqrt{\frac{z}{z-a}}z^{-n}\mathrm{d}z \tag{4-150}$$

可以将 $\varphi(z)$与 $\bar{\Omega}(z)$表示如下：

$$\varphi(z)=\sum_{n=-1}^{\infty}E_nI_n(z)+\sum_{n=2}^{\infty}F_nJ_n(z)+\sum_{\substack{-\infty\\ n\neq -1}}^{\infty}G_n\frac{z^{n+1}}{n+1}+G_{-1}\ln z \tag{4-151}$$

$$\bar{\Omega}(z)=\sum_{n=-1}^{\infty}E_nI_n(z)+\sum_{n=2}^{\infty}F_nJ_n(z)-\sum_{\substack{-\infty\\ n\neq -1}}^{\infty}G_n\frac{z^{n+1}}{n+1}-G_{-1}\ln z \tag{4-152}$$

对 $I_n(z)$与 $J_n(z)$分别进行分部积分，可得到以下两个递推公式：

$$I_n(z)=\frac{\sqrt{z(z-a)}}{n+1}z^n+\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)\frac{a}{2}I_{n-1}(z)\qquad (n\geqslant 0) \tag{4-153}$$

$$J_n(z) = \frac{\sqrt{z(z-a)}}{(2n-3)}\frac{2}{a}z^{1-n} + \left(\frac{n-2}{2n-3}\right)\frac{2}{a}J_{n-1}(z) \qquad (n \geqslant 2)$$

(4-154)

同时

$$I_{-1}(z) = \ln\left\{z - \frac{a}{2} + \left[\left(z - \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]^{1/2}\right\}$$

(4-155)

由以上三式，可得 $I_n(z)$ 与 $J_n(z)$ 的展开式如下：

$$I_n(z) = \frac{\sqrt{z(z-a)}}{n+1}\left[z^n + \Delta_n^1 \sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{k}\frac{2n-2j+3}{n-j+3}\right)\left(\frac{a}{2}\right)^k z^{n-k}\right] +$$

$$\frac{(2n+1)!!}{(n+1)!!}\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1} I_{-1}(z) \qquad (4-156)$$

$$J_n(z) = \frac{\sqrt{z(z-a)}}{2n-3}\frac{2}{a}\left[z^{1-n} + \right.$$

$$\left.\Delta_n^2 \sum_{k=3}^{n}\left(\prod_{j=3}^{k}\frac{n-j+1}{2n-2j+1}\right)\left(\frac{2}{a}\right)^{k-2} z^{k-n-1}\right] \qquad (4-157)$$

式中

$$\Delta_n^1 = \begin{cases} 0 & (n = 0) \\ 1 & (n \geqslant 1) \end{cases} \qquad (4-158)$$

$$\Delta_n^2 = \begin{cases} 0 & (n = 2) \\ 1 & (n \geqslant 3) \end{cases} \qquad (4-159)$$

显然，$I_{-1}(z)$是多值函数。对于现在的双连通域问题，位移的单值条件必须得到保证。这个条件可表示如下：

$$[\kappa\varphi(z) - \overline{\Omega}(\overline{z})]_c = 0 \qquad (4-160)$$

这里，c 是围绕裂纹的任意闭合回路。将式(4-151)与式(4-152)代入式(4-160)，并考虑到式(4-156)与式(4-157)，可得以下待定系数之间的关系式：

$$E_{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{(n+1)!}\left(\frac{a}{2}\right)^{n+1}E_n \qquad (4-161)$$

$$G_{-1} = 0 \qquad (4-162)$$



考虑到式(4－156)、式(4－157)、式(4－161)与式(4－162)，有

$$\varphi'(z)=\sqrt{\frac{z}{z-a}}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}E_n\left[\frac{d(n,a)}{2}+z^n\right]+\sum_{n=2}^{\infty}F_nz^{-n}\right\}+\sum_{\substack{-\infty\\ n\neq-1}}^{\infty}G_nz^n \tag{4-163}$$

$$\bar{\Omega}'(z)=\sqrt{\frac{z}{z-a}}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}E_n\left[\frac{d(n,a)}{z}+z^n\right]+\sum_{n=2}^{\infty}F_nz^{-n}\right\}-\sum_{\substack{-\infty\\ n\neq-1}}^{\infty}G_nz^n \tag{4-164}$$

$$\begin{aligned}\varphi(z)=&\sum_{n=0}^{\infty}E_n\frac{\sqrt{z(z-a)}}{n+1}\Big[z^n+\\&\Delta_n^1\sum_{k=1}^{n}\Big(\prod_{j=1}^{k}\frac{2n-2j+3}{n-j+1}\Big)\Big(\frac{a}{2}\Big)^kz^{n-k}\Big]+\\&\sum_{n=2}^{\infty}F_n\frac{\sqrt{z(z-a)}}{2n-3}\frac{2}{a}\Big[z^{1-n}+\\&\Delta_n^2\sum_{k=3}^{n}\Big(\prod_{j=3}^{k}\frac{n-j+1}{2n-2j+1}\Big)\Big(\frac{2}{a}\Big)^{k-2}z^{k-n-1}\Big]+\sum_{\substack{-\infty\\ n\neq-1}}^{\infty}G_n\frac{z^{n+1}}{n+1}\end{aligned} \tag{4-165}$$

$$\begin{aligned}\bar{\Omega}(z)=&\sum_{n=0}^{\infty}E_n\frac{\sqrt{z(z-a)}}{n+1}\Big[z^n+\\&\Delta_n^1\sum_{k=1}^{n}\Big(\prod_{j=1}^{k}\frac{2n-2j+3}{n-j+1}\Big)\Big(\frac{a}{2}\Big)^kz^{n-k}\Big]+\\&\sum_{n=2}^{\infty}F_n\frac{\sqrt{z(z-a)}}{2n-3}\frac{2}{a}\Big[z^{1-n}+\\&\Delta_n^2\sum_{k=3}^{n}\Big(\prod_{j=1}^{k}\frac{n-j+1}{2n-2j+3}\Big)\Big(\frac{2}{a}\Big)^{k-2}z^{k-n-1}\Big]-\\&\sum_{\substack{\infty\\ n\neq-1}}^{\infty}G_n\frac{z^{n+1}}{n+1}\end{aligned} \tag{4-166}$$

式中

$$d(n,a)=-\frac{(2n+1)!!}{(n+1)!}\left(\frac{a}{2}\right)^{n+1} \tag{4-167}$$

将式(4-163)至式(4-166)代入式(4-105)、式(4-106)与式(4-111)，并分离实部与虚部，可得

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}=&\sum_{n=0}^{N}E_n^{R}e_{nij}^{R}(r,\theta)+\sum_{n=0}^{N}E_n^{I}e_{nij}^{I}(r,\theta)+\\&\sum_{n=2}^{N+2}F_n^{R}f_{nij}^{R}(r,\theta)+\sum_{n=2}^{N+2}F_n^{I}f_{nij}^{I}(r,\theta)+\\&\sum_{\substack{-N-2\\n\neq-1}}^{N}G_n^{R}g_{nij}^{R}(r,\theta)+\sum_{\substack{-N-2\\n\neq-1}}^{N}G_n^{I}g_{nij}^{I}(r,\theta)\end{aligned} \tag{4-168}$$

$$\begin{aligned}u_i=&\sum_{n=0}^{N}E_n^{R}e_{ni}^{R}(r,\theta)+\sum_{n=0}^{N}E_n^{I}e_{ni}^{I}(r,\theta)+\\&\sum_{n=2}^{N+2}F_n^{R}f_{ni}^{R}(r,\theta)+\sum_{n=2}^{N+2}F_n^{I}f_{ni}^{I}(r,\theta)+\\&\sum_{\substack{-N-2\\n\neq-1}}^{N}G_n^{R}g_{ni}^{R}(r,\theta)+\sum_{\substack{-N-2\\n\neq-1}}^{N}G_n^{I}g_{ni}^{I}(r,\theta)\end{aligned} \tag{4-169}$$

式中，$e_{nij}^{R}(r,\theta)$，$e_{nij}^{I}(r,\theta)$，$f_{nij}^{R}(r,\theta)$，$f_{nij}^{I}(r,\theta)$，$g_{nij}^{R}(r,\theta)$，$g_{nij}^{I}(r,\theta)$，$e_{ni}^{R}(r,\theta)$，$e_{ni}^{I}(r,\theta)$等是 r 与 θ 的已知函数。

采用 1.3.3 节的方法，可得应力强度因子的复变函数表达式如下：

$$K_{\mathrm{I}}-\mathrm{i}K_{\mathrm{II}}=2\sqrt{2\pi}\lim_{z\to a}[(z-a)^{1/2}\varphi'(z)] \tag{4-170}$$

将式(4-163)代入式(4-170)，可知

$$K_{\mathrm{I}}-\mathrm{i}K_{\mathrm{II}}=2\sqrt{2\pi a}\left\{\sum_{n=0}^{N}E_n[a^{-1}d(n,a)+a^n]+\sum_{n=2}^{N+2}F_na^{-n}\right\} \tag{4-171}$$

对于对称的 I 型问题，有

$$E_n^{I}=F_n^{I}=G_n^{I}=0,\qquad K_{\mathrm{II}}=0 \tag{4-172}$$



而对于反对称的Ⅱ型问题，有

$$E_n^R = F_n^R = G_n^R = 0, \qquad K_{\mathrm{I}} = 0 \tag{4-173}$$

4.4.2　应力场与位移场解析变分解法

与4.3.3节相似，应力展开式(4-168)以及位移展开式(4-169)中待定系数可由势能原理确定。其变分方程为

$$\int_{S_p-S_c} (\sigma_{ij} l_j - T_i)\delta u_i \mathrm{d}s = 0 \tag{4-174}$$

将式(4-168)与式(4-169)代入式(4-174)，即可得到关于待定系数的线性代数方程组。求解此方程组，即可得到待定系数。

图4-6表示一个含孔边单侧裂纹对称板。

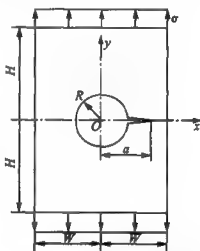


图4-6　含孔边单侧裂纹对称板

对于图4-6所示对称的Ⅰ型问题，孔壁右侧裂纹尖端应力强度因子 K_{I}、孔壁左侧峰值应力 σ_{peak} 与系统总势能 Π 分别为

$$K_{\mathrm{I}} = 2\sqrt{2\pi a}\left\{\sum_{n=0}^{N} E_n^R[a^{-1}d(n,a) + a^n] + \sum_{n=2}^{N} F_n^R a^{-n}\right\} \tag{4-175}$$

$$\sigma_{\mathrm{peak}} = \sigma_{yy}(R,\pi) = \sum_{n=0}^{N} E_n^R e_{nyy}^R(R,\pi) + \sum_{n=2}^{N+2} F_n^R f_{nyy}^R(R,\pi) + \sum_{\substack{-N-2\\ n\neq -1}}^{N} G_n^R g_{nyy}^R(R,\pi) \tag{4-176}$$

$$\Pi = -\int_{B_1-B_2} \sigma u_y t \mathrm{d}s =$$

$$-\sigma t\int_{B_1-B_2} \Big\{ \sum_{n=0}^{N} E_n^R e_{ny}^R(r,\theta) + \sum_{n=2}^{N+2} F_n^R f_{ny}^R(r,\theta) +$$

$$\sum_{\substack{-N-2 \\ n\neq -1}}^{N} G_n^R g_{ny}(r,\theta) \Big\} \mathrm{d}s \tag{4-177}$$

表 4-5、表 4-6、表 4-7 与图 4-7、图 4-8、图 4-9 表示了非短裂纹条件下的收敛情况。由此可见，当 $N>8$ 时，即可得到可靠结果。K_1 与 σ_{peak} 和 Π 相比，收敛更为迅速。而对于短裂纹情况，N 需达到 10，方可得到可靠结果。

表 4-5 K_1，σ_{peak} 与 Π 随项数 N 的收敛情况

($H/W=2, R/W=0.25, a/W=0.275$)

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$K_1/(\sigma\sqrt{\pi W})$	0.542	0.496	0.619	0.598	0.560	0.528	0.508	0.495	0.498	0.499
σ_{peak}/σ	1.286	1.548	2.219	3.274	3.322	3.086	3.364	3.158	3.286	3.311
$\Pi/\sigma t$	−25.44	−25.53	−25.73	−25.90	−25.92	−25.93	−25.94	−25.94	−25.94	−25.94

表 4-6 K_1，σ_{peak} 与 Π 随项数 N 的收敛情况

($H/W=2, R/W=0.25, a/W=0.3$)

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$K_1/(\sigma\sqrt{\pi W})$	0.549	0.514	0.627	0.627	0.605	0.588	0.581	0.578	0.578	0.578
σ_{peak}/σ	1.304	1.560	2.338	3.281	3.382	3.164	3.375	3.262	3.315	3.324
$\Pi/\sigma t$	−25.56	−25.65	−25.90	−26.05	−26.06	−26.07	−26.08	−26.08	−26.09	−26.09

表 4-7 K_1，σ_{peak} 与 Π 随项数 N 的收敛情况

($H/W=2, R/W=0.25, a/W=0.4$)

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$K_1/(\sigma\sqrt{\pi W})$	0.597	0.588	0.667	0.687	0.683	0.682	0.684	0.684	0.684	0.684
σ_{peak}/σ	1.400	1.646	2.751	3.509	3.607	3.518	3.563	3.542	3.520	3.524
$\Pi/\sigma t$	−26.18	−26.27	−26.72	−26.84	−26.84	−26.84	−26.86	−26.86	−26.86	−26.86



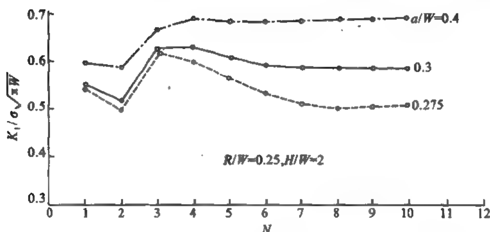


图 4-7　应力强度因子 K_I 随项数 N 的收敛情况

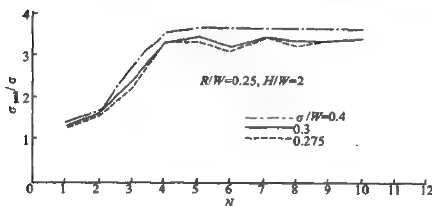


图 4-8　峰值应力 σ_{peak} 随项数 N 的收敛情况

表 4-8、表 4-9、表 4-10 与图 4-10、图 4-11 给出了量纲为 1 的应力强度因子与峰值应力随量纲为 1 的裂纹尺寸的变化规律。

由表 4-8 可知，当 $H/W \geqslant 2$ 时，K_I 值与 σ_{peak} 随 H/W 的变化不大，即矩形板可被看作无限长条。在表 4-8、表 4-9 与表 4-10中，带 * 号的 σ_{peak} 表示外插值。对应于 $a-R=0$ 的外差值系用来与应力集中系数手册[4.4]作比较，两者的一致性是令人满意的。



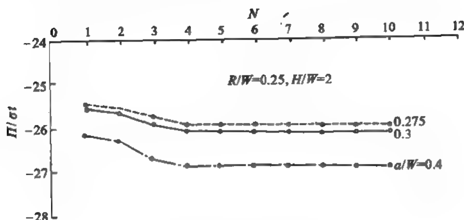


图 4-9　总势能 Π 随项数 N 的收敛情况

表 4-8　K_{I} 与 σ_{peak} 随 a/W 的变化($R/W=0.25$)

$\frac{a-R}{R}$	$\frac{a}{W}$	$H/W=1$		$H/W=2$		$H/W=2.5$		$H/W=3$	
		$K_{\mathrm{I}}/(\sigma\sqrt{\pi W})$	σ_{peak}/σ	$K_{\mathrm{I}}/(\sigma\sqrt{\pi W})$	σ_{peak}/σ	$K_{\mathrm{I}}/(\sigma\sqrt{\pi W})$	σ_{peak}/σ	$K_{\mathrm{I}}/(\sigma\sqrt{\pi W})$	σ_{peak}/σ
0.0	0.250	0.000	3.52*	0.000	3.29*	0.000	—	0.000	—
0.1	0.275	0.558	3.56*	0.499	3.30*	0.497	—	0.497	—
0.2	0.300	0.645	3.63	0.578	3.32	0.576	3.31	0.576	3.31
0.3	0.325	0.697	3.66	0.624	3.33	0.623	3.32	0.623	3.32
0.4	0.350	0.727	3.80	0.648	3.34	0.648	3.34	0.648	3.33
0.5	0.375	0.750	3.94	0.666	3.43	0.667	3.44	0.666	3.43
0.6	0.400	0.769	4.04	0.684	3.52	0.684	3.50	0.684	3.50
0.7	0.425	0.786	4.22	0.696	3.60	0.694	3.59	0.693	3.59
0.8	0.450	0.803	4.34	0.710	3.68	0.708	3.68	0.707	3.67
0.9	0.475	0.820	4.47	0.725	3.76	0.722	3.77	0.721	3.77
1.0	0.500	0.837	4.62	0.741	3.85	0.738	3.84	0.736	3.84
1.2	0.550	0.872	4.84	0.776	4.01	0.772	3.98	0.769	3.97
1.4	0.600	0.911	5.08	0.818	4.17	0.812	4.12	0.810	4.12
1.6	0.650	0.954	5.32	0.874	4.35	0.872	4.30	0.870	4.29
2.0	0.750	1.092	5.84	1.023	4.74	1.017	4.72	1.012	4.72
2.4	0.850	1.330	6.42	1.292	5.33	1.277	5.24	1.262	5.24
2.6	0.900	1.574	6.78	1.534	5.68	1.502	5.59	1.482	5.59
0.0	0.25				3.24[4.4]				



表 4-9　K_I 与 σ_{peak} 随 a/W 的变化($R/W=0.1$)

$\frac{a-R}{R}$	$\frac{a}{W}$	$H/W=2, R/W=0.1$	
		$K_I/(\sigma\sqrt{\pi W})$	σ_{peak}/σ
0.0	0.10	0.000	3.05*
0.1	0.11	0.300	3.08*
0.3	0.13	0.368	3.14
0.6	0.16	0.399	3.30
0.8	0.18	0.410	3.37
1.0	0.20	0.420	3.49
2.0	0.30	0.474	3.98
3.0	0.40	0.534	4.40
4.0	0.50	0.601	4.85
5.0	0.60	0.679	5.29
6.0	0.70	0.789	5.82
7.0	0.80	0.955	6.46
8.0	0.90	1.280	7.38
0.0	0.10		3.03[4.4]

表 4-10　K_I 与 σ_{peak} 随 a/W 的变化($R/W=0.5$)

$\frac{a-R}{R}$	$\frac{a}{W}$	$H/W=2, R/W=0.1$	
		$K_I/(\sigma\sqrt{\pi W})$	σ_{peak}/σ
0.00	0.50	0.000	4.39*
0.02	0.51	0.680	4.40*
0.04	0.52	0.754	4.41
0.06	0.53	0.809	4.42
0.08	0.54	0.865	4.44
0.10	0.55	0.927	4.47



续表 4－10

$\frac{a-R}{R}$	$\frac{a}{W}$	$H/W=2, R/W=0.1$	
		$K_1/(\sigma\sqrt{\pi W})$	σ_{peak}/σ
0.20	0.60	1.084	4.57
0.30	0.65	1.195	4.67
0.40	0.70	1.298	4.80
0.50	0.75	1.409	4.95
0.60	0.80	1.553	5.22
0.70	0.85	1.765	5.56
0.80	0.90	2.087	6.03
0.00	0.50		4.33[4.4]

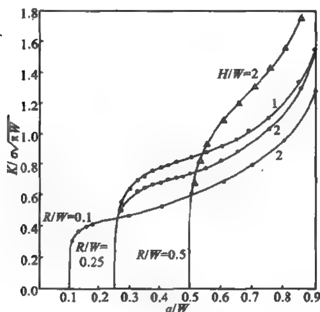


图 4－10 量纲为 1 的应力强度因子随量纲为 1 的裂纹尺寸的变化情况(孔边单侧裂纹)



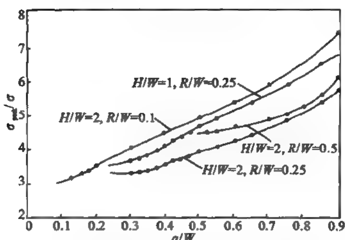


图 4-11 量纲为 1 的峰值应力随量纲为 1 的裂纹尺寸的变化情况(孔边单侧裂纹)

4.5 含孔边双侧不等长裂纹有限大板解析变分解法

4.5.1 含孔边双侧裂纹板应力场与位移场

图 4-12 表示一含孔边双侧裂纹板。

由式(1-55)与式(1-56),对于含孔边双侧裂纹的板,有

$$\varphi'(z)=\frac{1}{\sqrt{(z-a_1)(z+a_2)}}\zeta(z)+\eta(z) \quad (4-178)$$

$$\Omega'(z)=\frac{1}{\sqrt{(z-a_1)(z+a_2)}}\zeta(z)-\eta(z) \quad (4-179)$$

式中,$\zeta(z)$与 $\eta(z)$为两个解析函数。

相应的原函数 $\varphi(z)$与 $\Omega(z)$可被写成如下的级数形式:

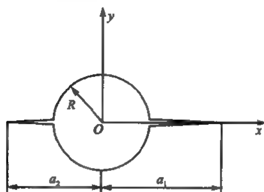


图 4-12　含孔边双侧裂纹板

$$\varphi(z)=\sqrt{(z-a_1)(z+a_2)}\sum_{n=-N}^{N}A_nz^n+\sum_{n=-N}^{N}B_nz^n \tag{4-180}$$

$$\Omega(z)=\sqrt{(z-a_1)(z+a_2)}\sum_{n=-N}^{N}A_nz^n-\sum_{n=-N}^{N}B_nz^n \tag{4-181}$$

这里,A_n 与 B_n 为待定复系数,它们可用实常数表示如下:

$$\left.\begin{aligned}A_n&=A_n^R+\mathrm{i}A_n^I\\B_n&=B_n^R+\mathrm{i}B_n^I\end{aligned}\right\} \tag{4-182}$$

由式(4-180)与式(4-181),可知

$$\varphi'(z)=\frac{1}{\sqrt{(z-a_1)(z+a_2)}}\sum_{n=-N}^{N}A_n\Big[(n+1)z^{n+1}+\left(n+\frac{1}{2}\right)(a_2-a_1)z^n-na_1a_2z^{n-1}\Big]+\sum_{n=-N}^{N}B_nnz^{n-1} \tag{4-183}$$

$$\Omega'(z)=\frac{1}{\sqrt{(z-a_1)(z+a_2)}}\sum_{n=-N}^{N}A_n\Big[(n+1)z^{n+1}+\left(n+\frac{1}{2}\right)(a_2-a_1)z^n-na_1a_2z^{n-1}\Big]\quad\sum_{n=-N}^{N}B_nnz^{n-1} \tag{4-184}$$



比较式(4－178)、式(4－179)与式(4－183)、式(4－184)，有

$$\zeta(z)=\sum_{n=-N}^{N}A_n\left[(n+1)z^{n+1}+\left(n+\frac{1}{2}\right)(a_2-a_1)z^n-na_1a_2z^{n-1}\right] \quad (4-185)$$

$$\eta(z)=\sum_{n=-N}^{N}B_nnz^{n-1} \quad (4-186)$$

式(4－180)与式(4－181)以及它们的一阶导函数式(4－183)与式(4－184)在图4－12所示复连通域中均为单值函数，故位移单值条件可以自动满足。

将式(4－180)与式(4－181)代入式(4－105)、式(4－106)与式(4－111)，经分离实部与虚部，可得应力分量与位移分量的表达式如下：

$$\sigma_{ij}=\sum_{n=-N}^{N}A_n^{R}e_{nij}^{R}+\sum_{n=-N}^{N}A_n^{I}e_{nij}^{I}+\sum_{n=-N}^{N}B_n^{R}f_{nij}^{R}+\sum_{n=-N}^{N}B_n^{I}f_{nij}^{I} \quad (4-187)$$

$$u_i=\sum_{n=-N}^{N}A_n^{R}g_{ni}^{R}+\sum_{n=-N}^{N}A_n^{I}g_{ni}^{I}+\sum_{n=-N}^{N}B_n^{R}h_{ni}^{R}+\sum_{n=-N}^{N}B_n^{I}h_{ni}^{I} \quad (4-188)$$

这里，$e_{nij}^{R},\cdots,h_{nij}^{I}$ 均为极坐标 r 与 θ 的已知函数。裂纹两端 A 与 B 的应力强度因子为

$$\left.\begin{aligned}K_{\mathrm{I},A}-\mathrm{i}K_{\mathrm{II},A}&=2\sqrt{2\pi}\lim_{z\to a_1}\left[\sqrt{(z-a_1)}\varphi'(z)\right]\\K_{\mathrm{I},B}-\mathrm{i}K_{\mathrm{II},B}&=2\sqrt{2\pi}\lim_{z\to a_2}\left[\sqrt{(z+a_2)}\varphi'(z)\right]\end{aligned}\right\} \quad (4-189)$$

4.5.2　应力场与位移场最小二乘解法

式(4－187)与式(4－188)所给出的应力与位移分量表达式已

经满足所有的基本方程、裂纹表面的静力边界条件与位移单值条件。在 4.2 节、4.3 节与 4.4 节中，板的表面边界条件系由以最小势能原理为基础的变分方法予以满足。本节以最小二乘方法满足以上的边界条件，同时由此确定式(4-187)与式(4-188)中的未知系数。

板的表面边界条件可表示如下：

$$\sigma_{ij}l_j = \bar{p}_i \qquad (\text{在 } S_p \text{ 上}) \tag{4-190}$$

$$u_i = \bar{u}_i \qquad (\text{在 } S_u \text{ 上}) \tag{4-191}$$

这里，S_p 是给定面力 $\bar{p}_i$ 的静力边界；S_u 是给定位移 $\bar{u}_i$ 的位移边界；l_i 是板的表面方向余弦。

边界上误差的平方积分 Δ 为

$$\Delta = \int_{S_p}(\sigma_{ij}l_j - \bar{p}_i)(\sigma_{ik}l_k - \bar{p}_i)\mathrm{d}s + \int_{S_u}(u_i - \bar{u}_i)(u_i - \bar{u}_i)\mathrm{d}s \tag{4-192}$$

对于与裂纹及其延长线对称的张开型裂纹问题，式(4-187)与式(4-188)可简化如下：

$$\sigma_{ij} = \sum_{n=-N}^{N} A_n^R e_{nij}^R + \sum_{n=-N}^{N} B_n^R f_{nij}^R \tag{4-193}$$

$$u_i = \sum_{n=-N}^{N} A_n^R g_{ni}^R + \sum_{n=-N}^{N} B_n^R h_{ni}^R \tag{4-194}$$

使 Δ 取最小值，有

$$\frac{\partial\Delta}{\partial A_m^R} = 0, \qquad \frac{\partial\Delta}{\partial B_m^R} = 0 \qquad (m = -N,\cdots,0,\cdots,N) \tag{4-195}$$

上式可写成如下形式：

$$\sum_{n=-N}^{N} \alpha_{nm}A_n^R + \sum_{n=-N}^{N} \beta_{nm}B_n^R = P_m \tag{4-196}$$

$$\sum_{n=-N}^{N} \beta_{mn}A_n^R + \sum_{n=-N}^{N} \gamma_{nm}B_n^R = Q_m \tag{4-197}$$

$$m = -N,\cdots,0,\cdots,N$$



由以上 $4N+2$ 个方程,可以确定 $4N+2$ 个待定系数。在式(4-196)与式(4-197)中

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_{nm} &= \int_{S_p} e_{nij}^{R} e_{mik}^{R} l_j l_k \mathrm{d}s + \int_{S_u} g_{ni}^{R} g_{mi}^{R} \mathrm{d}s \\
\beta_{nm} &= \int_{S_p} f_{nij}^{R} e_{mik}^{R} l_j l_k \mathrm{d}s + \int_{S_u} h_{ni}^{R} g_{mi}^{R} \mathrm{d}s \\
\beta_{mn} &= \int_{S_p} e_{nij}^{R} f_{mik}^{R} l_j l_k \mathrm{d}s + \int_{S_u} g_{ni}^{R} h_{mi}^{R} \mathrm{d}s \\
\gamma_{nm} &= \int_{S_p} f_{nij}^{R} f_{mik}^{R} l_j l_k \mathrm{d}s + \int_{S_u} h_{ni}^{R} h_{mi}^{R} \mathrm{d}s \\
P_m &= \int_{S_p} \bar{p}_i e_{mik}^{R} l_k \mathrm{d}s + \int_{S_u} \bar{u}_i g_{mi}^{R} \mathrm{d}s \\
Q_m &= \int_{S_p} \bar{p}_i f_{mik}^{R} l_k \mathrm{d}s + \int_{S_u} \bar{u}_i h_{mi}^{R} \mathrm{d}s
\end{aligned}\right\} \qquad (4-198)$$

4.5.3 收敛试验

为了验证最小二乘方法的有效性,需进行收敛性试验。考虑图 4-13 所示含孔边双侧等长裂纹板,其收敛情况列于表 4-11。

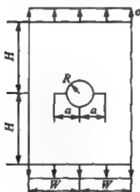


图 4-13 含孔边双侧等长裂纹板

表 4-11 含孔边双侧等长裂纹板的 $K_{\mathrm{I}}/(\sigma\sqrt{\pi W})$

$(H/W=2, R/W=0.25)$

N	9	10	11	12	参考文献[4.5]
$a/W=0.4$	0.766 8	0.766 9	0.766 7	0.766 8	0.766 8
$a/W=0.8$	1.673 1	1.689 0	1.690 5	1.682 2	1.703 3

4.5.4 计算结果

下面,将应用解析-最小二乘方法所得的关于含孔边双侧不等长裂纹矩形板的计算结果以曲线族的形式示于图 4-14、图 4-15 与图 4-16。

图 4-14 量纲为 1 的应力强度因子随量纲为 1 的裂纹尺寸的变化情况
(孔边双侧不等长裂纹, $H/W=2$, $R/W=0.1$)

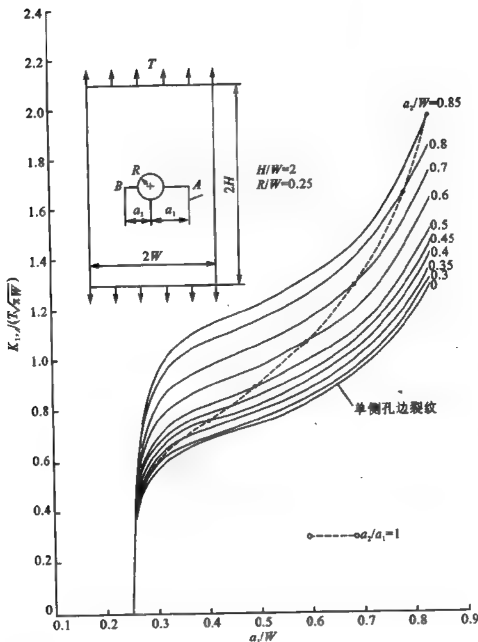


图 4-15 量纲为 1 的应力强度因子随量纲为 1 的裂纹尺寸的变化情况

(孔边双侧不等长裂纹，$H/W=2$，$R/W=0.25$)



图 4-16　量纲为 1 的应力强度因子随量纲为 1 的裂纹尺寸的变化情况

（孔边双侧不等长裂纹，$H/W=2$，$R/W=0.5$）

解析变分方法是由本书主编及其研究生朱刚毅于 1982 年首先提出的[4.5]。此方法不仅计算效率高，而且适用范围广。它不仅可用于求解二维问题，亦可用于求解三维问题，详见参考文献[4.6]与 [4.7]。

参考文献

[4.1] FEDDERN G. Criterions of Fracture Included Fracture Mechanics. Proc. 3rd International Congress on Fracture Vol. Ⅲ, 1971.

[4.2] 陈篪，蔡其巩. 工程断裂力学. 北京：国防工业出版社，1977.

[4.3] 中国航空研究院主编. 应力强度因子手册. 增订版. 北京：科学出版社，1993.

[4.4] PETERSON R E. Stress Concentration Factors. New York: WILEY－International Publication，1974.

[4.5] 朱刚毅，张行. 求解应力强度因子的复变-变分方法. 北京航空学院学报，1982(1).

[4.6] WU S, ZHANG X. Analysis of Stress Intensity Factors for Three Dimensional Finite Cracked Bodies by a Variational Alternating Method. Computational Mechanics, 1989(5):23-32.

[4.7] WU S, ZHANG X, HE Q. Functional Variable Displacement Method in Analysis of Singularity near the Corner Point in a Three Dimensional Cracked Solid. Eng. Frac. Mech., 1988, 31(2):191-200.

[4.8] ENGLAND A H. Complex Variable Methods in Elasticity. WILEY-INTERSCTENCE, 1971.

[4.9] 赖俊彪，张行，何庆芝. 分析有限大板内部开裂板的复变-变分方法及应用. 航空学报，1989，10(5):214-220.

[4.10] 赖俊彪，张行，何庆芝. 含孔边裂纹有限大板的解析变分解法. 航空学报，1990，11(9):496-504.

[4.11] LAI J, ZHANG X, HE Q. The Complex Variable－Variational Method for Analyzing Finite Internally Cracked Plates and Its Application. Chinese Journal of Aeronautics, 1990, 3(2):107-114.

[4.12] LAI J, ZHANG X, SCHIJVE J. An Investigation of Hole－Edge Crack Problem by a Combined Complex Variable and Least Square Method. Int. J. Engineering Fracture Mechanics, 1991, 39(4).

第5章 二维应力强度因子的解析变分解法——含边缘裂纹各向异性板

众所周知，轧制金属板材具有一定的各向异性特点，而单向纤维增强复合材料的各向异性特点则尤为突出。本章和第6章将把解析变分方法加以推广与发展，用于求解含裂纹各向异性板应力强度因子。本章首先引用解析方法得到含边缘裂纹各向异性板的通解，然后应用变分原理、广义变分原理与分区广义变分原理分别求解含单侧边缘裂纹板、对称双侧边缘裂纹板以及非对称双侧边缘裂纹板的应力强度因子。

5.1 各向异性平面问题支配方程及其复变函数通解

5.1.1 各向异性平面问题支配方程

在平面应力情况下，各向异性材料的应力与应变关系具有如下形式：

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= a_{11}\sigma_{xx} + a_{12}\sigma_{yy} + a_{16}\sigma_{xy} \\ \varepsilon_{yy} &= a_{21}\sigma_{xx} + a_{22}\sigma_{yy} + a_{26}\sigma_{xy} \\ 2\varepsilon_{xy} &= a_{61}\sigma_{xx} + a_{62}\sigma_{yy} + a_{66}\sigma_{xy} \end{aligned}\right\} \tag{5-1}$$

这时，以应力函数 A 表示的协调方程具有如下形式[5.1]：



$$a_{22}\frac{\partial^4 A}{\partial x^4}-2a_{26}\frac{\partial^4 A}{\partial x^3\partial y}+(2a_{12}+a_{66})\frac{\partial^4 A}{\partial x^2\partial y^2}-2a_{16}\frac{\partial^4 A}{\partial x\partial y^3}+a_{11}\frac{\partial^4 A}{\partial y^4}=0 \tag{5-2}$$

在平面应变情况下，各向异性材料的应力与应变关系具有如下形式：

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_{xx}&=b_{11}\sigma_{xx}+b_{12}\sigma_{yy}+b_{16}\sigma_{xy}\\\varepsilon_{yy}&=b_{21}\sigma_{xx}+b_{22}\sigma_{yy}+b_{26}\sigma_{xy}\\2\varepsilon_{xy}&=b_{61}\sigma_{xx}+b_{62}\sigma_{yy}+b_{66}\sigma_{xy}\end{aligned}\right\} \tag{5-3}$$

式中

$$b_{ij}=a_{ij}-\frac{a_{i3}a_{j3}}{a_{33}}\qquad(i,j=1,2,6) \tag{5-4}$$

同时，协调方程相应地变成

$$b_{22}\frac{\partial^4 A}{\partial x^4}-2b_{26}\frac{\partial^4 A}{\partial x^3\partial y}+(2b_{12}+b_{66})\frac{\partial^4 A}{\partial x^2\partial y^2}-2b_{16}\frac{\partial^4 A}{\partial x\partial y^3}+b_{11}\frac{\partial^4 A}{\partial y^4}=0 \tag{5-5}$$

显然，在各向异性情况下，平衡方程、几何方程与边界条件均与各向同性材料情况相同，即

① A 与应力分量 σ_{xx}，σ_{yy}，σ_{xy}之间存在如下的平衡方程关系：

$$\sigma_{xx}=\frac{\partial^2 A}{\partial y^2},\qquad\sigma_{yy}=\frac{\partial^2 A}{\partial x^2},\qquad\sigma_{xy}=-\frac{\partial^2 A}{\partial x\partial y} \tag{5-6}$$

② 应变分量 ε_{xx}，ε_{yy}，ε_{xy}与位移分量 u_x，u_y 之间存在如下的几何关系：

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u_x}{\partial x},\qquad\varepsilon_{yy}=\frac{\partial u_y}{\partial y}\\&\varepsilon_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)\end{aligned}\right\} \tag{5-7}$$

且元素刚体转动分量为



$$\omega_z = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) \tag{5-8}$$

③ 平面问题的边界条件可表达为

$$u_x = \bar{u}_x, \quad u_y = \bar{u}_y \quad (\text{在 } S_u \text{ 上}) \tag{5-9}$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{xx}l + \sigma_{yx}m &= \bar{p}_x \\ \sigma_{xy}l + \sigma_{yy}m &= \bar{p}_y \end{aligned}\right\} \quad (\text{在 } S_p \text{ 上}) \tag{5-10}$$

式中，$\bar{u}_x$，$\bar{u}_y$ 与 $\bar{p}_x$，$\bar{p}_y$ 分别为在边界 S_u 与 S_p 上给定的位移与面力分量；l 与 m 为边界外法线方向余弦。

5.1.2 通解的复变函数表达式

下面研究四阶偏微分方程式(5－2)的通解。引入广义复变量 z 如下：

$$z = x + \mu y \tag{5-11}$$

式中，μ 为复常数

$$\mu = \alpha + \beta \mathrm{i} \tag{5-12}$$

将应力函数 A 写成如下广义复变函数形式：

$$A = F(z) + \bar{F}(\bar{z}) \tag{5-13}$$

上式可以保证应力函数为实函数。

将式(5－13)代入式(5－2)，可得

$$a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22} = 0 \tag{5-14}$$

由此可见，只要 μ 是代数方程式(5－14)的根，则由式(5－13)所给出的 A 就是微分方程式(5－2)的解。

根据弹性常数之间的关系，可能存在以下两种情况。

(1) μ 的所有根均不相等

$$\left.\begin{aligned} \mu_1 &= \alpha_1 + \beta_1 \mathrm{i}, \quad & \mu_2 &= \alpha_2 + \beta_2 \mathrm{i} \\ \mu_3 &= \alpha_1 - \beta_1 \mathrm{i}, \quad & \mu_4 &= \alpha_2 - \beta_2 \mathrm{i} \end{aligned}\right\} \tag{5-15}$$



式中，α_1，β_1，α_2 与 β_2 均为实数。

(2) μ 的所有根成对相等

$$\mu_1 = \mu_2 = \alpha + \beta \mathrm{i}, \quad \mu_3 = \mu_4 = \alpha - \beta \mathrm{i} \tag{5-16}$$

对于各向同性材料，有

$$\mu_1 = \mu_2 = \mathrm{i}, \quad \mu_3 = \mu_4 = -\mathrm{i} \tag{5-17}$$

如果材料是正交各向异性，而且坐标轴平行于材料的弹性主轴，则

$$a_{16} = 0, \quad a_{26} = 0 \tag{5-18}$$

此时，可能存在以下三种情况。

① μ_1 与 μ_2 为不等的虚数，即

$$\mu_1 = \beta_1 \mathrm{i}, \quad \mu_2 = \beta_2 \mathrm{i} \tag{5-19}$$

② μ_1 与 μ_2 为相等的虚数，即

$$\mu_1 = \beta \mathrm{i}, \quad \mu_2 = \beta \mathrm{i} \tag{5-20}$$

③ μ_1 与 μ_2 具有如下关系：

$$\mu_1 = \alpha + \beta \mathrm{i}, \quad \mu_2 = -\alpha + \beta \mathrm{i} \tag{5-21}$$

对于 μ 的所有根均不相等的情况，应力函数的通解为

$$A = F_1(z_1) + \overline{F_1(z_1)} + F_2(z_2) + \overline{F_2(z_2)} \tag{5-22}$$

式中

$$z_j = x + \mu_j y \tag{5-23}$$

将式(5-22)代入式(5-6)，并令

$$\varphi(z_1) = \frac{\mathrm{d}F_1}{\mathrm{d}z_1} = F_1'(z_1), \quad \psi(z_2) = \frac{\mathrm{d}F_2}{\mathrm{d}z_2} = F_2'(z_2) \tag{5-24}$$

则可得到应力分量的复变函数表达式如下：

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \mu_1^2 \varphi'(z_1) + \mu_2^2 \psi'(z_2) + \overline{\mu_1^2 \varphi'(z_1)} + \overline{\mu_2^2 \psi'(z_2)} \\ \sigma_{yy} &= \varphi'(z_1) + \psi'(z_2) + \overline{\varphi'(z_1)} + \overline{\psi'(z_2)} \\ -\sigma_{xy} &= \mu_1 \varphi'(z_1) + \mu_2 \psi'(z_2) + \overline{\mu_1 \varphi'(z_1)} + \overline{\mu_2 \psi'(z_2)} \end{aligned}\right\} \tag{5-25}$$

下面研究位移分量的复变函数表达式。设



$$\left.\begin{aligned} u_x &= \xi_x(z_1) + \eta_x(z_2) + \overline{\xi_x(z_1)} + \overline{\eta_x(z_2)} \\ u_y &= \xi_y(z_1) + \eta_y(z_2) + \overline{\xi_y(z_1)} + \overline{\eta_y(z_2)} \end{aligned}\right\} \tag{5-26}$$

将式(5-26)代入式(5-7),可得

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \xi'_x(z_1) + \eta'_x(z_2) + \overline{\xi'_x(z_1)} + \overline{\eta'_x(z_2)} \\ \varepsilon_{yy} &= \mu_1\xi'_y(z_1) + \mu_2\eta'_y(z_2) + \bar{\mu}_1\,\overline{\xi'_y(z_1)} + \bar{\mu}_2\,\overline{\eta'_y(z_2)} \\ 2\varepsilon_{xy} &= \xi'_y(z_1) + \eta'_y(z_2) + \overline{\xi'_y(z_1)} + \overline{\eta'_y(z_2)} + \\ &\quad \mu_1\xi'_x(z_1) + \mu_2\eta'_x(z_2) + \\ &\quad \bar{\mu}_1\,\overline{\xi'_x(z_1)} + \bar{\mu}_2\,\overline{\eta'_x(z_2)} \end{aligned}\right\} \tag{5-27}$$

将式(5-25)代入式(5-1)的前两式,并将所得结果与式(5-27)的前两式进行对比,可取

$$\left.\begin{aligned} \xi'_x(z_1) &= p_1\varphi'(z_1), \qquad \eta'_x(z_2) = p_2\psi'(z_2) \\ \xi'_y(z_1) &= q_1\varphi'(z_1), \qquad \eta'_y(z_2) = q_2\psi'(z_2) \end{aligned}\right\} \tag{5-28}$$

式中

$$p_j = a_{11}\mu_j^2 + a_{12} - a_{16}\mu_j \tag{5-29}$$

$$\mu_j q_j = a_{21}\mu_j^2 + a_{22} - a_{26}\mu_j \tag{5-30}$$

积分式(5-28)并将所得结果代入式(5-26),则得位移分量的复变函数表达式如下:

$$\left.\begin{aligned} u_x &= p_1\varphi(z_1) + p_2\psi(z_2) + \bar{p}_1\,\overline{\varphi(z_1)} + \bar{p}_2\,\overline{\psi(z_2)} \\ u_y &= q_1\varphi(z_1) + q_2\psi(z_2) + \bar{q}_1\,\overline{\varphi(z_1)} + \bar{q}_2\,\overline{\psi(z_2)} \end{aligned}\right\} \tag{5-31}$$

将式(5-25)代入式(5-1)的第三式,将式(5-31)代入式(5-7)的第三式,并将所得结果进行对比,则可得式(5-14)。由于μ_j是该方程的根,故此式即变为恒等式。式(5-31)中略去了与变形无关的积分常数,式(5-25)与式(5-31)称为列赫尼斯基(Lexницкии)的应力分量与位移分量的表达式。



5.2 含边缘裂纹有限大板的解析变分解法

5.2.1 满足裂纹表面边界条件的解析解

按照 5.1 节建立的各向异性平面问题弹性理论，应力分量和位移分量可用复变函数 $\varphi(z_1)$ 与 $\psi(z_2)$ 表示如下：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{xx} &= 2\mathrm{Re}\left[\mu_1^2\varphi'(z_1)+\mu_2^2\psi'(z_2)\right]\\ \sigma_{yy} &= 2\mathrm{Re}\left[\varphi'(z_1)+\psi'(z_2)\right]\\ \sigma_{xy} &= -2\mathrm{Re}\left[\mu_1\varphi'(z_1)+\mu_2\psi'(z_2)\right]\end{aligned}\right\} \tag{5-32}$$

$$\left.\begin{aligned}u_x &= 2\mathrm{Re}\left[p_1\varphi(z_1)+p_2\psi(z_2)\right]\\ u_y &= 2\mathrm{Re}\left[q_1\varphi(z_1)+q_2\psi(z_2)\right]\end{aligned}\right\} \tag{5-33}$$

式(5-32)和(5-33)已经满足平面问题的所有基本方程。

下面建立裂纹表面的边界条件，并由此确定复变函数 $\varphi(z_1)$ 与 $\psi(z_2)$ 的构造形式。对于图 5-1 所示的含边缘裂纹板，裂纹上、下表面的面力自由边界条件为

$$\sigma_{xy}^{(+)} = \sigma_{xy}^{(-)} = 0, \qquad \sigma_{yy}^{(+)} = \sigma_{yy}^{(-)} = 0 \tag{5-34}$$

为了便于研究，现将上述两个复变函数分为如下两部分[5.2,5.3]：

$$\left.\begin{aligned}\varphi'(z_1) &= \varphi_1'(z_1)+\varphi_2'(z_1)\\ \psi'(z_2) &= \psi_1'(z_2)+\psi_2'(z_2)\end{aligned}\right\} \tag{5-35}$$

这样，应力场也被分成相应的两部分。

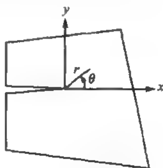


图 5-1 单边边缘裂纹板

第一应力场系由 $\varphi_1'(z_1)$ 与 $\psi_1'(z_2)$ 所控制，它们满足在韧带上切应力 σ_{xy} 为零的条件，即

$$\sigma_{xy} = 0 \tag{5-36}$$

由式(5－32)可知，这个条件可由下式得到保证，即

$$\mu_1\varphi_1'(\tau) + \mu_2\psi_1'(\tau) = 0 \tag{5-37}$$

式中，τ 表示 z_1 与 z_2 在 x 轴上的值。

第二应力场系由 $\varphi_2'(z_1)$ 与 $\psi_2'(z_2)$ 所控制，它们满足在韧带上正应力 σ_{yy} 为零的条件，即

$$\sigma_{yy} = 0 \tag{5-38}$$

由式(5－32)，这个条件可由下式得到保证，即

$$\varphi_2'(\tau) + \psi_2'(\tau) = 0 \tag{5-39}$$

实际上，这里并未对复变函数 $\varphi(z_1)$ 与 $\psi(z_2)$ 施加任何限制。

首先分析第一应力场。

根据式(5－32)与式(5－35)，裂纹表面边界条件式(5－34)中的第一式可由下式得到保证，即

$$\mu_1\varphi_1'^{(+)}(\tau) + \mu_2\psi_1'^{(+)}(\tau) = \bar{\mu}_1\bar{\varphi}_1'^{(-)}(\tau) + \bar{\mu}_2\bar{\psi}_1'^{(-)}(\tau) = 0 \tag{5-40}$$

$$\mu_1\varphi_1'^{(-)}(\tau) + \mu_2\psi_1'^{(-)}(\tau) = \bar{\mu}_1\bar{\varphi}_1'^{(+)}(\tau) + \bar{\mu}_2\bar{\psi}_1'^{(+)}(\tau) = 0 \tag{5-41}$$

根据式(5－32)，裂纹表面边界条件式(5－34)中的第二式具有如下形式：

$$\varphi_1'^{(+)}(\tau) + \psi_1'^{(+)}(\tau) + \bar{\varphi}_1'^{(-)}(\tau) + \bar{\psi}_1'^{(-)}(\tau) = 0 \tag{5-42}$$

$$\varphi_1'^{(-)}(\tau) + \psi_1'^{(-)}(\tau) + \bar{\varphi}_1'^{(+)}(\tau) + \bar{\psi}_1'^{(+)}(\tau) = 0 \tag{5-43}$$

从式(5－40)与式(5－41)，解出 $\psi_1'^{(+)}(\tau)$，$\bar{\psi}_1'^{(+)}(\tau)$，$\psi_1'^{(-)}(\tau)$ 与 $\bar{\psi}_1'^{(-)}(\tau)$，并代入式(5－42)与式(5－43)，可得

$$\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2}\varphi_1'^{(+)}(\tau) + \frac{\bar{\mu}_2-\bar{\mu}_1}{\bar{\mu}_2}\bar{\varphi}_1'^{(-)}(\tau) = 0 \tag{5-44}$$

$$\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2}\varphi_1'^{(-)}(\tau) + \frac{\bar{\mu}_2-\bar{\mu}_1}{\bar{\mu}_2}\bar{\varphi}_1'^{(+)}(\tau) = 0 \tag{5-45}$$

将式(5－44)与式(5－45)分别相加、减，则有



$$\left[\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2}\varphi_1'(\tau)-\frac{\bar{\mu}_2-\bar{\mu}_1}{\bar{\mu}_2}\bar{\varphi}_1'(\tau)\right]^{(+)}-$$

$$\left[\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2}\varphi_1'(\tau)-\frac{\bar{\mu}_2-\bar{\mu}_1}{\bar{\mu}_2}\bar{\varphi}_1'(\tau)\right]^{(-)}=0 \qquad (5-46)$$

$$\left[\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2}\varphi_1'(\tau)+\frac{\bar{\mu}_2-\bar{\mu}_1}{\bar{\mu}_2}\bar{\varphi}_1'(\tau)\right]^{(+)}+$$

$$\left[\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2}\varphi_1'(\tau)+\frac{\bar{\mu}_2-\bar{\mu}_1}{\bar{\mu}_2}\bar{\varphi}_1'(\tau)\right]^{(-)}=0 \qquad (5-47)$$

为了满足式(5-46)与式(5-47)，可设

$$\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2}\varphi_1'(z_1)-\frac{\bar{\mu}_2-\bar{\mu}_1}{\bar{\mu}_2}\bar{\varphi}_1'(z_1)=2g_1(z_1) \qquad (5-48)$$

$$\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2}\varphi_1'(z_1)+\frac{\bar{\mu}_2-\bar{\mu}_1}{\bar{\mu}_2}\bar{\varphi}_1'(z_1)=2z^{-1/2}f_1(z_1) \qquad (5-49)$$

式中

$$f_1(z_1)=\sum_{n=0}^{N}F_{1n}z_1^n,\qquad g_1(z_1)=\sum_{n=0}^{N}G_{1n}z_1^n \qquad (5-50)$$

显然，式(5-48)满足式(5-46)所提出的条件。下面证明，式(5-49)满足式(5-47)所提出的条件。由5.1.2节得知

$$z_j=x+\mu_j y=x+\alpha_j y+\mathrm{i}\beta_j y \qquad (5-51)$$

令

$$x_j=x+\alpha_j y,\qquad y_j=\beta_j y \qquad (5-52)$$

则可将复变量z_j写成如下形式：

$$z_j=x_j+\mathrm{i}y_j=r_j\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_j}=r_j(\cos\theta_j+\mathrm{i}\sin\theta_j) \qquad (5-53)$$

式中

$$r_j=\sqrt{x_j^2+y_j^2}=r\sqrt{(\cos\theta+\alpha\sin\theta)^2+(\beta\sin\theta)^2} \qquad (5-54)$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta_j&=\frac{x_j}{r_j}=\frac{\cos\theta+\alpha\sin\theta}{\sqrt{(\cos\theta+\alpha\sin\theta)^2+(\beta\sin\theta)^2}}\\ \sin\theta_j&=\frac{y_j}{r_j}=\frac{\beta\sin\theta}{\sqrt{(\cos\theta+\alpha\sin\theta)^2+(\beta\sin\theta)^2}}\end{aligned}\right\} \qquad (5-55)$$



从而有

$$z_j^{-1/2} = r_j^{-1/2} e^{-i\frac{\theta}{2}} \tag{5-56}$$

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{-\pi}} z_j^{-1/2} f_j(z_j) = \mp i r_j^{-1/2} f_j(\tau) \tag{5-57}$$

于是，可以证明，式(5-49)满足式(5-47)所提出的条件。

由式(5-48)与式(5-49)可以解出

$$\frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2} \varphi'_1(z_1) = z_1^{-1/2} f_1(z_1) + g_1(z_1) \tag{5-58}$$

$$\frac{\bar{\mu}_2 - \bar{\mu}_1}{\bar{\mu}_2} \bar{\varphi}'_1(z_1) = z_1^{-1/2} f_1(z_1) - g_1(z_1) \tag{5-59}$$

将式(5-50)代入式(5-58)与式(5-59)，经比较可知

$$F_{1n} = \bar{F}_{1n}, \qquad G_{1n} = -\bar{G}_{1n} \tag{5-60}$$

从式(5-40)与式(5-41)解出 $\varphi_1'^{(+)}(\tau)$，$\bar{\varphi}_1'^{(+)}(\tau)$，$\varphi_1'^{(-)}(\tau)$与$\bar{\varphi}_1'^{(-)}(\tau)$，经过类似推导，可得

$$\frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1} \psi'_1(z_2) = z_2^{-1/2} f_1^*(z_2) + g_1^*(z_2) \tag{5-61}$$

$$\frac{\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2}{\bar{\mu}_1} \bar{\psi}'_1(z_2) = z_2^{-1/2} f_1^*(z_2) - g_1^*(z_2) \tag{5-62}$$

式中

$$f_1^*(z_2) = \sum_{n=0}^{N} F_{1n}^* z_2^n, \qquad g_1^*(z_2) = \sum_{n=0}^{N} G_{1n}^* z_2^n \tag{5-63}$$

$$F_{1n}^* = \bar{F}_{1n}^*, \qquad G_{1n}^* = -\bar{G}_{1n}^* \tag{5-64}$$

将式(5-58)与式(5-61)代入式(5-37)，并且考虑到式(5-50)与式(5-63)，有

$$F_{1n} = F_{1n}^*, \qquad G_{1n} = G_{1n}^* \tag{5-65}$$

然后分析第二应力场。

根据式(5-32)与式(5-35)，裂纹表面边界条件式(5-34)中的第二式可由下式得到保证，即

$$\varphi_2'^{(+)}(\tau) + \psi_2'^{(+)}(\tau) = \bar{\varphi}_2'^{(-)}(\tau) + \bar{\psi}_2'^{(-)}(\tau) = 0 \tag{5-66}$$

$$\varphi_2'^{(-)}(\tau) + \psi_2'^{(-)}(\tau) = \bar{\varphi}_2'^{(+)}(\tau) + \bar{\psi}_2'^{(+)}(\tau) = 0 \tag{5-67}$$



根据式(5-32)，裂纹表面边界条件式(5-34)中的第一式具有如下形式：

$$\mu_1\varphi_2'^{(+)}(\tau)+\mu_2\psi_2'^{(+)}(\tau)+\bar{\mu}_1\bar{\varphi}_2'^{(-)}(\tau)+\bar{\mu}_2\psi_2'^{(-)}(\tau)=0 \tag{5-68}$$

$$\mu_1\varphi_2'^{(-)}(\tau)+\mu_2\psi_2'^{(-)}(\tau)+\bar{\mu}_1\bar{\varphi}_2'^{(+)}(\tau)+\bar{\mu}_2\bar{\psi}_2'^{(+)}(\tau)=0 \tag{5-69}$$

从式(5-66)与式(5-67)解出 $\psi_2'^{(+)}(\tau)$，$\bar{\psi}_2'^{(+)}(\tau)$，$\psi_2'^{(-)}(\tau)$与$\psi_2'^{(-)}(\tau)$，并代人式(5-68)与式(5-69)，再将所得两式分别相加、减，则有

$$[(\mu_2-\mu_1)\varphi_2'(\tau)+(\bar{\mu}_2-\bar{\mu}_1)\bar{\varphi}_2'(\tau)]^{(+)}+$$
$$[(\mu_2-\mu_1)\varphi_2'(\tau)+(\bar{\mu}_2-\bar{\mu}_1)\bar{\varphi}_2'(\tau)]^{(-)}=0 \tag{5-70}$$

$$[(\mu_2-\mu_1)\varphi_2'(\tau)-(\bar{\mu}_2-\bar{\mu}_1)\bar{\varphi}_2'(\tau)]^{(+)}-$$
$$[(\mu_2-\mu_1)\varphi_2'(\tau)-(\mu_2-\mu_1)\bar{\varphi}_2'(\tau)]^{(-)}=0 \tag{5-71}$$

仿照前面，满足式(5-70)与式(5-71)的解为

$$(\mu_2-\mu_1)\varphi_2'(z_1)=z_1^{-1/2}f_2(z_1)+g_2(z_1) \tag{5-72}$$

$$(\bar{\mu}_2-\bar{\mu}_1)\bar{\varphi}_2'(z_1)=z_1^{-1/2}f_2(z_1)-g_2(z_1) \tag{5-73}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} f_2(z_1)&=\sum_{n=0}^{N}F_{2n}z_1^n \\ g_2(z_1)&=\sum_{n=0}^{N}G_{2n}z_1^n \end{aligned}\right\} \tag{5-74}$$

将式(5-74)代人式(5-72)与式(5-73)，经比较后可得

$$F_{2n}=\bar{F}_{2n},\qquad G_{2n}=-\bar{G}_{2n} \tag{5-75}$$

从式(5-66)与式(5-67)解出 $\varphi_2'^{(+)}(\tau)$，$\varphi_2'^{(+)}(\tau)$，$\varphi_2'^{(-)}(\tau)$与$\bar{\varphi}_2'^{(-)}(\tau)$，经过类似推导，可得

$$(\mu_1-\mu_2)\psi_2'(z_2)=z_2^{-1/2}f_2^*(z_2)+g_2^*(z_2) \tag{5-76}$$

$$(\bar{\mu}_1-\bar{\mu}_2)\bar{\psi}_2'(z_2)=z_2^{-1/2}f_2^*(z_2)-g_2^*(z_2) \tag{5-77}$$

式中



$$f_2^*(z_2) = \sum_{n=0}^{N} F_{2n}^* z_2^n, \qquad g_2^*(z_2) = \sum_{n=0}^{N} G_{2n}^* z_2^n \quad (5-78)$$

同时

$$F_{2n}^* = \bar{F}_{2n}^*, \qquad G_{2n}^* = -\bar{G}_{2n}^* \quad (5-79)$$

将式(5-72)与式(5-76)代入式(5-39),并且注意到式(5-74)与式(5-78),有

$$F_{2n} = F_{2n}^*, \qquad G_{2n} = G_{2n}^* \quad (5-80)$$

将以上求得的 $\varphi_1'(z_1)$,$\varphi_2'(z_1)$,$\psi_1'(z_2)$与 $\psi_2'(z_2)$的表达式代入式(5-35),再将所得结果代入式(5-32),可得满足裂纹表面边界条件的应力表达式。对所得 $\varphi'(z_1)$与 $\psi'(z_2)$进行积分求出 $\varphi(z_1)$与 $\psi(z_2)$,并将所得结果代入式(5-33),可得满足上述条件的位移表达式。由于 F_{1n}和 F_{2n}是实数,G_{1n}与 G_{2n}是虚数,故可引入以下实数

$$\left.\begin{aligned} H_{1n} &= F_{1n}, & H_{2n} &= -\mathrm{i}G_{1n} \\ H_{3n} &= F_{2n}, & H_{4n} &= -\mathrm{i}G_{2n} \end{aligned}\right\} \quad (5-81)$$

于是,应力分量与位移分量可写成如下形式:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sum_{n=0}^{N}\sum_{l=1}^{4} H_{ln} R_{xxn}^{(l)} \\ \sigma_{yy} &= \sum_{n=0}^{N}\sum_{l=1}^{4} H_{ln} R_{yyn}^{(l)} \\ \sigma_{xy} &= \sum_{n=0}^{N}\sum_{l=1}^{4} H_{ln} R_{xyn}^{(l)} \end{aligned}\right\} \quad (5-82)$$

$$\left.\begin{aligned} u_x &= \sum_{n=0}^{N}\sum_{l=1}^{4} H_{ln} S_{xn}^{(l)} \\ u_y &= \sum_{n=0}^{N}\sum_{l=1}^{4} H_{ln} S_{yn}^{(l)} \end{aligned}\right\} \quad (5-83)$$

式中,$R_{xxn}^{(l)}$,…,$S_{yn}^{(l)}$均为 r_1,r_2,θ_1 和 θ_2 的已知函数,并以材料常数作为参数。

现将函数 $R_{xxn}^{(l)}$,…,$S_{yn}^{(l)}$的具体表达形式列出如下:



$$
\left.\begin{aligned}
R_{ijn}^{(1)} &= A_{ij1}^{(R)} r_1^{n-\frac{1}{2}} \cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta_1 + B_{ij1}^{(R)} r_1^{n-\frac{1}{2}} \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta_1 + \\
&\quad A_{ij2}^{(R)} r_2^{n-\frac{1}{2}} \cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta_2 + B_{ij2}^{(R)} r_2^{n-\frac{1}{2}} \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta_2 \\
R_{ijn}^{(3)} &= C_{ij1}^{(R)} r_1^{n-\frac{1}{2}} \cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta_1 + D_{ij1}^{(R)} r_1^{n-\frac{1}{2}} \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta_1 + \\
&\quad C_{ij2}^{(R)} r_2^{n-\frac{1}{2}} \cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta_2 + D_{ij2}^{(R)} r_2^{n-\frac{1}{2}} \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta_2 \\
R_{ijn}^{(2)} &= -A_{ij1}^{(R)} r_1^n \sin n\theta_1 + B_{ij1}^{(R)} r_1^n \cos n\theta_1 - \\
&\quad A_{ij2}^{(R)} r_2^n \sin n\theta_2 + B_{ij2}^{(R)} r_2^n \cos n\theta_2 \\
R_{ijn}^{(4)} &= -C_{ij1}^{(R)} r_1^n \sin n\theta_1 + D_{ij1}^{(R)} r_1^n \cos n\theta_1 - \\
&\quad C_{ij2}^{(R)} r_2^n \sin n\theta_2 + D_{ij2}^{(R)} r_2^n \cos n\theta_2
\end{aligned}\right\} \tag{5-84}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
S_n^{(1)} &= A_{i1}^{(S)} \frac{r_1^{n+\frac{1}{2}}}{n+\frac{1}{2}} \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta_1 + B_{i1}^{(S)} \frac{r_1^{n+\frac{1}{2}}}{n+\frac{1}{2}} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta_1 + \\
&\quad A_{i2}^{(S)} \frac{r_2^{n+\frac{1}{2}}}{n+\frac{1}{2}} \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta_2 + B_{i2}^{(S)} \frac{r_2^{n+\frac{1}{2}}}{n+\frac{1}{2}} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta_2 \\
S_n^{(3)} &= C_{i1}^{(S)} \frac{r_1^{n+\frac{1}{2}}}{n+\frac{1}{2}} \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta_1 + D_{i1}^{(S)} \frac{r_1^{n+\frac{1}{2}}}{n+\frac{1}{2}} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta_1 + \\
&\quad C_{i2}^{(S)} \frac{r_2^{n+\frac{1}{2}}}{n+\frac{1}{2}} \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta_2 + D_{i2}^{(S)} \frac{r_2^{n+\frac{1}{2}}}{n+\frac{1}{2}} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta_2 \\
S_n^{(2)} &= -A_{i1}^{(S)} \frac{r_1^{n+1}}{n+1} \sin(n+1)\theta_1 + B_{i1}^{(S)} \frac{r_1^{n+1}}{n+1} \cos(n+1)\theta_1 - \\
&\quad A_{i2}^{(S)} \frac{r_2^{n+1}}{n+1} \sin(n+1)\theta_2 + B_{i2}^{(S)} \frac{r_2^{n+1}}{n+1} \cos(n+1)\theta_2 \\
S_n^{(4)} &= -C_{i1}^{(S)} \frac{r_1^{n+1}}{n+1} \sin(n+1)\theta_1 + D_{i1}^{(S)} \frac{r_2^{n+1}}{n+1} \cos(n+1)\theta_1 - \\
&\quad C_{i2}^{(S)} \frac{r_2^{n+1}}{n+1} \sin(n+1)\theta_2 + D_{i2}^{(S)} \frac{r_2^{n+1}}{n+1} \cos(n+1)\theta_2
\end{aligned}\right\} \tag{5-85}
$$

式中，所有系数均为材料弹性常数的函数。

可以证明,如果材料是正交各向异性的,而且裂纹与材料弹性主轴重合,则 $R_{xxn}^{(2)}, R_{xxn}^{(3)}, R_{yyn}^{(2)}, R_{yyn}^{(3)}, R_{xyn}^{(1)}, R_{xyn}^{(4)}, S_{xn}^{(2)}, S_{xn}^{(3)}, S_{yn}^{(1)}$ 与 $S_{yn}^{(4)}$ 是反对称的,而其余是对称的。因此,如果构件几何外形与外力关于裂纹对称,则

$$H_{2n} = 0, \qquad H_{3n} = 0 \tag{5-86}$$

如果构件几何外形关于裂纹对称,而外力关于裂纹反对称,则

$$H_{1n} = 0, \qquad H_{4n} = 0 \tag{5-87}$$

由式(5-82)与式(5-84)可以看到,在应力的展开式中 $n=0$ 的四项内,两项具有奇异性,奇异性的阶次为$-1/2$,这两项的系数为 H_{10} 和 H_{30}。其余各项为非奇异项。

当 $r\to 0$ 时,$r_1\to 0$,$r_2\to 0$,两个奇异项趋于无穷大,所有非奇异项均趋于零。从而得出裂纹尖端附近的近场应力分量与位移分量的表达式如下:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} = {} & H_{10}\left[r_1^{-1/2}\left(A_{ij1}^{(R)}\cos\frac{1}{2}\theta_1 + B_{ij1}^{(R)}\sin\frac{1}{2}\theta_1\right) + r_2^{-1/2}\left(A_{ij2}^{(R)}\cos\frac{1}{2}\theta_2 + \right.\right.\\ & \left.\left. B_{ij2}^{(R)}\sin\frac{1}{2}\theta_2\right)\right] + H_{30}\left[r_1^{-1/2}\left(C_{ij1}^{(R)}\cos\frac{1}{2}\theta_1 + D_{ij1}^{(R)}\sin\frac{1}{2}\theta_1\right) + \right.\\ & \left. r_2^{-1/2}\left(C_{ij2}^{(R)}\cos\frac{1}{2}\theta_2 + D_{ij2}^{(R)}\sin\frac{1}{2}\theta_2\right)\right]\end{aligned} \tag{5-88}$$

$$\begin{aligned}u_i = {} & 2H_{10}\left[r_1^{1/2}\left(A_{i1}^{(S)}\cos\frac{1}{2}\theta_1 + B_{i1}^{(S)}\sin\frac{1}{2}\theta_1\right) + r_2^{1/2}\left(A_{i2}^{(S)}\cos\frac{1}{2}\theta_2 + \right.\right.\\ & \left.\left. B_{i2}^{(S)}\sin\frac{1}{2}\theta_2\right)\right] + 2H_{30}\left[r_1^{1/2}\left(C_{i1}^{(S)}\cos\frac{1}{2}\theta_1 + D_{i1}^{(S)}\sin\frac{1}{2}\theta_1\right) + \right.\\ & \left. r_2^{1/2}\left(C_{i2}^{(S)}\cos\frac{1}{2}\theta_2 + D_{i2}^{(S)}\sin\frac{1}{2}\theta_2\right)\right]\end{aligned} \tag{5-89}$$

利用式(5-88),可得计算应力强度因子的公式如下:

$$\left.\begin{aligned} K_{\mathrm{I}} &= \lim_{\substack{\theta=0\\ r\to 0}}\sqrt{2\pi r}\,\sigma_{yy} = 2\sqrt{2\pi}H_{10} \\ K_{\mathrm{II}} &= \lim_{\substack{\theta=0\\ r\to 0}}\sqrt{2\pi r}\,\sigma_{xy} = 2\sqrt{2\pi}H_{30} \end{aligned}\right\} \tag{5-90}$$



5.2.2 满足绕钉孔位移单值条件与合力边界条件的解析表达式

对于含钉载孔的多连通域情况，为考虑绕钉孔处的合力平衡条件和位移单值条件，引入含对数函数附加项[5 1]。从而有

$$\left.\begin{aligned}\varphi(z_1) &= \sum_{n=1}^{N} E_{1n}\ln(z_1 - z_1^{(n)}) + \varphi_1(z_1) + \varphi_2(z_1)\\ \psi(z_2) &= \sum_{n=1}^{N} E_{2n}\ln(z_2 - z_2^{(n)}) + \psi_1(z_2) + \psi_2(z_2)\end{aligned}\right\}\quad(5-91)$$

式中，$\varphi_1(z_1)$，$\varphi_2(z_1)$，$\psi_1(z_2)$和$\psi_2(z_2)$系由5.2.1节决定的单值函数；N为钉孔的个数；$z_k^{(n)}(k=1,2)$为第n个钉孔内任意点的复坐标，即

$$z_k^{(n)} = x^{(n)} + \mu_k y^{(n)} = r_k^{(n)}(\cos\theta_k^{(n)} + \mathrm{i}\sin\theta_k^{(n)})\quad(5-92)$$

式(5-91)中的待定常数E_{1n}和E_{2n}取决于钉孔处的合力平衡条件和位移单值条件。

设C_n为包围第n个钉孔的任意闭合周界(见图5-2)，作用在C_n上的合力分量R_{xn}与R_{yn}可表达为

$$\left.\begin{aligned}R_{xn} &= \oint_{C_n} T_x \mathrm{d}s\\ R_{yn} &= \oint_{C_n} T_y \mathrm{d}s\end{aligned}\right\}\quad(5-93)$$

式中，T_x和T_y分别为作用在C_n上的面力沿x和y方向的集度，并可由沿孔边的静力平衡条件求得如下：

$$\left.\begin{aligned}T_x &= \sigma_{xx}l + \sigma_{xy}m = \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial^2 A}{\partial x\partial y}\left(-\frac{\partial x}{\partial s}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial A}{\partial y}\\ T_y &= \sigma_{xy}l + \sigma_{yy}m = -\frac{\partial^2 A}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\left(-\frac{\partial x}{\partial s}\right) = -\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial A}{\partial x}\end{aligned}\right\}\quad(5-94)$$

将式(5-94)代入式(5-93)并考虑到式(5-22)、式(5-24)与

式(5-91),可得

$$R_{xn} = R_{1n} = [\mu_1\varphi(z_1) + \bar{\mu}_1\bar{\varphi}(\bar{z}_1) + \mu_2\psi(z_2) + \bar{\mu}_2\bar{\psi}(\bar{z}_2)]C_n = 2\pi\mathrm{i}(E_{1n}\mu_1 - \bar{E}_{1n}\bar{\mu}_1 + E_{2n}\mu_2 - \bar{E}_{2n}\bar{\mu}_2) \qquad (5-95)$$

$$R_{yn} = R_{2n} = -[\varphi(z_1) + \bar{\varphi}(\bar{z}_1) + \psi(z_2) + \bar{\psi}(\bar{z}_2)]C_n = -2\pi\mathrm{i}(E_{1n} - \bar{E}_{1n} + E_{2n} - \bar{E}_{2n}) \qquad (5-96)$$

考虑到式(5-95)及式(5-96),钉孔处的合力平衡条件可表示为

$$-\frac{R_{1n} + \mathrm{i}R_{2n}}{2\pi} = (1+\mathrm{i}\mu_1)E_{1n} - (1+\mathrm{i}\bar{\mu}_1)\bar{E}_{1n} + (1+\mathrm{i}\mu_2)E_{2n} - (1+\mathrm{i}\bar{\mu}_2)\bar{E}_{2n} \qquad (5-97)$$

钉孔处的位移单值条件应该是绕钉孔一周位移矢量的增量,即

$$\Delta(u_x + \mathrm{i}u_y)\big|_{c_n} = 0 \qquad (5-98)$$

根据式(5-33)及(5-91),有

$$\Delta(u_x + \mathrm{i}u_y)\big|_{c_n} = (p_1 + \mathrm{i}q_1)E_{1n} - (\bar{p}_1 + \mathrm{i}\bar{q}_1)\bar{E}_{1n} + (p_2 + \mathrm{i}q_2)E_{2n} - (\bar{p}_2 + \mathrm{i}\bar{q}_2)\bar{E}_{2n} = 0 \qquad (5-99)$$

对于正交各向异性板,有

$$\mu_k = \mathrm{i}\beta_k, \qquad p_k^{\mathrm{I}} = q_k^{\mathrm{R}} = 0 \qquad (k = 1,2) \qquad (5-100)$$

将式(5-100)代入式(5-97)和式(5-99),并分离实部及虚部,可以得出

$$\left.\begin{aligned} E_{1n}^{\mathrm{R}} &= q_2^{\mathrm{I}}R_{1n}/c_1, & E_{1n}^{\mathrm{I}} &= p_2^{\mathrm{R}}R_{2n}/c_2 \\ E_{2n}^{\mathrm{R}} &= -q_1^{\mathrm{I}}R_{1n}/c_1, & E_{2n}^{\mathrm{I}} &= -p_1^{\mathrm{R}}R_{2n}/c_2 \end{aligned}\right\} \qquad (5-101)$$

式中

$$c_1 = 4\pi(\beta_1 q_2^{\mathrm{I}} - \beta_2 q_1^{\mathrm{I}}), \qquad c_2 = 4\pi(p_1^{\mathrm{R}} - p_2^{\mathrm{R}}) \qquad (5-102)$$

在以上各式中,上标 R 和 I 分别表示复系数的实部和虚部。

令

$$\left.\begin{aligned} H_{1m} &= F_{1m}, & H_{2m} &= -\mathrm{i}G_{1m} \\ H_{3m} &= F_{2m}, & H_{4m} &= -\mathrm{i}G_{2m} \end{aligned}\right\} \qquad (5-103)$$

并根据式(5-32)、式(5-33)和式(5-91),可将应力及位移分量



写为如下形式：

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{*} + \sigma_{ij}^{**}, \qquad u_i = u_i^{*} + u_i^{**} \tag{5-104}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{ij}^{*} &= \sum_{m=0}^{M}\sum_{l=1}^{4} H_{lm}R_{ijm}^{(l)}, \qquad & u_i^{*} &= \sum_{m=0}^{M}\sum_{l=1}^{4} H_{lm}S_{im}^{(l)} \\ \sigma_{ij}^{**} &= \sum_{k=1}^{2}\sum_{n=1}^{N} e_{ijkn}R_{kn}, \qquad & u_i^{**} &= \sum_{k=1}^{2}\sum_{n=1}^{N} f_{ikn}R_{kn} \end{aligned}\right\} \tag{5-105}$$

式中，$R_{ijm}^{(l)}$，$S_{im}^{(l)}$，e_{ijkn}和f_{ikn}为复坐标z_k（即r_k和θ_k）以及材料性质的函数。应当指出，基本项σ_{ij}^{*}与u_i^{*}已满足裂纹表面边界条件。

图 5-2 给出复连通域边缘裂纹板的示意图。

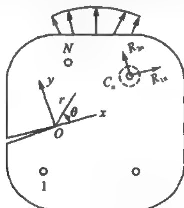


图 5-2 受钉传载荷边缘裂纹板

5.2.3 应力强度因子的解析变分解法

以上导出的含钉载孔和边缘裂纹板应力和位移表达式满足了所有弹性力学基本方程、绕钉载孔的合力平衡条件和位移单值条件。应力和位移表达式中的待定系数应取决于板的边界条件。下面采用变分方法，通过势能原理，使静力边界条件得到满足，由势能原理可知[5.4.5.5]



$$\delta \Pi = -\int_V (\sigma_{ij,j} + F_i)\delta u_i^* \, dV + \int_{S_T} (\sigma_{ij} n_j - T_i)\delta u_i^* \, ds + \int_{S_c} (\sigma_{ij} n_j)\delta u_i^* \, ds + \sum_{n=1}^{N} \left\{ \int_{S_n} (\sigma_{ij} n_j - T_i)\delta u_i^* \, ds \right\} = 0 \qquad (5-106)$$

式中，F_i和T_i分别为体力和面力分量，S_T为静力边界，$S_n(n=1,2,\cdots,N)$为钉孔边界，S_c为裂纹表面，而n_j表示边界外法线方向余弦。大家知道，应力和位移的级数表达式(5－104)与式(5－105)已满足以位移表示的平衡方程，而且其中应力基本项σ_{ij}^*已满足由式(5－36)和式(5－38)所表示的裂纹表面边界条件，从而

$$-\int_V (\sigma_{ij,j} + F_i)\delta u_i^* \, dV + \int_{S_c} (\sigma_{ij}^* n_j)\delta u_i^* \, ds = 0 \qquad (5-107)$$

在小钉孔的情况下，沿钉孔表面，可以认为位移δu_i^*为一常数。而且级数表达式(5－104)与式(5－105)已满足由式(5－97)所表示的合力平衡条件。于是

$$\int_{S_n} (\sigma_{ij} n_j - T_i)\delta u_i^* \, ds = \left[\int_{S_n} (\sigma_{ij} n_j - T_i) ds \right] \delta u_i^* = 0 \qquad (5-108)$$

从而，变分方程式(5－106)可简化为如下形式：

$$\int_{S_T} \sigma_{ij}^* n_j \delta u_i^* \, ds = -\int_{S_T} (\sigma_{ij}^{**} n_j - T_i)\delta u_i^* \, ds - \int_{S_c} \sigma_{ij}^{**} n_j \delta u_i^* \, ds \qquad (5-109)$$

应当指出，在不含钉传载荷的情况下，由于裂纹表面的边界条件已精确满足，故在变分方程式(5－109)中无须沿裂纹表面进行积分。

将应力和位移表达式(5－105)代入式(5－109)，并考虑到各待定系数变分的独立性，可得出求解$H_{lm}(l=1,2,3,4;m=0,1,2,\cdots,M)$的代数方程组。

对于裂纹与材料主轴重合的情况，如果板的几何外形与载荷关于裂纹为对称的（Ⅰ型裂纹问题），可以证明H_{2m}，H_{3m}应等于



零。于是，求解待定系数 H_{1m} 和 $H_{4m}(m=0,1,2,\cdots,M)$ 的代数方程可写为如下形式：

$$\begin{bmatrix} K^{(11)} & K^{(14)} \\ K^{(41)} & K^{(44)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \{H^{(1)}\} \\ \{H^{(4)}\} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \{Q^{(1)}\} \\ \{Q^{(4)}\} \end{bmatrix} \tag{5-110}$$

这里

$$\left.\begin{aligned} K_{m}^{(lk)} &= \int_{S_T}[(R_{xxm}^{(k)}n_x+R_{xym}^{(k)}n_y)S_{xi}^{(l)}+(R_{xym}^{(k)}n_x+R_{yym}^{(k)}n_y)S_{yi}^{(l)}]\mathrm{d}s \\ Q_{i}^{(l)} &= \int_{S_T}(T_xS_{xi}^{(l)}+T_yS_{yi}^{(l)})\mathrm{d}s+ \\ &\quad \sum_{n=1}^{N}\int_{S_T+S_c}\Big\{\Big[\Big(\sum_{j=1}^{2}e_{xxjn}R_{jn}\Big)n_x+\Big(\sum_{j=1}^{2}e_{xyjn}R_{jn}\Big)n_y\Big]S_{xi}^{(l)}+ \\ &\quad \Big[\Big(\sum_{j=1}^{2}e_{xyjn}R_{jn}\Big)n_x+\Big(\sum_{j=1}^{2}e_{yyjn}R_{jn}\Big)n_y\Big]S_{yi}^{(l)}\Big\}\mathrm{d}s \\ &\quad (l,k=1,4;\qquad i,m=0,1,2,\cdots,M) \end{aligned}\right\} \tag{5-111}$$

对于正交各向异性板，可导出上式中的角分布函数如下：

$$\left.\begin{aligned} (R_{xxm}^{(1)},R_{yym}^{(1)}) &= \sum_{K=1}^{2}(C_{xK}^{(1)},C_{yK}^{(1)})r_K^{m-\frac{1}{2}}\cos\Big(m-\frac{1}{2}\Big)\theta_K \\ (R_{xxm}^{(4)},R_{yym}^{(4)}) &= \sum_{K=1}^{2}(C_{xK}^{(4)},C_{yK}^{(4)})r_K^{m}\cos m\theta_K \\ R_{xym}^{(1)} &= \sum_{K=1}^{2}C_{xyK}^{(1)}r_K^{m-\frac{1}{2}}\sin\Big(m-\frac{1}{2}\Big)\theta_K,\qquad R_{xym}^{(4)}=\sum_{K=1}^{2}C_{xyK}^{(4)}r_K^{m}\sin m\theta_K \\ S_{xm}^{(1)} &= \sum_{K=1}^{2}D_{xK}^{(1)}\frac{r_K^{m+\frac{1}{2}}}{m+\frac{1}{2}}\cos\Big(m+\frac{1}{2}\Big)\theta_K \\ S_{xm}^{(4)} &= \sum_{K=1}^{2}D_{xK}^{(4)}\frac{r_K^{m+1}}{m+1}\cos(m+1)\theta_K \\ S_{ym}^{(1)} &= \sum_{K=1}^{2}D_{yK}^{(1)}\frac{r_K^{m+\frac{1}{2}}}{m+\frac{1}{2}}\sin\Big(m+\frac{1}{2}\Big)\theta_K \\ S_{ym}^{(4)} &= \sum_{K=1}^{2}D_{yK}^{(4)}\frac{r_K^{m+1}}{m+1}\sin(m+1)\theta_K \end{aligned}\right\} \tag{5-112}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}
&C_{x1}^{(1)}=\frac{-2\beta_1^2\beta_2}{\beta_2-\beta_1},\quad C_{y1}^{(1)}=\frac{2\beta_2}{\beta_2-\beta_1},\quad C_{xy1}^{(1)}=\frac{2\beta_1\beta_2}{\beta_2-\beta_1}\\
&C_{x2}^{(1)}=\frac{2\beta_1\beta_2^2}{\beta_2-\beta_1},\quad C_{y2}^{(1)}=\frac{-2\beta_1}{\beta_2-\beta_1},\quad C_{xy2}^{(1)}=\frac{-2\beta_1\beta_2}{\beta_2-\beta_1}\\
&C_{x1}^{(4)}=\frac{-2\beta_1^2}{\beta_2-\beta_1},\quad C_{y1}^{(4)}=\frac{2}{\beta_2-\beta_1},\quad C_{xy1}^{(4)}=\frac{2\beta_1}{\beta_2-\beta_1}\\
&C_{x2}^{(4)}=\frac{2\beta_2^2}{\beta_2-\beta_1},\quad C_{y2}^{(4)}=\frac{-2}{\beta_2-\beta_1},\quad C_{xy2}^{(4)}=\frac{-2\beta_2}{\beta_2-\beta_1}\\
&D_{x1}^{(1)}=\frac{2\beta_2(-a_{11}\beta_1^2+a_{12})}{\beta_2-\beta_1},\quad D_{y1}^{(1)}=\frac{-2\beta_2(a_{12}\beta_1^2-a_{22})}{\beta_1(\beta_2-\beta_1)}\\
&D_{x2}^{(1)}=\frac{-2\beta_1(-a_{11}\beta_2^2+a_{12})}{\beta_2-\beta_1},\quad D_{y2}^{(1)}=\frac{2\beta_1(a_{12}\beta_2^2-a_{22})}{\beta_2(\beta_2-\beta_1)}\\
&D_{x1}^{(4)}=\frac{2(-a_{11}\beta_1^2+a_{12})}{\beta_2-\beta_1},D_{y1}^{(4)}=\frac{-2(a_{12}\beta_1^2-a_{22})}{\beta_1(\beta_2-\beta_1)}\\
&D_{x2}^{(4)}=\frac{-2(-a_{11}\beta_2^2+a_{12})}{\beta_2-\beta_1},\quad D_{y2}^{(4)}=\frac{2(a_{12}\beta_2^2-a_{22})}{\beta_2(\beta_2-\beta_1)}
\end{aligned}\right\}\tag{5-113}$$

以及

$$\left.\begin{aligned}
e_{xx1n}&=-\frac{2}{c_1}\left(\frac{\beta_1^2q_2^{\mathrm{I}}V_{1n}}{V_{1n}^2+W_{1n}^2}-\frac{\beta_2^2q_1^{\mathrm{I}}V_{2n}}{V_{2n}^2+W_{2n}^2}\right)\\
e_{xx2n}&=-\frac{2}{c_2}\left(\frac{\beta_1^2p_2^{\mathrm{R}}W_{1n}}{V_{1n}^2+W_{1n}^2}-\frac{\beta_2^2p_1^{\mathrm{R}}W_{2n}}{V_{2n}^2+W_{2n}^2}\right)\\
e_{yy1n}&=\frac{2}{c_1}\left(\frac{q_2^{\mathrm{I}}V_{1n}}{V_{1n}^2+W_{1n}^2}-\frac{q_1^{\mathrm{I}}V_{2n}}{V_{2n}^2+W_{2n}^2}\right)\\
e_{yy2n}&=\frac{2}{c_2}\left(\frac{p_2^{\mathrm{R}}W_{1n}}{V_{1n}^2+W_{1n}^2}-\frac{p_1^{\mathrm{R}}W_{2n}}{V_{2n}^2+W_{2n}^2}\right)\\
e_{xy1n}&=-\frac{2}{c_1}\left(\frac{\beta_1q_2^{\mathrm{I}}W_{1n}}{V_{1n}^2+W_{1n}^2}-\frac{\beta_2q_1^{\mathrm{I}}W_{2n}}{V_{2n}^2+W_{2n}^2}\right)\\
e_{xy2n}&=\frac{2}{c_2}\left(\frac{\beta_1p_2^{\mathrm{R}}V_{1n}}{V_{1n}^2+W_{1n}^2}-\frac{\beta_2p_1^{\mathrm{R}}V_{2n}}{V_{2n}^2+W_{2n}^2}\right)
\end{aligned}\right\}\tag{5-114}$$



且

$$\left.\begin{aligned} V_{Kn} &= r_K \cos\theta_K - r_K^{(n)} \cos\theta_K^{(n)} \\ W_{Kn} &= r_K \sin\theta_K - r_K^{(n)} \sin\theta_K^{(n)} \end{aligned}\right\} (K=1,2) \quad (5-115)$$

于是，通过求解式(5-110)，即可得到待定系数。对于此Ⅰ型裂纹问题，应力强度因子可根据式(5-90)来确定。

5.2.4　数值计算的实例与系统结果

这里所述的方法可用于计算各向同性及正交各向异性含边缘裂纹板的应力强度因子。对于各向同性情况，引入一个 $\varepsilon \ll 1$，使

$$\mu_1 = i\beta_1 = (1-\varepsilon)i, \qquad \mu_2 = i\beta_2 = (1+\varepsilon)i \quad (5-116)$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时，可以证明，所求得的应力场和位移场以及应力强度因子均趋于根据各向同性弹性理论求解所得出的结果。

图 5-3 绘制了在 r^*，φ^* 处承受钉载 P 的具有径向边缘裂纹的圆盘，并设圆盘的半径为 R。对于一系列给定的 ε 值，所求得的量纲为 1 的应力强度因子 $\bar{K}_{\mathrm{I}} = K_{\mathrm{I}}\sqrt{R}/P$，如表 5-1 所列。可以看出，只要 ε 足够小，即可略去它对计算结果的影响。

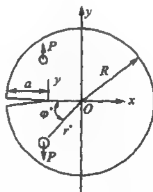


图 5-3　圆形紧凑拉伸试件

表 5-1　边缘裂纹圆盘 $\bar{K}_{\mathrm{I}}$ 与 ε 的关系 ($r^* = 0.4R$)

φ^*/(°) \ ε	0.000 5	0.001	0.005	0.01	0.05
45	3.77	3.76	3.76	3.76	3.79
60	3.28	3.27	3.27	3.27	3.29



参照图 5－3，在数值计算中为考虑圆盘的几何和载荷位置对 $\bar{K}_I$ 的影响，计算由如下各种参数组合而形成的边缘裂纹圆盘的应力强度因子。

$r^*/R = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8,\quad \phi^* = 30°, 45°, 60°, 75°$

针对每一种可能的上述参数的组合，已取得一系列边缘裂纹圆盘的量纲为 1 的应力强度因子 $\bar{K}_I = K_I\sqrt{R}/P$ 的数值解。含边缘裂纹各向同性圆盘的应力强度因子与裂纹长度间的关系如图 5－4中 $\bar{K}_I \sim a/R$ 所示。为进一步研究材料性质对应力强度因子的影响，表 5－2 列出了对应八种不同材料常数受钉载的正交各向异性边缘裂纹圆盘（$a = R$，$r^* = 0.64R$，$\phi^* = 38.6°$）的量纲为 1 的应力强度因子的计算结果，表中 M 为式(5－105)中所示级数的项数。此种圆形紧凑拉伸试件在各向同性的情况下，该量纲为 1 的应力强度因子的数值计算结果等于 6.20，而由菲德恩(Feddern)通过试验所提供的相应结果为 6.24[5,6]。这种数值计算结果与实验结果的一致性是令人满意的。

表 5－2　材料性质对 $\bar{K}_I = K_I\sqrt{R}/P$ 的影响

($W = 1.5R$，$a = R$，$r^* = 0.64R$，$\phi^* = 38.6°$)

M	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
2	2.807	2.369	2.142	2.155	2.377	2.664	1.618	6.207
3	5.220	4.164	4.138	4.121	3.800	5.048	3.110	8.405
4	6.120	5.217	5.174	5.167	4.873	5.927	4.294	8.696
5	6.122	5.295	5.268	5.262	5.080	5.934	4.456	9.052
6	6.127	5.343	5.359	5.227	5.131	5.935	4.955	9.689
7	6.124	5.378	5.396	5.243	5.125	5.938	5.083	9.766
8	6.126	5.369	5.402	5.241	5.171	5.937	5.082	9.763
E_{11}/GPa	200.1	151.6	144.8	144.8	275.8	234.4	122.5	11.7
E_{22}/GPa	199.9	10.6	11.7	11.7	6.9	144.8	1.0	144.8
G_{12}/GPa	76.9	5.6	9.7	9.7	3.5	5.2	4.5	9.7
V_{12}	0.30	0.28	0.21	0.28	0.25	0.24	0.29	0.21



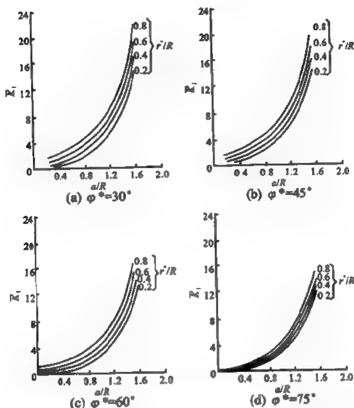


图5-4 圆形紧凑拉伸试件应力强度因子与裂纹长度的关系曲线

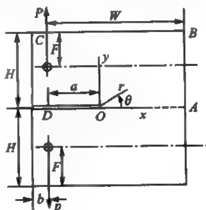


图5-5 矩形紧凑拉伸试件

图5-5表示一个矩形紧凑拉伸试件。参考文献[5.7]给出了由边界配位解法得到的应力强度因子计算结果。该参考文献对试件进行了如下简化：① 作截面通过两个销钉孔中心并切去左边部分；② 以两个抛物线分布形式的切应力作用在右边部分，代替两个钉载 P 的作用。表5-3给出了采用与此完全



相同的计算模型并由解析变分方法所得的量纲为 1 的应力强度因子 $\overline{K}_{\mathrm{I}}=K_{\mathrm{I}}\sqrt{W}/P$ 的计算结果。此外，表中还列出了参考文献[5.7]由边界配位法提供的相应数据，可以看出结果的一致性。然而，正如参考文献[5.8]所指出的，K 值对于边界 C，D 上的受力状态还是敏感的。因此，应该深入探讨这一粗糙的计算模型所带来的误差。由以上分析，可以肯定，采用解析变分方法可以直接分析矩形紧凑拉伸试件而无须引入上述简化模型。表 5-4 给出了根据解析变分解法求解真实试件的计算结果。可以看出，当量纲为 1 的裂纹长度 a/W 低于 0.4 时，由于计算模型（边界条件）的近似性所造成的误差还是较显著的，故在工程上是不能忽视的。图 5-6 提供了具有不同钉载孔位置的矩形紧凑拉伸试件应力强度因子与裂纹长度的关系曲线。

表 5-3　对于参考文献[5.7]计算模型由解析变分解法计算结果与文献结果的比较

($H/W=0.6$, $F/H=0.54$, $b/W=0.25$)

M \ a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
5	3.47	4.33	5.75	7.16	9.35	12.87	18.59
6	3.71	4.53	5.78	7.23	9.47	13.14	19.41
7	3.91	4.75	5.79	7.27	9.56	13.35	20.16
8	3.89	4.74	5.79	7.28	9.60	13.49	20.58
9	3.85	4.74	5.80	7.28	9.62	13.54	20.99
10	3.84	4.73	5.81	7.29	9.63	13.56	20.97
11	3.85	4.74	5.82	7.29	9.63	13.58	21.08
12	3.84	4.74	5.81	7.29	9.63	13.58	21.07
参考文献[5.7]	3.72	4.76	5.85	7.33	9.63	13.58	21.56



(a) H/W=0.6,0.8, F/H=0.5, b/W=0.20

(b) H/W=0.6,0.8, F/H=0.5, b/W=0.25

(c) H/W=0.6,0.8, F/H=0.5, b/W=0.30

(d) H/W=1.0,1.5, F/H=0.5, b/W=0.20

(e) H/W=1.0,1.5, F/H=0.5, b/W=0.25

(f) H/W=1.0,1.5, F/H=0.5, b/W=0.30

图5-6　矩形紧凑拉伸试件应力强度因子与裂纹长度的关系曲线



表 5-4　图 5-5 所示紧凑拉伸试样解析变分解法计算结果[5,8]

($H/W=0.6$, $F/H=0.54$, $b/W=0.25$)

M \ a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
5	2.64	3.72	5.00	6.65	8.97	12.54	17.93
6	2.66	3.77	5.06	6.73	9.13	12.95	18.85
7	2.68	3.81	5.14	6.84	9.26	13.28	19.45
8	2.69	3.82	5.14	6.85	9.29	12.51	19.35
9	2.71	3.82	5.14	6.85	9.30	13.03	19.61
10	2.71	3.83	5.15	6.87	9.30	12.97	19.59
11	2.72	3.83	5.15	6.89	9.31	12.96	19.68
12	2.71	3.83	5.15	6.89	9.30	13.04	19.69

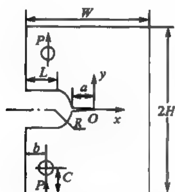
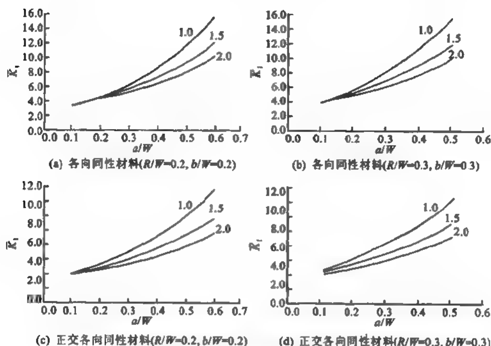


图 5-7　含缺口裂纹的矩形紧凑拉伸试件

图 5-7 表示一个含缺口裂纹的矩形紧凑拉伸试件。图 5-8 给出了求解该试件在各向同性和正交各向异性情况下量纲为 1 的应力强度因子解析变分法的计算结果。这里，正交各向异性材料的弹性常数为 $E_{11}=144.8$ GPa，$E_{22}=11.7$ GPa，$G_{12}=9.7$ GPa，$\nu_{12}=0.21$，且裂纹沿弹性主轴。计算表明，在不同的几何参数下，级数均收敛迅速。从而，利用本方法可有效节省机时。此外，表 5-5 还给出了上述正交各向异性紧凑拉伸试件缺口尺寸对 $\overline{K}_{\mathrm{I}}$ 计算结果的影响。





(a) 各向同性材料(R/W=0.2, b/W=0.2)　(b) 各向同性材料(R/W=0.3, b/W=0.3)

(c) 正交各向同性材料(R/W=0.2, b/W=0.2)　(d) 正交各向同性材料(R/W=0.3, b/W=0.3)

图5-8　含缺口裂纹的矩形紧凑拉伸试件应力强度因子与裂纹长度的关系曲线（H/W=1.0,1.5,2.0,L/W=0.0,c/H=0.5）

表5-5　缺口尺寸对图5-7所示正交各向异性紧凑拉伸试样 $\bar{K}_I$ 的影响（H/W=1.0，R/W=0.2，b/W=0.25，c/H=0.5）

L/W \ a/W	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
0.05	2.63	3.13	3.76	4.52	5.41	6.47
0.10	3.18	3.78	4.53	5.42	6.48	7.70
0.15	3.84	4.56	5.44	6.50	7.72	9.11
0.20	4.64	5.48	6.52	7.75	9.15	10.68

本方法给出的受钉传载荷含边缘裂纹各向异性板应力和位移表达式精确满足所有弹性力学基本方程及各钉孔处力的平衡条件和位移单值条件。应用变分原理，使板的边界条件得以满足。因

此，这是一种半解析、半数值解法。

此种解析变分解法适用于各向异性材料，也适用于各向同性材料。引入小量 ϵ，使 $\mu_1=i\beta_1=(1-\epsilon)i$，$\mu_2=i\beta_2=(1+\epsilon)i$，只要 ϵ 足够小，则可将各向同性材料看作正交各向异性材料的特例[5.9]。

所建立的计算程序可用于求解各种不同几何和载荷情况下的边缘裂纹问题。本方法可简化数据准备工作和有效节省机时。

采用本方法对矩形紧凑拉伸试件的现行计算模型与结果的近似性进行了分析，提供了准确的系统计算结果；对于圆形紧凑拉伸试件，也首次给出了系统的计算结果。

数据计算表明了计算结果的收敛性。承受钉载含单侧边缘裂纹板的数值解与相应的实验结果和相关数值解均吻合得较好。若引入分区广义变分原理，本方法还可用于求解含多个边缘裂纹的问题。

5.3 含边缘裂纹有限大板的解析广义变分解法

5.3.1 广义变分方法

5.1 节和 5.2 节建立了精确满足各向异性板基本微分方程、裂纹表面边界条件以及钉载孔处位移单值条件与合力平衡条件的应力场和位移场的级数表达式，在 5.2.3 节中利用变分原理满足静力边界条件，从而确定应力强度因子。事实上，在 5.2 节中仅讨论了没有位移边界条件的情况。如果在所研究的问题中，存在着位移边界条件，则在以势能原理为基础的变分解法中，位移条件必须精确满足。实际上，这是不可能的。为此，引入广义变分原理，使这一条件在变分意义下得到满足。



根据拉格朗日(Lagrange's)乘子法得出的广义变分方程可以表达为如下的形式[5.1, 5.10, 511]：

$$\delta \Pi = -\int_V (\sigma_{ij,j} + F_i)\delta u_i^* \, dV + \int_{S_T} (\sigma_{ij} n_j - T_i)\delta u_i^* \, ds +$$

$$\int_{S_c} (\sigma_{ij} n_j)\delta u_i^* \, ds + \sum_{n=1}^{N}\left[\int_{S_n} (\sigma_{ij} n_j - T_i)\delta u_i^* \, ds\right] -$$

$$\int_{S_u} (u_i - \bar{u}_i)\delta \sigma_{ij}^* n_j ds = 0 \qquad (5-117)$$

式中，F_i为体力分量；S_T为面力分量(T_i)指定的静力边界；S_u为位移分量$\bar{u}_i$指定的位移边界；$S_n(n=1, 2, \cdots, N)$为钉孔边界；S_c为裂纹表面；n_j为边界外法线方向余弦。这里，u_i^*表示由式(5-105)所定义的位移基本项，它们已满足由式(5-36)和式(5-38)所表示的裂纹表面边界条件。

由于5.2.2节导出的应力和位移级数表达式(5-104)与式(5-105)已满足所有的基本方程，而且其中应力基本项σ_{ij}^*已满足由式(5-36)和式(5-38)所示的裂纹表面边界条件，从而

$$-\int_V (\sigma_{ij,j} + F_i)\delta u_i^* \, dV + \int_{S_c} (\sigma_{ij}^* n_j)\delta u_i^* \, ds = 0 \qquad (5-118)$$

在小钉孔的情况下，沿钉孔表面，可以认为位移δu_i^*为一常数。而且级数表达式(5-104)与式(5-105)已满足由式(5-97)所表示的合力平衡条件。于是

$$\int_{S_n} (\sigma_{ij} n_j - T_i)\delta u_i^* \, ds = \left\{\int_{S_n} (\sigma_{ij} n_j - T_i) ds\right\}\delta u_i^* = 0 \qquad (5-119)$$

从而变分方程(5-117)可简化为如下形式：

$$\int_{S_T} \sigma_{ij}^* n_j \delta u_i^* \, ds - \int_{S_u} u_i^* \delta \sigma_{ij}^* n_j ds =$$

$$-\int_{S_T} (\sigma_{ij}^{**} n_j - T_i)\delta u_i^* \, ds - \int_{S_c} \sigma_{ij}^{**} n_j \delta u_i^* \, ds +$$

$$\int_{S_u} (u_i^{**} - \bar{u}_i)\delta\sigma_{ij}^* n_j ds \qquad (5-120)$$



图 5－9 表示一个承受钉载对称双侧边缘裂纹板。根据对称条件，可以仅考虑板的左部并将它分解为图 5－9 中所示的两种情况：① 钉载板，其裂纹尖端具有已知位移 Δ_1，该位移系由式（5－105）中的 u_i^{**} 所提供，即由钉载所提供；② 无载板，其裂纹尖端具有未知位移 Δ_2，该位移系为满足对称截面合力平衡条件而引出。

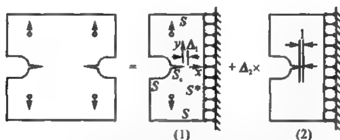


图 5－9　受钉载对称双侧边缘裂纹板及其分解

首先，考虑图 5－9 所示的情况(1)。相应的边界条件可表示如下：

$$
\left.\begin{array}{ll}
\sigma_{ij}n_j = T_i & (\text{在 } S \text{ 上}) \\
\sigma_{2j}n_j = 0,\quad u_1 = 0 & (\text{在 } S^* \text{ 上})
\end{array}\right\} \qquad (5-121)
$$

从而，变分方程式(5－120)具有如下形式：

$$
\int_S \sigma_{ij}^* n_j \delta u_i^* \mathrm{d}s + \int_{S^*} \sigma_{2j}^* n_j \delta u_2^* \mathrm{d}s - \int_{S^*} u_1^* \delta \sigma_{1j}^* n_j \mathrm{d}s =
$$

$$
\int_{S_T} T_i \delta u_i^* \mathrm{d}s - \int_{S+S_c} \sigma_{ij}^{**} n_j \delta u_i^* \mathrm{d}s -
$$

$$
\int_{S^*} \sigma_{2j}^{**} n_j \delta u_2^* \mathrm{d}s + \int_{S^*} u_1^{**} \delta \sigma_{1j}^* n_j \mathrm{d}s \qquad (5-122)
$$

将式(5－105)代入式(5－122)，可得以下关于待定系数 $H_{lm}^{(1)}$ 的线性代数方程组：

$$
\sum_{l=1}^{4}\sum_{m=0}^{M} \alpha_{rslm} H_{lm}^{(1)} = \beta_{rs}^{(1)} \qquad (r = 1,2,3,4,\quad s = 0,1,2,\cdots,M) \qquad (5-123)
$$



式中

$$\left.\begin{aligned}\alpha_{rslm} &= \int_{S_T} R_{ijm}^{(l)} n_j S_{is}^{(r)} \mathrm{d}s + \int_{S^*} R_{2jm}^{(l)} n_j S_{2s}^{(r)} \mathrm{d}s - \int_{S^*} S_{1m}^{(l)} R_{1js}^{(r)} n_j \mathrm{d}s \\ \beta_{rs}^{(1)} &= \int_{S_T} T_i S_{is}^{(r)} \mathrm{d}s - \int_{S_T+S_c} \sigma_{ij}^{**} n_j S_{is}^{(r)} \mathrm{d}s - \\ &\quad \int_{S^*} \sigma_{2j}^{**} n_j S_{2s}^{(r)} \mathrm{d}s + \int_{S^*} u_1^{**} R_{1js}^{(r)} n_j \mathrm{d}s\end{aligned}\right\} \tag{5-124}$$

通过求解方程式(5-123)，情况(1)的应力强度因子可由下式给出，即

$$\left.\begin{aligned}K_{\mathrm{I}}^{(1)} &= \lim_{\substack{\theta\to 0\\ r\to 0}} \sqrt{2\pi r}\,\sigma_{yy} = 2\sqrt{2\pi} H_{10}^{(1)} \\ K_{\mathrm{II}}^{(1)} &= \lim_{\substack{\theta\to 0\\ r\to 0}} \sqrt{2\pi r}\,\sigma_{xy} = 2\sqrt{2\pi} H_{30}^{(1)}\end{aligned}\right\} \tag{5-125}$$

同时，作用在截面 S^* 上的合力为

$$R^{(1)} = \int_{S^*} \sigma_{11}^{(1)} \mathrm{d}s = \int_{S^*} \left(\sum_{l=1}^{4} \sum_{m=0}^{M} R_{xxm}^{(l)} H_{lm}^{(1)} + \sigma_{11}^{**(1)} \right) \mathrm{d}s \tag{5-126}$$

然后，考虑图 5-9 所示的情况(2)。根据相对运动原理，情况(2)在静力上等效于一块无载板，其裂纹尖端固定，而截面 S^* 具有未知位移 Δ_2。为了研究这一问题，首先考虑 $\Delta_2 = 1$ 的情况，如图 5-10所示。此时，相应的边界条件可表示如下：

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_{ij} n_j = 0 && (\text{在 } S \text{ 上}) \\ &\sigma_{2j} n_j = 0, \quad u_1 = -1 && (\text{在 } S^* \text{ 上})\end{aligned}\right\} \tag{5-127}$$

从而，变分方程式(5-120)具有如下形式：

$$\int_S \sigma_{ij}^* n_j \delta u_i^* \mathrm{d}s + \int_{S^*} \sigma_{2j}^* n_j \delta u_2^* \mathrm{d}s - \int_{S^*} u_1^* \delta\sigma_{1j}^* n_j \mathrm{d}s = \int_{S^*} \delta\sigma_{1j}^* n_j \mathrm{d}s \tag{5-128}$$

将式(5-105)代入式(5-128)，可得以下关于待定系数 $H_{lm}^{(2)}$ 的线性代数方程组：

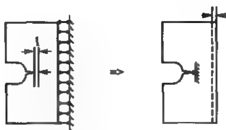


图 5-10 静力等效板

$$\sum_{l=1}^{4}\sum_{m=0}^{M} a_{rslm} H_{lm}^{(2)} = \beta_{rs}^{(2)}$$

$$(r = 1,2,3,4, \qquad s = 0,1,2,\cdots,M)$$

(5-129)

式中

$$\beta_{rs}^{(2)} = \int_{S^*} R_{1js}^{(r)} n_j \mathrm{d}s \tag{5-130}$$

同时

$$K_{\mathrm{I}}^{(2)} = 2\sqrt{2\pi} H_{10}^{(2)}, \qquad K_{\mathrm{II}}^{(2)} = 2\sqrt{2\pi} H_{30}^{(2)} \tag{5-131}$$

$$R^{(2)} = \int_{S^*} \sigma_{11}^{(2)} \mathrm{d}s = \int_{S^*} \left(\sum_{l=1}^{4}\sum_{m=0}^{M} R_{11m}^{(l)} H_{lm}^{(2)} + \sigma_{11}^{**(2)}\right) \mathrm{d}s$$

(5-132)

最后，考虑图 5-9 所示对称双侧边缘裂纹板的真实情况。根据叠加原理，有

$$R^{(1)} + R^{(2)}\Delta_2 = R \tag{5-133}$$

这里，R 是作用在边界 S 上沿 x 轴方向的合力。由式(5-133)即可求得 Δ_2。于是，总应力强度因子为

$$K_{\mathrm{I}} = K_{\mathrm{I}}^{(1)} + K_{\mathrm{I}}^{(2)}\Delta_2, \qquad K_{\mathrm{II}} = K_{\mathrm{II}}^{(1)} + K_{\mathrm{II}}^{(2)}\Delta_2$$

(5-134)

5.3.2 数值计算的实例与系统结果

以上所述计算对称双侧边缘裂纹板应力强度因子的方法可用



于正交各向异性材料，也可用于各向同性材料。对于各向同性情况，引入一个 $\epsilon \ll 1$，使

$$\mu_1 = i\beta_1 = (1-\epsilon)i, \qquad \mu_2 = i\beta_2 = (1+\epsilon)i \tag{5-135}$$

当 $\epsilon \to 0$ 时，同样可以证明，由式(5-105)所求得的应力场和位移场以及应力强度因子均趋于根据各向同性弹性理论求解所得出的结果[5.10]。

为了检验本方法的可靠性，选用如图5-11所示受均匀轴向拉伸对称双侧边缘裂纹各向同性板作为计算实例[5.12]。表5-6列出了量纲为1的应力强度因子 $\bar{K} = K_{\mathrm{I}}/(\sigma\sqrt{\pi a})$ 的计算结果。由本方法所得的结果与参考文献[5.13]所提供的结果相当一致。

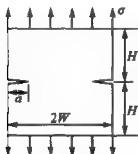


图5-11 承受单向拉伸的对称双侧边缘裂纹板

表5-6 受均匀轴向拉伸对称双侧边缘裂纹各向同性板量纲为1的应力强度因子计算结果比较($H/W=1.0$)

a/W	$\bar{K}_{\mathrm{I}}$	
	本文方法	参考文献[5.12]
0.1	1.14	1.13
0.2	1.19	1.16
0.3	1.23	1.23
0.4	1.28	1.28
0.5	1.34	1.33

进一步，研究图5-12所示由各向同性或正交各向异性材料制成的受钉传载荷对称双侧缺口边缘裂纹板[5.12]。所选取的几何参数如下：

$$H/W = 1.0,\ 1.5,\ 2.0, \qquad R/W = 0.1,\ 0.2,\ 0.3$$

$$b/W = 0.1,\ 0.2,\ 0.3, \qquad c/H = 0.5$$

图5-13至图5-15给出在以上几何参数下各向同性板量纲为1的应力强度因子 $\bar{K}_{\mathrm{I}}$ ($\bar{K}_{\mathrm{I}} = K_{\mathrm{I}}\sqrt{W}/P$)与裂纹尺寸的关系曲线($M=8$)。



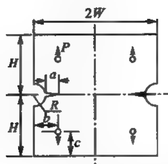
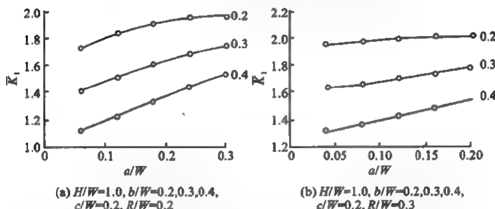


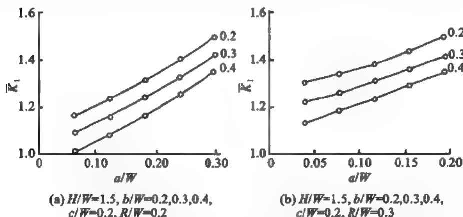
图 5-12　受钉传载荷对称双侧缺口边缘裂纹板



(a) H/W=1.0, b/W=0.2,0.3,0.4, c/W=0.2, R/W=0.2

(b) H/W=1.0, b/W=0.2,0.3,0.4, c/W=0.2, R/W=0.3

图 5-13　图 5-12 所示各向同性板量纲为 1 的应力强度因子 $\bar{K}_I$ ($\bar{K}_I = K_I\sqrt{W}/P$)与量纲为 1 的裂纹长度 a/W 的关系曲线

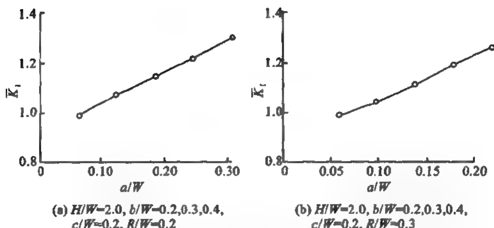


(a) H/W=1.5, b/W=0.2,0.3,0.4, c/W=0.2, R/W=0.2

(b) H/W=1.5, b/W=0.2,0.3,0.4, c/W=0.2, R/W=0.3

图 5-14　图 5-12 所示各向同性板量纲为 1 的应力强度因子 $\bar{K}_I$ ($\bar{K}_I = K_I\sqrt{W}/P$)与量纲为 1 的裂纹长度 a/W 的关系曲线





(a) H/W=2.0, b/W=0.2,0.3,0.4, c/W=0.2, R/W=0.2　　(b) H/W=2.0, b/W=0.2,0.3,0.4, c/W=0.2, R/W=0.3

图 5－15　图 5－12 所示各向同性板量纲为 1 的应力强度因子 $\bar{K}_{\mathrm{I}}$ ($\bar{K}_{\mathrm{I}}=K_{\mathrm{I}}\sqrt{W}/P$)与量纲为 1 的裂纹长度 a/W 的关系曲线

表 5－7 给出了图 5－12 所示正交各向异性板应力强度因子计算结果的收敛性，材料常数 $E_{11}=144.8$ GPa，$E_{22}=11.7$ GPa，$G_{12}=9.7$ GPa，$\nu_{12}=0.12$。表 5－8 至表 5－10 给出在不同几何参数下该正交各向异性材料板量纲为 1 的应力强度因子 $\bar{K}_{\mathrm{I}}$ 随裂纹长度(a/W)的变化关系($M=8$)。

表 5－7　图 5－12 所示正交各向异性板应力强度因子的收敛性
($H/W=1.0$, $R/W=0.1$, $a/W=0.2$, $b/W=0.2$, $c/W=0.4$)

M	4	5	6	7	8	9	10
$\bar{K}_{\mathrm{I}}$	1.004	1.021	1.028	1.024	1.020	1.020	1.019

表 5－8　图 5－12 所示正交各向异性板量纲为 1 的应力强度因子 $\bar{K}_{\mathrm{I}}$ 的计算结果
($R/W=0.1$, $b/W=0.1$, $c/H=0.5$)

H/W \ a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
1.0	1.02	1.14	1.27	1.42	1.64	1.97	2.37
1.5	0.89	1.00	1.12	1.25	1.41	1.60	1.81
2.0	0.88	0.98	1.09	1.20	1.33	1.48	1.66



表 5-9 图 5-12 所示正交各向异性板量纲为 1 的应力强度因子 $\bar{K}_I$ 的计算结果

$(R/W=0.2, b/W=0.2, c/H=0.5)$

H/W \ a/W	1.0	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
1.0	1.02	1.15	1.30	1.51	1.79	2.09
1.5	0.95	1.06	1.19	1.35	1.52	1.71
2.0	0.95	1.05	1.16	1.29	1.44	1.61

表 5-10 图 5-12 所示正交各向异性板量纲为 1 的应力强度因子 $\bar{K}_I$ 的计算结果

$(R/W=0.3, b/W=0.3, c/H=0.5)$

H/W \ a/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
1.0	1.05	1.19	1.38	1.62	1.84
1.5	1.02	1.13	1.28	1.44	1.62
2.0	1.01	1.12	1.25	1.39	1.56

通过对广义变分解法的分析与采用本方法所进行的数值计算，可以得出如下结论：

① 由于所有基本方程与在钉载孔处的位移单值条件与合力平衡条件预先得到满足，故在变分方程中只存在沿板边界的线积分，而没有面积分。

② 数值计算实例表明，由本方法所得结果收敛正确、迅速，故计算节省机时。应着重指出，本方法大量简化了计算前期的准备工作，易于得到系统计算结果。

③ 对于具有钉传载荷的受力情况，这个方法的优点尤为明显。



5.4　含边缘裂纹有限大板的解析分区广义变分解法

5.4.1　分区广义变分方法

图 5－16 表示含双侧非对称边缘裂纹板。为了应用含单侧边缘裂纹板的应力与位移场表达式求解含双侧非对称边缘裂纹板问题，以截面 S^* 作切口，将该板分成两个含单侧边缘裂纹板，如图 5－16所示。

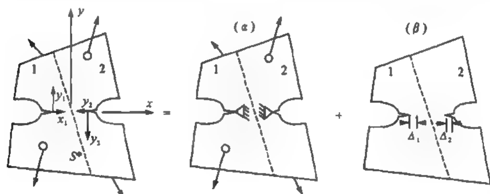


图 5－16　非对称双侧边缘裂纹板及其分解

进一步，建立总体坐标系 x,y，并以$(\nu_i)_K$，$(\tau_{ij})_K$，$(Q_i)_K$，$(n_i)_K$ 分别表示第 K 块板的位移、应力、面力分量与外法线方向余弦。两块板的位移与应力分量表达式，即式(5－105)，已经满足所有基本方程以及在钉载孔处的位移单值条件与合力平衡条件，但还应满足边界条件及交界处的连续条件，即

$$
\left.
\begin{aligned}
&(\tau_{ij}n_j - Q_i)_K = 0 \qquad (\text{在 } S_{QK} \text{ 上}) \\
&(\nu_i - \bar{\nu}_i)_K = 0 \qquad (\text{在 } S_{UK} \text{ 上})
\end{aligned}
\right\} \quad (K = 1,2)
\tag{5-136}
$$



$$(\tau_{ij}n_j)_1+(\tau_{ij}n_j)_2=0,\qquad (\nu_i)_1=(\nu_i)_2\qquad (\text{在 } S^* \text{ 上})\tag{5-137}$$

式中，S_{QK} 和 S_{UK} 分别为第 K 块板的包含裂纹表面在内的静力边界和位移边界。以上边界条件式(5-136)和交界连续条件式(5-137)可通过分区广义变分原理得到满足。根据拉氏乘子法，由泛函的驻值条件得出[5.14, 5.15]

$$\begin{aligned}\delta\Pi=\sum_{K=1}^{2}\Big\{&\int_{S_{QK}}[(\tau_{ij}n_j-Q_i)\delta\nu_i^*]_K\mathrm{d}S_K-\\&\int_{S_{UK}}[(\nu_i-\bar{\nu}_i)\delta\tau_{ij}^*n_j]_K\mathrm{d}S_K+\\&\sum_{n=1}^{N}\int_{S_{nK}}[(\tau_{ij}n_j-Q_i)\delta\nu_i^*]_K\mathrm{d}S_K\Big\}+\\&\int_{S^*}[(\tau_{ij}n_j)_1+(\tau_{ij}n_j)_2](\delta\nu_i^*)_1\mathrm{d}S^*+\\&\int_{S^*}[(\nu_i)_1-(\nu_i)_2](\delta\tau_{ij}^*n_j)_2\mathrm{d}S^*=0\end{aligned}\tag{5-138}$$

应当指出，在本问题中由于所有基本方程预先得到满足，在变分方程(5-138)中仅含沿板边界的线积分，而没有面积分。

在小钉孔的情况下，沿钉孔表面，可以认为位移变分 $\delta\nu_i^*$ 为一常数，而且级数表达式(5-104)与式(5-105)已满足由式(5-97)所表示的合力平衡条件。于是

$$\int_{S_{nK}}(\tau_{ij}n_j-Q_i)\delta\nu_i^*\,\mathrm{d}S_K=\left[\int_{S_{nK}}(\tau_{ij}n_j-Q_i)\mathrm{d}S_K\right](\delta\nu_i^*)_K=0\tag{5-139}$$

从而，变分方程(5-138)可简化为如下形式：

$$\begin{aligned}\delta\Pi=&\sum_{K=1}^{2}\int_{S_{QK}}[(\tau_{ij}n_j-Q_i)\delta\nu_i^*]_K\mathrm{d}S_K-\\&\sum_{K=1}^{2}\int_{S_{UK}}[(\nu_i-\bar{\nu}_i)\delta\tau_{ij}^*n_j]_K\mathrm{d}S_K+\\&\int_{S^*}[(\tau_{ij}n_j)_1+(\tau_{ij}n_j)_2](\delta\nu_i^*)_1\mathrm{d}S^*+\\&\int_{S^*}[(\nu_i)_1-(\nu_i)_2](\delta\tau_{ij}^*n_j)_2\mathrm{d}S^*=0\end{aligned}\tag{5-140}$$



式(5－140)与式(5－136)和式(5－137)是等价的。

在没有位移边界的情况下，载荷本身构成自相平衡力系。本问题可分解为图5－16所示的(α)和(β)两种情况。

首先研究在图5－16中所示情况(α)，它表示裂纹尖端固定的承载板。此时，总体坐标系与局部坐标系中的对应量具有如下关系：

$$\left.\begin{aligned}&(\nu_i)_1=(u_i)_1,\quad(\tau_{ij})_1=(\sigma_{ij})_1,\quad(Q_i)_1=(P_i)_1\\&(\nu_i)_2=-(u_i)_2,\quad(\tau_{ij})_2=(\sigma_{ij})_2,\quad(Q_i)_2=-(P_i)_2\end{aligned}\right\}\tag{5-141}$$

将式(5－141)代入式(5－140)，并注意到总体坐标系中外法线方向余弦与局部坐标系中外法线方向余弦的关系$(n_i)_1=(m_i)_1$与$(n_i)_2=-(m_i)_2$，有变分方程如下：

$$\begin{aligned}&\sum_{K=1}^{2}\int_{S_{QK}}(\sigma_{ij}^{*}m_j\delta u_i^{*})_K\mathrm{d}S_K+\\&\int_{S^*}[(\sigma_{ij}^{*}m_j)_1-(\sigma_{ij}^{*}m_j)_2](\delta u_i^{*})_1\mathrm{d}S^*-\\&\int_{S^*}[(u_i^{*})_1+(u_i^{*})_2]\delta(\sigma_{ij}^{*}m_j)_2\mathrm{d}S^*=\\&\sum_{K=1}^{2}\int_{S_{QK}}(P_i\delta u_i^{*})_K\mathrm{d}S_K-\sum_{K=1}^{2}\int_{S_{QK}}(\sigma_{ij}^{**}m_j\delta u_i^{*})_K\mathrm{d}S_K-\\&\int_{S^*}[(\sigma_{ij}^{**}m_j)_1-(\sigma_{ij}^{**}m_j)_2](\delta u_i^{*})_1\mathrm{d}S^*+\\&\int_{S^*}[(u_i^{**})_1+(u_i^{**})_2]\delta(\sigma_{ij}^{*}m_j)_2\mathrm{d}S^*\end{aligned}\tag{5-142}$$

将式(5－105)代入式(5－142)，可建立求解$(H_{lm}^{(\alpha)})_K$的代数方程组。情况(α)的应力强度因子为

$$K_{\mathrm{I}K}^{(\alpha)}=2\sqrt{2\pi}(H_{10}^{(\alpha)})_K,\quad K_{\mathrm{II}K}^{(\alpha)}=2\sqrt{2\pi}(H_{30}^{(\alpha)})_K\tag{5-143}$$

在切口S^*上，情况(α)的合力沿裂纹方向的分量为

$$R_1^{(\alpha)} = \int_{S^*} (\sigma_{1j}^{(\alpha)} m_j)_1 \mathrm{d}S^* \tag{5-144}$$

然后研究图 5－16 所示情况(β)，它表示裂纹右端与左端分别具有沿 x 轴方向的位移Δ_1 与 Δ_2 的无载板。此时，总体坐标系与局部坐标系中的对应量具有如下关系：

$$\left.\begin{aligned} (\nu_i)_1 &= (u_i)_1 + \delta_{i1}\Delta_1, \quad (\tau_{ij})_1 = (\sigma_{ij})_1, \quad (Q_i)_1 = 0 \\ (\nu_i)_2 &= -(u_i)_2 + \delta_{i1}\Delta_2, \quad (\tau_{ij})_2 - (\sigma_{ij})_2, \quad (Q_i)_2 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{5-145}$$

将式(5－145)代入式(5－140)，可得如下形式的变分方程：

$$\sum_{K=1}^{\mathrm{II}} \int_{S_{QK}} (\sigma_{ij}^* m_j \delta u_i^*)_K \mathrm{d}S_K + \int_{S^*} [(\sigma_{ij}^* m_j)_1 - (\sigma_{ij}^* m_j)_2](\delta u_i^*)_1 \mathrm{d}S^* - \int_{S^*} [(u_i^*)_1 + (u_i^*)_2](\delta\sigma_{ij}^* m_j)_2 \mathrm{d}S^* = 2\Delta\int_{S^*} \delta(\sigma_{1j}^* m_j)_2 \mathrm{d}S^* \tag{5-146}$$

式中，$2\Delta = \Delta_1 - \Delta_2$。将式(5－105)代入式(5－146)并令 $\Delta = 1$，可建立求解$(H_{lm}^{(\beta)})_K$ 的代数方程组。情况(β)的应力强度因子为

$$K_{\mathrm{I}K}^{(\beta)} = 2\sqrt{2\pi}(H_{10}^{(\beta)})_K, \qquad K_{\mathrm{II}K}^{(\beta)} = 2\sqrt{2\pi}(H_{30}^{(\beta)})_K \tag{5-147}$$

在切口 S^* 上，情况(β)的合力沿裂纹方向的分量为

$$R_1^{(\beta)} = \int_{S^*} (\sigma_{1j}^{(\beta)} m_j)_1 \mathrm{d}S^* \tag{5-148}$$

最后研究真实情况。注意到，两个裂纹尖端沿 x 轴方向的相对位移为 2Δ，设板 1 边界 S_{Q1} 的合力沿裂纹方向的分量为 R_1。于是，由叠加原理和平衡方程，可得

$$R_1 = R_1^{(\alpha)} + R_1^{(\beta)}\Delta \tag{5-149}$$

由上式即可确定裂纹尖端沿 x 轴方向的相对位移 2Δ。从而，由叠加原理可得真实情况的应力强度因子如下：



$$K_{\mathrm{I}K} = K_{\mathrm{I}K}^{(\alpha)} + K_{\mathrm{I}K}^{(\beta)}\Delta, \qquad K_{\mathrm{II}K} = K_{\mathrm{II}K}^{(\alpha)} + K_{\mathrm{II}K}^{(\beta)}\Delta \tag{5-150}$$

5.4.2 数值计算的实例与系统结果

以上所述计算非对称双侧边缘裂纹板应力强度因子的方法可用于各向异性材料，也可以用于各向同性材料。如上所述，对于各向同性情况，引入一个 $\varepsilon \ll 1$，并使

$$\mu_1 = \mathrm{i}\beta_i = (1-\varepsilon)\mathrm{i}, \qquad \mu_2 = \mathrm{i}\beta_2 = (1+\varepsilon)\mathrm{i} \tag{5-151}$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时，同样可以证明，所求得的应力场和位移场以及应力强度因子均趋于根据各向同性弹性理论求解所得出的结果。

为了检验本方法的可靠性，选用如图 5-17 所示的受均匀轴向拉伸的含对称双侧边缘裂纹各向同性板作为计算实例[5.14]。表 5-11 列出了量纲为 1 的应力强度因子 $\bar{K} = K_{\mathrm{I}}/(\sigma\sqrt{\pi a})$ 与量纲为 1 的裂纹尺寸 $\bar{a} = a/W$ 的关系。由本方法所得的结果与参考文献[5.13]所提供的结果相当一致，如表 5-11 所列。

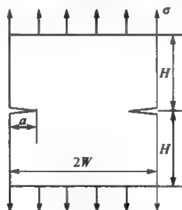


图 5-17 对称双侧边缘裂纹板

进一步，研究图 5-18 所示的受均匀轴向拉伸含非对称双侧边缘裂纹各向同性板[5.14]。所选取的几何参数如下：



$$H/W = 1.0,\ 1.2,\ 1.4$$

$$a_2/W = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5,\ 0.6$$

表 5-11　受均匀轴向拉伸对称双侧边缘裂纹各向同性板量纲为 1 的应力强度因子计算结果比较($H/W=1.0$)

a/W	$\bar{K}_{\mathrm{I}}$	
	本文方法	参考文献[5.13]
0.1	1.14	1.13
0.2	1.17	1.16
0.3	1.23	1.23
0.4	1.28	1.28
0.5	1.33	1.33
0.6	1.39	1.38

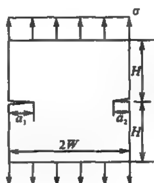


图 5-18　非对称双侧边缘裂纹板

图 5-19 至图 5-21 给出在以上几何参数下各向同性板量纲为 1 的应力强度因子 $\bar{K}_{\mathrm{I}} = K_{\mathrm{I}}/(\sigma\sqrt{\pi a_1})$ 与量纲为 1 的裂纹尺寸的关系曲线。

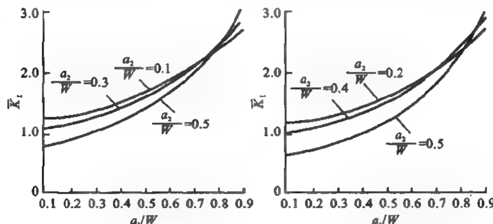


图 5-19　非对称双侧边缘裂纹板 $\bar{K}_{\mathrm{I}} \sim a_1/W$ 曲线 ($H/W=1.0$)



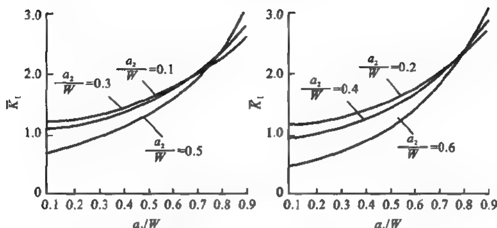


图 5-20　非对称双侧边缘裂纹板 $\bar{K}_I \sim a_1/W$ 曲线 ($H/W=1.2$)

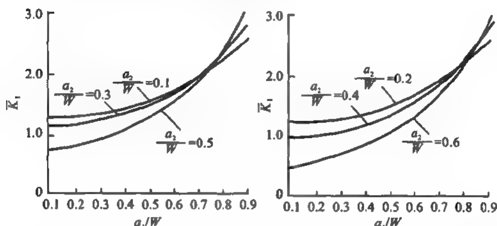


图 5-21　非对称双侧边缘裂纹板 $\bar{K}_I \sim a_1/W$ 曲线 ($H/W=1.4$)

下面，研究图 5-22 所示的受均匀轴向拉伸含非对称双侧缺口边缘裂纹各向同性板[5.15]。所选取的几何参数如下：

$$H/W = 1.0, 1.2, 1.4, \quad R/W = 0.1, 0.2, 0.3$$

$$a_2/W = 0.1,\ 0.3,\ 0.5$$

图 5-23、图 5-24 与图 5-25 给出在以上几何参数下各向同性板量纲为 1 的应力强度因子 $\bar{K}_I = K_I/(\sigma\sqrt{\pi a_1})$ 与量纲为 1 的裂纹长度的关系曲线。

为了检验本方法的收敛性，选用如图 5-22 所示的受均匀轴



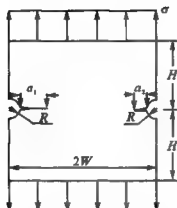


图 5－22 非对称双侧缺口边缘裂纹板

向拉伸含非对称双侧缺口边缘裂纹正交各向异性板作为计算实例[5.14]。材料弹性常数为 $E_{11}=144.8$ GPa，$E_{22}=11.7$ GPa，$G_{12}=9.7$ GPa，$\nu_{12}=0.12$，且裂纹与材料弹性主轴重合。表 5－12 列出了量纲为 1 的应力强度因子 $\bar{K}=K_{\rm I}/(\sigma\sqrt{\pi a})$ 的收敛情况。

表 5－12 受均匀轴向拉伸的含非对称双侧边缘裂纹正交各向异性板量纲为 1 的应力强度因子收敛情况（M 代表级数的项数）
（$R/W=0.1$，$H/W=0.8$，$a_2/W=0.3$）

M ＼ a_1/W	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
4	0.932	1.011	1.134	1.289	1.477	1.704
5	0.997	1.085	1.221	1.396	1.618	1.911
6	0.904	1.015	1.168	1.359	1.608	1.914
7	0.888	1.034	1.183	1.372	1.607	1.912
8	0.880	0.998	1.181	1.372	1.605	1.909
9	0.879	0.999	1.182	1.372	1.606	1.906



图 5-23　非对称双侧缺口边缘裂纹板 $\overline{K}_{\mathrm{I}}\sim a_1/W$ 曲线 $(H/W=1.0)$

图 5-24　非对称双侧缺口边缘裂纹板 $\bar{K}_{\mathrm{I}} \sim a_1/W$ 曲线 ($H/W=1.2$)



图 5-25　非对称双侧缺口边缘裂纹板 $\bar{K}_{\mathrm{I}} \sim a_1/W$ 曲线（$H/W=1.4$）



最后，研究图 5－26 所示的受钉传载荷含非对称双侧缺口边缘裂纹各向同性板[5.15]。所选取的几何参数如下：

$$H/W = 1.0,\qquad R/W = b/W = 0.1, 0.2, 0.3,\qquad c/H = 0.3$$

$$a_1/W = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7$$

$$a_2/W = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$$

图 5－27 给出在以上几何参数下各向同性板量纲为 1 的应力强度因子 $\overline{K}_{\mathrm{I}} = K_{\mathrm{I}}\sqrt{W}/P$ 与量纲为 1 的裂纹长度 a_1/W 的关系曲线。

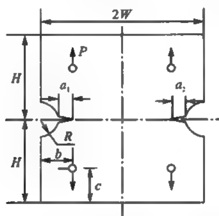
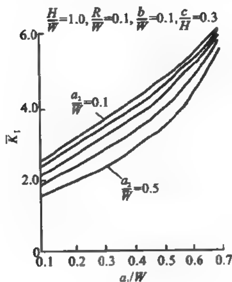


图 5－26　受钉传载荷含非对称双侧缺口边缘裂纹板

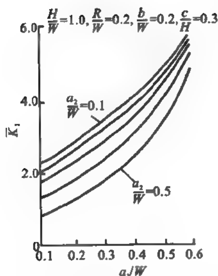
本方法在给出精确满足平面问题基本方程、裂纹表面边界条件以及钉载孔处的位移单值条件与合力平衡条件的应力和位移级数表达式的基础上，应用分区广义变分原理满足板的边界条件和交界连续条件，从而确定级数表达式中的待定系数以及求出应力强度因子。

本方法及其相应计算程序可用于任意几何形状与任意加载方式的情况，可用于各向异性材料与各向同性材料。使用本方法，所得计算结果收敛正确、迅速，计算节省机时。由于简化了数据准备工作，易于得到系统计算结果。

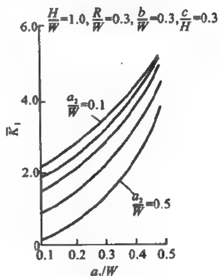




(a) $R/W=b/W=0.1$



(b) $R/W=b/W=0.2$



(c) $R/W=b/W=0.3$

图 5-27　受钉传载荷非对称双侧缺口边缘裂纹板 $\bar{K}_1 \sim a_1/W$ 曲线

$H/W=1.0, a_2/W=0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, c/H=0.3$



参考文献

[5.1] LEKHNITSKII S G. Theory of Elasticity of an Anisotropic Body. English Translation. Mir Publisher, 1981.

[5.2] LIEBOWITZ H. Fracture. Vol. Ⅱ. New York: Academic Press, 1968:108-120.

[5.3] SIH G C, CHEN E P. Cracks in Composite Materials. Mechanics of Fracture 6. London: Martinus Nijhoff Publishers, 1981:9-22.

[5.4] 胡海昌. 弹性力学的变分原理及其应用. 北京:科学出版社, 1980.

[5.5] 钱伟长. 变分法与有限元. 北京:科学出版社, 1980.

[5.6] FEDDERN G. Criterions of Fracture Included Fracture Mechanics. Proc 3rd International Congress on Fracture Vol Ⅲ. 1971.

[5.7] GROSS B, SRAWLEY J E, BROWN W R. Stress Intensity Factors for a Single-Edge-Notch Tension Specimen by Boundary Collocation of a Stress Function. NASA Technical Note, 1964, NASA-TN-D-295.

[5.8] 范天佑. 断裂力学基础. 南京:江苏科学技术出版社, 1978.

[5.9] 崔德渝, 张行, 傅东山. 紧凑拉伸试件应力强度因子的解析-变分解法以及有关系统计算结果. 计算结构力学及其应用, 1993, 10(3): 271-279.

[5.10] 张行. 断裂力学中应力强度因子的解法. 北京:国防工业出版社, 1992:8-42.

[5.11] 崔德渝, 张行. 求解受钉传载荷含双边非对称边缘裂纹各向异性板的解析变分解法. 航空学报, 1994, 15(3): 207-297.

[5.12] CUI D Y, ZHANG X, FU D S. Analytical-Generalized Variational Method in Solution of the Stress Intensity Factors for a Double Notch Edge Crack in an Orthotropic Plate Subjected to Pin Loads. Engineering Fracture Mechanics, 1992, 42(3): 427-434.

[5.13] HELLEN T K. On the Method of Virtual Crack Extension. Int. J. Numer. Method Eng. 1975, 9,: 187-207.

[5.14] 崔德渝, 张行. 各向异性板应力强度因子的分区广义解析变分解法. 力学学报, 1993, 25(5): 582-590.



[5.15] ZHANG X, CUI D Y. Analytical-Generalized Variational Method for Multi-Regions in Solution of Stress Intensity Factors for Unsymmetric Double Edge Cracks in Anisotropic Plates with Pin Holes. Engineering Fracture Mechanics, 1994, 47(2): 291-301.

[5.16] 中国航空研究院主编. 应力强度因子手册. 增订版. 北京:科学出版社,1993.

[5.17] 崔德渝,谷培,张行,等. 求解正交各向异性孔边裂纹板应力强度因子的广义变分解法. 航空学报,1988,9(13):5-16.

[5.18] 崔德渝,谷培,张行,等. 求解含孔边裂纹各向异性板应力强度因子的复变-广义变分方法. 应用力学学报,1989,6(2):30-36.

[5.19] 崔德渝,张行. 求解正交各向异性含内部裂纹板应力强度因子的复变函数-分区广义变分解法. 航空学报,1991,12(1):87-94.

[5.20] 崔德渝,张行. 正交各向异性板平面剪切型裂纹应力强度因子的复变-变分解法. 固体力学学报,1992,13(2):158-163.

[5.21] 崔德渝,张行,付东山. 受钉传载荷含边缘裂纹板的解析变分解法. 北京航空航天大学学报,1992,4:54-61.

[5.22] CUI D Y, ZHANG X. The Solution of Stress Intensity Factor for Mode II Cracking in Orthotropic Cracked Plate by Complex Variable-Variational Method. Computational Mechanics, Springer-Verlag, 1991, 7: 361-368.

第6章　二维应力强度因子的解析变分解法——含内部裂纹各向异性板

本章以弹性力学二维问题复变函数解法为基础，直接研究含内部裂纹各向异性板应力强度因子的解析变分解法。本章系从各向异性材料出发，并将各向同性材料视作各向异性材料的特殊情况。研究表明，在求解该裂纹问题中此分析方法具有可行性。

6.1　单块平板孔边裂纹情况

6.1.1　单块平板孔边裂纹问题的支配方程

图6-1表示含内部裂纹的一个二维固体。

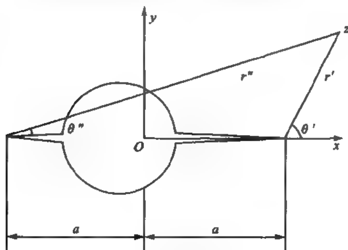


图6-1　含内部裂纹的二维固体



在第5章5.1节中，已经得到各向异性材料平面问题的应力和位移分量的复变函数表达式

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \mu_1^2\varphi'(z_1) + \mu_2^2\psi'(z_2) + \overline{\mu_1^2\varphi'(z_1)} + \overline{\mu_2^2\psi'(z_2)} \\
\sigma_{yy} &= \varphi'(z_1) + \psi'(z_2) + \overline{\varphi'(z_1)} + \overline{\psi'(z_2)} \\
-\sigma_{xy} &= \mu_1\varphi'(z_1) + \mu_2\psi'(z_2) + \overline{\mu_1\varphi'(z_1)} + \overline{\mu_2\psi'(z_2)}
\end{aligned}\right\}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
u_x &= p_1\varphi(z_1) + p_2\psi(z_2) + \bar{p}_1\,\overline{\varphi(z_1)} + \bar{p}_2\,\overline{\psi(z_2)} \\
u_y &= q_1\varphi(z_1) + q_2\psi(z_2) + \bar{q}_1\,\overline{\varphi(z_1)} + \bar{q}_2\,\overline{\psi(z_2)}
\end{aligned}\right\} \quad (6-1)
$$

以上两式已经满足各向异性材料平面问题所有基本方程。

首先，建立裂纹表面的边界条件，并由此确定复变函数 $\varphi'(z_1)$ 与 $\psi'(z_2)$ 的构造形式。根据图6-1所示的含内部裂纹的二维固体，裂纹上、下表面的边界条件为

$$\sigma_{xy}^{(+)} = \sigma_{xy}^{(-)} = 0, \qquad \sigma_{yy}^{(+)} = \sigma_{yy}^{(-)} = 0 \qquad (6-2)$$

式中，上标(+)与(−)分别表示裂纹上、下表面。

为了便于研究，可将上述两个复变函数分成如下两部分：

$$\varphi'(z_1) = \varphi_1'(z_1) + \varphi_2'(z_1), \qquad \psi'(z_2) = \psi_1'(z_2) + \psi_2'(z_2) \qquad (6-3)$$

相应的应力场可分别满足在裂纹延长线上切应力 $\sigma_{xy}=0$ 和正应力 $\sigma_{yy}=0$ 的条件，即

$$\mu_1\varphi_1'(\tau) + \mu_2\psi_1'(\tau) = 0 \qquad (6-4)$$

$$\varphi_2'(\tau) + \psi_2'(\tau) = 0 \qquad (6-5)$$

式中，τ 为 z_1 与 z_2 在 x 轴上的值。

采用与第5章5.2.1节类似的方法，可得

$$
\begin{aligned}
\varphi'(z_1) = {} & \frac{\mu_2}{\mu_2-\mu_1}\Big[(z_1^2-a^2)^{-1/2}\sum_{m=-M^-}^{M^+} F_{(1)m}z_1^m + \mathrm{i}\sum_{m=-M^-}^{M^+} G_{(1)m}z_1^m\Big] + \\
& \frac{1}{\mu_2-\mu_1}\Big[(z_1^2-a^2)^{-1/2}\sum_{m=-M^-}^{M^+} F_{(2)m}z_1^m + \mathrm{i}\sum_{m=-M^-}^{M^+} G_{(2)m}z_1^m\Big]
\end{aligned} \qquad (6-6)
$$



$$\psi'(z_2)=\frac{-\mu_1}{\mu_2-\mu_1}\Big[(z_2^2-a^2)^{1/2}\sum_{m=-M^-}^{M^+}F_{(1)m}z_2^m+\mathrm{i}\sum_{m=-M^-}^{M^+}G_{(1)m}z_2^m\Big]+$$
$$\frac{-1}{\mu_2-\mu_1}\Big[(z_2^2-a^2)^{1/2}\sum_{m=-M^-}^{M^+}F_{(2)m}z_2^m+\mathrm{i}\sum_{m=-M^-}^{M^+}G_{(2)m}z_2^m\Big] \tag{6-7}$$

以上 $\varphi'(z_1)$与 $\psi'(z_2)$不仅满足所有基本方程，而且满足裂纹表面边界条件。

然后，通过积分并利用位移单值条件来确定 $\varphi(z_1)$与 $\psi(z_2)$。令

$$\alpha_m(z)=\int(z^2-a^2)^{-1/2}z^m\mathrm{d}z \tag{6-8}$$

$$\beta_m(z)=\int z^m\mathrm{d}z \tag{6-9}$$

由积分式(6-8)与式(6-9)，可知

$$\varphi(z_1)=\frac{\mu_2}{\mu_2-\mu_1}\Big[\sum_{m=-M^-}^{M^+}F_{(1)m}\alpha_m(z_1)+\sum_{m=-M^-}^{M^+}\mathrm{i}G_{(1)m}\beta_m(z_1)\Big]+$$
$$\frac{1}{\mu_2-\mu_1}\Big[\sum_{m=-M^-}^{M^+}F_{(2)m}\alpha_m(z_1)+\sum_{m=-M^-}^{M^+}\mathrm{i}G_{(2)m}\beta_m(z_1)\Big] \tag{6-10}$$

$$\psi(z_2)=\frac{-\mu_1}{\mu_2-\mu_1}\Big[\sum_{m=-M^-}^{M^+}F_{(1)m}\alpha_m(z_2)+\sum_{m=-M^-}^{M^+}\mathrm{i}G_{(1)m}\beta_m(z_2)\Big]+$$
$$\frac{-1}{\mu_2-\mu_1}\Big[\sum_{m=-M^-}^{M^+}F_{(2)m}\alpha_m(z_2)+\sum_{m=-M^-}^{M^+}\mathrm{i}G_{(2)m}\beta_m(z_2)\Big] \tag{6-11}$$

首先确定 $\beta_m(z)$。显然

$$\beta_m(z)=\frac{1}{m+1}z^{m+1},\qquad m\neq-1 \tag{6-12}$$

$$\beta_{-1}(z)=\ln z \tag{6-13}$$

然后确定在 $m\geqslant0$ 时的 $\alpha_m(z)$。由分部积分公式，可得如下递



推公式：

$$\alpha_m(z)=\frac{1}{m}z^{m-1}(z^2-a^2)^{1/2}+\frac{m-1}{m}a^2\alpha_{m-2}(z) \quad (6-14)$$

同时，大家知道

$$\alpha_0(z)=\int(z^2-a^2)^{-1/2}\mathrm{d}z=\ln(z+\sqrt{z^2-a^2}) \quad (6-15)$$

$$\alpha_1(z)=\int(z^2-a^2)^{-1/2}z\mathrm{d}z=\sqrt{z^2-a^2} \quad (6-16)$$

从而，由式(6-14)容易得到以下二式。

当 m 为偶数时

$$\alpha_{2k}(z)=\frac{\sqrt{z^2-a^2}}{2k}P_{2k}(z)+N_{2k}a^{2k}\alpha_0(z) \quad (6-17)$$

当 m 为奇数时

$$\alpha_{2k+1}(z)=\frac{\sqrt{z^2-a^2}}{2k+1}P_{2k+1}(z) \quad (6-18)$$

在以上二式中，$P_{2k}(z)$与 $P_{2k+1}(z)$是多项式，而

$$N_{2k}=\frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3\times 1}{2k(2k-2)\cdots 4\times 2} \quad (6-19)$$

由式(6-15)与式(6-17)，可以看出 $\alpha_0(z)$与 $\alpha_{2k}(z)$是 z 的多值函数。为了保证含内部裂纹板这一复连通域位移的单值性，建立如下的位移单值条件：

$$u_x|_c=0,\qquad u_y|_c=0 \quad (6-20)$$

式中，c 为包含裂纹在内的域内任意封闭曲线。由式(6-1)、式(6-10)、式(6-11)、式(6-17)与式(6-20)，可知

$$\left.\begin{aligned}F_{(1)0}+\sum_{k=1}^{\left[\frac{M^+}{2}\right]}F_{(1)2k}a^{2k}N_{2k}=0\\F_{(2)0}+\sum_{k=1}^{\left[\frac{M^+}{2}\right]}F_{(2)2k}a^{2k}N_{2k}=0\end{aligned}\right\} \quad (6-21)$$

下面确定在 $m<0$ 时的 $\alpha_m(z)$。由分部积分公式，可得如下递



推公式：

$$\alpha_m(z) = -\frac{1}{m+1}a^{-2}z^{m+1}(z^2-a^2)^{-1/2} + \frac{m+2}{m+1}a^{-2}\alpha_{m+2}(z) \tag{6-22}$$

同时知道

$$\alpha_{-1}(z) = \int \frac{1}{z(z^2-a^2)^{1/2}}\mathrm{d}z = \frac{1}{a}\arccos\frac{a}{z} \tag{6-23}$$

$$\alpha_{-2}(z) = \int \frac{1}{z^2(z^2-a^2)^{1/2}}\mathrm{d}z = \frac{\sqrt{z^2-a^2}}{a^2 z} \tag{6-24}$$

当 m 为偶数时

$$\alpha_{-2k}(z) = -\frac{\sqrt{z^2-a^2}}{(-2k+1)a^2}Q_{-2k}(z) \tag{6-25}$$

当 m 为奇数时

$$\alpha_{-2k-1}(z) = \frac{\sqrt{z^2-a^2}}{2ka^2}Q_{-2K-1}(z) - N_{2k}a^{-2k}\alpha_{-1}(z) \tag{6-26}$$

在以上二式中，$Q_{-2k}(z)$与 $Q_{-2k-1}(z)$是多项式。

由式(6-23)与式(6-26)可知，$\alpha_{-1}(z)$与 $\alpha_{-2k-1}(z)$应为 z 的多值函数。根据位移单值条件，可得

$$\left.\begin{aligned} F_{(1)-1} + \sum_{k=1}^{\left[\frac{M}{2}\right]} F_{(1)-2k-1}a^{-2k}N_{2k} = 0 \\ F_{(2)-1} + \sum_{k=1}^{\left[\frac{M}{2}\right]} F_{(2)-2k-1}a^{-2k}N_{2k} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{6-27}$$

另外，由式(6-13)可知，$\beta_{-1}(z)$也是 z 的多值函数。从而，为了保证位移单值条件的成立，应令

$$G_{(1)-1} = 0,\qquad G_{(2)-1} = 0 \tag{6-28}$$

容易证明，$G_{(1)0}$代表全板刚体转动，可令

$$G_{(1)0} = 0 \tag{6-29}$$



在式(6－17)、式(6－18)、式(6－25)与式(6－26)中，$P_{2k}(z)$，$P_{2k+1}(z)$，$Q_{-2k}(z)$与$Q_{-2k-1}(z)$的表达式分别为

$$\left.\begin{aligned}P_{2k}(z) &= z^{2k-1}+\frac{2k-1}{2k-2}a^2z^{2k-3}+\cdots+\\&\quad\frac{(2k-1)(2k-3)\cdots3}{(2k-2)(2k-4)\cdots2}a^{2k-2}z\\P_{2k+1}(z) &= z^{2k}+\frac{2k}{2k-1}a^2z^{2k-2}+\cdots+\\&\quad\frac{2k(2k-2)\cdots2}{(2k-1)(2k-3)\cdots3\times1}a^{2k}\end{aligned}\right\}\tag{6-30}$$

$$Q_{-2k}(z)=z^{-2k+1}+\frac{-2k+2}{-2k+3}a^{-2}z^{-2k+3}+\cdots+\frac{(-2k+2)(-2k+4)\cdots(-2)}{(-2k+3)(-2k+5)\cdots(-1)}a^{-2k+2}z^{-1}\tag{6-31}$$

$$Q_{-2k-1}(z)=z^{-2k}+\frac{-2k+1}{-2k+2}a^{-2}z^{-2k+2}+\cdots+\frac{(-2k+1)(-2k+3)\cdots(-3)}{(-2k+2)(-2k+4)\cdots(-2)}a^{-2k+2}z^{-2}\tag{6-32}$$

将式(6－6)与式(6－7)代入式(5－25)，将式(6－10)与式(6－11)代入式(6－1)，并考虑到式(6－21)与式(6－27)，可以得到应力与位移分量的复变函数表达式。以上的表达式满足了所有的基本方程、裂纹表面的静力边界条件以及位移单值条件，只有物体表面的边界条件有待进一步满足。

最后给出应力与位移的实变函数表达式。为了简单起见，这里只考虑正交各向异性材料，即

$$\mu_1=\mathrm{i}\beta_1,\qquad \mu_2=\mathrm{i}\beta_2$$

采用图6－1所示极坐标，并选取裂纹与材料弹性主轴重合的情况，有

$$z=re^{i\theta},\qquad z_1=r_1e^{i\theta_1},\qquad z_2=r_2e^{i\theta_2}$$

$$(z_1^2-a^2)^{1/2}=\rho_1e^{i\lambda_1},\qquad (z_2^2-a^2)^{1/2}=\rho_2e^{i\lambda_2}$$

在以上二式中，有



$$r=\sqrt{x^2+y^2}, \qquad \theta=\arctan\frac{y}{x}$$

$$r_j=\sqrt{x^2+\beta_j^2y^2}, \qquad \theta_j=\arctan\beta_j\frac{y}{x}$$

$$\rho_j=\left[\sqrt{(x+a)^2+\beta_j^2y^2}\sqrt{(x-a)^2+\beta_j^2y^2}\right]^{1/2}$$

$$\lambda_j=\frac{1}{2}\left(\arctan\beta_j\frac{y}{x+a}+\arctan\beta_j\frac{y}{x-a}\right)$$

将以上坐标变换引入应力与位移分量复变函数表达式，并令

$$\left.\begin{aligned}H_{(1)m}=F_{(1)m}, \qquad H_{(2)m}=F_{(2)m}\\ H_{(3)m}=G_{(1)m}, \qquad H_{(4)m}=G_{(2)m}\end{aligned}\right\} \tag{6-33}$$

则可得到如下形式的应力与位移分量表达式：

$$\sigma_{ij}=\sum_{k=1}^{4}\sum_{m=-M^-}^{M^+}f_{(k)m}^{(ij)}(x,y)H_{(k)m} \tag{6-34}$$

$$u_i=\sum_{k=1}^{4}\sum_{m=-M^-}^{M^+}g_{(k)m}^{(i)}(x,y)H_{(k)m} \tag{6-35}$$

通过式(6－34)，可得裂纹左右两端应力强度因子的表达式如下：

$$\left.\begin{aligned}K_{\text{I}\,\text{R}}=\lim_{\substack{r'\to0\\ \theta'\to0}}\sqrt{2\pi r'}\,\sigma_{yy}=2\sqrt{\frac{\pi}{a}}\sum_{m=-M^-}^{M^+}H_{(1)m}a^m\\ K_{\text{I}\,\text{L}}=\lim_{\substack{r''\to0\\ \theta''\to\pi}}\sqrt{2\pi r''}\,\sigma_{yy}=2\sqrt{\frac{\pi}{a}}\sum_{m=-M^-}^{M^+}(-1)^{m+1}H_{(1)m}a^m\end{aligned}\right\} \tag{6-36}$$

$$\left.\begin{aligned}K_{\text{II}\,\text{R}}=\lim_{\substack{r'\to0\\ \theta'\to0}}\sqrt{2\pi r'}\,\sigma_{xy}=2\sqrt{\frac{\pi}{a}}\sum_{m=-M^-}^{M^+}H_{(2)m}a^m\\ K_{\text{II}\,\text{L}}=\lim\sqrt{2\pi r''}\,\sigma_{xy}=2\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{m=-M^-}^{M^+}(-1)^{m+1}H_{(2)m}a^m\end{aligned}\right\} \tag{6-37}$$

这里，下标 R 与 L 分别表示裂纹的右端与左端，r'，θ'，r''与θ''分别表示以裂纹右端与左端为原点的极坐标。



6.1.2 单块平板孔边裂纹情况的解析变分解法

应力表达式(6-34)与位移表达式(6-35)的系数 $H_{(k)m}$ 取决于裂纹以外的边界条件。与第5章相同，如果裂纹以外的边界纯属静力边界，则可采用势能原理代替此边界条件来确定以上待定系数。相应的变分方程为

$$\int_{S_p-S_c}(\sigma_{ij}n_j - T_i)\delta u_i \mathrm{d}s = 0 \tag{6-38}$$

将式(6-34)与式(6-35)代入式(6-38)，即可得到关于待定系数的线性代数方程组。解此方程组，即可由式(6-36)与式(6-37)得到应力强度因子。

下面讨论四种简单情况：

(1) 结构与载荷均关于 x 轴为对称

这时，容易证明

$$H_{(2)m} = 0, \qquad H_{(3)m} = 0 \tag{6-39}$$

$$\left.\begin{aligned} K_{\mathrm{II\,R}} &= 0, \qquad K_{\mathrm{I\,R}} = 2\sqrt{\frac{\pi}{a}}\sum_{m=-M^-}^{M^+} H_{(1)m}a^m \\ K_{\mathrm{II\,L}} &= 0, \qquad K_{\mathrm{I\,L}} = 2\sqrt{\frac{\pi}{a}}\sum_{m=-M^-}^{M^+} (-1)^m H_{(1)m}a^m \end{aligned}\right\} \tag{6-40}$$

(2) 结构与载荷均关于 x 轴与 y 轴为对称

这时，容易证明

$$\left.\begin{aligned} H_{(2)m} &= 0, \qquad H_{(3)m} = 0 \\ H_{(1)2m} &= 0, \qquad H_{(4)2m-1} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{6-41}$$

$$\left.\begin{aligned} &K_{\mathrm{II\,R}} = 0, \qquad K_{\mathrm{II\,L}} = 0 \\ &K_{\mathrm{I}} = K_{\mathrm{I\,R}} = K_{\mathrm{I\,L}} = 2\sqrt{\frac{\pi}{a}}\sum_{m=-M^-}^{M^+} H_{(1)2m-1}a^{2m-1} \end{aligned}\right\} \tag{6-42}$$

(3) 结构关于 x 轴对称，而载荷关于 x 轴反对称

这时，容易证明

$$H_{(1)m} = 0, \qquad H_{(4)m} = 0 \tag{6-43}$$

$$\left.\begin{aligned} K_{\mathrm{IR}} &= 0, \qquad K_{\mathrm{IIR}} = 2\sqrt{\frac{\pi}{a}}\sum_{m=-M^-}^{M^+} H_{(2)m}a^m \\ K_{\mathrm{IL}} &= 0, \qquad K_{\mathrm{IIL}} = 2\sqrt{\frac{\pi}{a}}\sum_{m=-M^-}^{M^+} (-1)^{m+1} H_{(2)m}a^m \end{aligned}\right\} \tag{6-44}$$

(4) 结构关于 x 轴与 y 轴对称，而载荷关于 x 轴与 y 轴反对称

这时，容易证明

$$\left.\begin{aligned} H_{(1)m} &= 0, \qquad H_{(4)m} = 0 \\ H_{(2)2m} &= 0, \qquad H_{(3)2m-1} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{6-45}$$

$$\left.\begin{aligned} & K_{\mathrm{IR}} = 0, \qquad K_{\mathrm{IL}} = 0 \\ & K_{\mathrm{II}} = K_{\mathrm{IIR}} = K_{\mathrm{IIL}} = 2\sqrt{\frac{\pi}{a}}\sum_{m=-M^-}^{M^+} H_{(2)2m-1}a^{2m-1} \end{aligned}\right\} \tag{6-46}$$

然后，研究以上理论在各向同性材料中的推广问题。为此，将式(6-10)与式(6-11)改写如下：

$$\varphi(z_1) = \frac{\mu_2}{\mu_2 - \mu_1}H_1(z_1) + \frac{1}{\mu_2 - \mu_1}H_2(z_1) \tag{6-47}$$

$$\psi(z_2) = \frac{-\mu_1}{\mu_2 - \mu_1}H_1(z_2) + \frac{-1}{\mu_2 - \mu_1}H_2(z_2) \tag{6-48}$$

这里

$$H_i(z_j) = \sum_{m=-M^-}^{M^+} F_{(i)m}\alpha_m(z_j) + \sum_{m=-M^-}^{M^+} \mathrm{i}G_{(i)m}\beta_m(z_j) \tag{6-49}$$

将式(6-47)与式(6-48)代入式(5-25)与式(6-1)，可知



$$\sigma_{xx} = 2\mathrm{Re}\left\{\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_2-\mu_1}[\mu_1 H_1'(z_1) - \mu_2 H_1'(z_2)] + \frac{1}{\mu_2-\mu_1}[\mu_1^2 H_2'(z_1) - \mu_2^2 H_2'(z_2)]\right\} \tag{6-50}$$

$$\sigma_{yy} = 2\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\mu_2-\mu_1}[\mu_2 H_1'(z_1) - \mu_1 H_1'(z_2)] + \frac{1}{\mu_2-\mu_1}[H_2'(z_1) - H_2'(z_2)]\right\} \tag{6-51}$$

$$\sigma_{xy} = 2\mathrm{Re}\left\{\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_2-\mu_1}[H_1'(z_1) - H_1'(z_2)] + \frac{1}{\mu_2-\mu_1}[\mu_1 H_2'(z_1) - \mu_2 H_2'(z_2)]\right\} \tag{6-52}$$

$$u_x = 2\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\mu_2-\mu_1}[\mu_2 p_1 H_1(z_1) - \mu_1 p_2 H_1(z_2)] + \frac{1}{\mu_2-\mu_1}[p_1 H_2(z_1) - p_2 H_2(z_2)]\right\} \tag{6-53}$$

$$u_y = 2\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\mu_2-\mu_1}[\mu_2 q_1 H_1(z_1) - \mu_1 q_2 H_1(z_2)] + \frac{1}{\mu_2-\mu_1}[q_1 H_2(z_1) - q_2 H_2(z_2)]\right\} \tag{6-54}$$

对于各向同性材料，可以认为

$$\mu_1 = \mathrm{i}(1-\varepsilon), \qquad \mu_2 = \mathrm{i}(1+\varepsilon) \tag{6-55}$$

式中，ε 是一个无限小量。在这种情况下，式(6-50)至式(6-54)均为不定式。根据极限运算法则，当 $\varepsilon \to 0$ 时，可得应力分量与位移分量的复变函数表达式如下：

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 4\mathrm{Re}[H_1'(z) - \mathrm{i}H_2'(z)] \tag{6-56}$$

$$\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2\mathrm{i}\sigma_{xy} = -4\mathrm{i}yH_1''(z) + 4\mathrm{i}H_2'(z) \quad 4yH_2''(z) \tag{6-57}$$

$$u_x + \mathrm{i}u_y = \frac{1}{E}(3-\nu)[H_1(z) - \mathrm{i}H_2(z)] + \frac{1}{E}(1+\nu)[-\overline{H}_1(\bar{z}) + \mathrm{i}\overline{H}_2(\bar{z})] + \frac{2}{E}(1+\nu)[-\mathrm{i}y\overline{H}_1'(\bar{z}) + y\overline{H}_2'(\bar{z})] \tag{6-58}$$



式中

$$z = x + \mathrm{i}y \tag{6-59}$$

且利用以下等式

$$\left.\begin{aligned} p_j &= a_{11}\mu_j^2 + a_{12} = -\frac{1}{E}(1+\nu) \\ q_j &= a_{12}\mu_j + \frac{a_{22}}{\mu_j} = -\frac{\mathrm{i}}{E}(1+\nu) \end{aligned}\right\} \tag{6-60}$$

以上分析表明，当 $\varepsilon \to 0$ 时，应力和位移分量极限值的存在性。

令

$$\varphi(z) = H_1(z) - \mathrm{i}H_2(z), \qquad \Omega(z) = H_1(z) + \mathrm{i}H_2(z) \tag{6-61}$$

则由式(6-56)至式(6-60)，可知

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] \tag{6-62}$$

$$\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2\mathrm{i}\sigma_{xy} = -2[\varphi'(z) + (z - \bar{z})\varphi''(z) - \Omega'(z)] \tag{6-63}$$

$$2\mu(u_x + \mathrm{i}u_y) = k\varphi(z) - (z - \bar{z})\overline{\varphi'(z)} - \overline{\Omega'(z)} \tag{6-64}$$

由此可见，当 $\varepsilon \to 0$ 时，由列赫尼斯基理论所得应力和位移分量表达式与穆斯海里什维利理论所得应力和位移分量表达式相同。

6.1.3 单块平板孔边裂纹情况的数值计算实例和系统计算结果

本节将通过数值计算来证明上述求解单块平板孔边裂纹问题的解析变分解法的收敛性，并给出一些系统的计算曲线。

对于各向同性材料，取 $\mu_1 = 0.999\mathrm{i}$，$\mu_2 = 1.001\mathrm{i}$；对于正交各向异性材料，取 $E_x = 144.8$ GPa，$E_y = 11.7$ GPa，$G = 9.65$ GPa，$\nu = 0.21$。

图 6-2 表示受均匀拉伸的含内部裂纹的矩形板。在各向同性材料和正交各向异性材料的情况下，收敛性检验的计算结果列



于表6-1和表6-2之中。在表6-1中，$\bar{K}_{\mathrm{I}}=K_{\mathrm{I}}/(\sigma\sqrt{\pi a})$。为了便于对照，给出了由参考文献[6.1]所提供的含中心内部裂纹各向同性板的相应计算结果$\bar{K}_{\mathrm{I}}=1.216$。从表6-1可以看出，当$M^{+}=2$时，误差仅为1%。在表6-2中，$\bar{K}_{\mathrm{IR}}=K_{\mathrm{IR}}/(\sigma\sqrt{\pi a})$及$\bar{K}_{\mathrm{IL}}=K_{\mathrm{IL}}/(\sigma\sqrt{\pi a})$。同样，在参考文献[6.1]中给出的各向同性材料的相应计算结果为$\bar{K}_{\mathrm{IR}}=1.24$及$\bar{K}_{\mathrm{IL}}=1.15$。

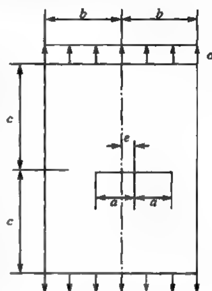


图6-2　受均匀拉伸含内部裂纹的矩形板

表6-1　含Ⅰ型中心内部裂纹矩形板$\bar{K}_{\mathrm{I}}$的收敛情况

$(c/b=1, a/b=0.4, e/b=0)$

材　料	M^{+}	2	3	4	5	6	7	8	9
各向同性	$\bar{K}_{\mathrm{I}}$	1.204	1.205	1.212	1.215	1.215	1.217	1.215	1.215
正交各向异性	$\bar{K}_{\mathrm{I}}$	1.092	1.096	1.101	1.101	1.101	1.103	1.101	1.103

表6-2　含Ⅰ型偏心内部裂纹矩形板$\bar{K}_{\mathrm{I}}$的收敛情况

$(c/b=1, a/b=0.24, e/b=0.6)$

材　料	M^{+}	2	3	4	5	6	7	8	9
各向同性	$\bar{K}_{\mathrm{IR}}$	1.145	1.164	1.187	1.201	1.203	1.211	1.226	1.224
	$\bar{K}_{\mathrm{IL}}$	1.112	1.113	1.121	1.124	1.122	1.125	1.132	1.130
正交各向异性	$\bar{K}_{\mathrm{IR}}$	1.084	1.124	1.155	1.165	1.172	1.172	1.173	1.173
	$\bar{K}_{\mathrm{IL}}$	1.084	1.090	1.103	1.108	1.113	1.113	1.113	1.113



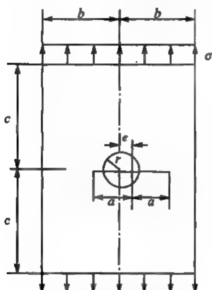


图 6-3 受均匀拉伸含圆形孔边裂纹的矩形板

图 6-3 表示受均匀拉伸的含圆形孔边裂纹的矩形板。在各向同性材料和正交各向异性材料的情况下，收敛性检验的计算结果分别列于表6-3至表 6-6 之中。表中所列数值为 $\overline{K}_{\mathrm{I}} = K_{\mathrm{I}}/(\sigma\sqrt{\pi a})$。为了便于对照，给出了由参考文献[6.2]所提供的含Ⅰ型中心圆形孔边裂纹各向同性板的相应计算结果 $\overline{K}_{\mathrm{I}}=1.216$。从表 6-3 可以看出，当 $M^{+}=3$ 和 $M^{-}=2$ 时，误差小于 1%。

表 6-3 含Ⅰ型中心圆形孔边裂纹各向同性板 $\overline{K}_{\mathrm{I}}$ 的收敛情况

$(c/b=2, r/b=0.25, a/b=0.4, e/b=0)$

M^{-} \ M^{+}	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1.156	1.160	1.168	1.172	1.172	1.174	1.174	1.174
2	1.189	1.191	1.201	1.205	1.205	1.207	1.207	1.207
3	1.181	1.185	1.195	1.199	1.200	1.201	1.201	1.201
4	1.180	1.184	1.194	1.199	1.199	1.200	1.200	1.200
5	1.180	1.184	1.194	1.199	1.200	1.200	1.200	1.200

表 6-4 含Ⅰ型中心圆形孔边裂纹正交各向异性板 $\overline{K}_{\mathrm{I}}$ 的收敛情况

$(c/b=2, r/b=0.25, a/b=0.4, e/b=0)$

M^{-} \ M^{+}	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1.103	1.110	1.114	1.115	1.120	1.121	1.121	1.121
2	1.145	1.155	1.160	1.162	1.168	1.169	1.169	1.169



续表 6-4

M^- \ M^+	2	3	4	5	6	7	8	9
3	1.146	1.156	1.162	1.164	1.170	1.172	1.171	1.172
4	1.158	1.160	1.174	1.176	1.183	1.185	1.184	1.184
5	1.151	1.161	1.168	1.172	1.179	1.182	1.181	1.181

表 6-5 含Ⅰ型偏心圆形孔边裂纹正交各向异性板 $\bar{K}_{\mathrm{I}L}$ 的收敛情况
($c/b=1, r/b=0.25, a/b=0.4, e/b=0.1$)

M^- \ M^+	2	3	4	5	6	7	8	9
2	1.064	1.084	1.083	1.086	1.086	1.097	1.094	1.096
3	1.067	1.081	1.181	1.084	1.084	1.097	1.094	1.095
4	1.097	1.120	1.120	1.123	1.123	1.140	1.137	1.137
5	1.089	1.113	1.113	1.116	1.116	1.136	1.132	1.131
6	1.089	1.116	1.116	1.119	1.119	1.141	1.136	1.135

表 6-6 含Ⅰ型偏心圆形孔边裂纹正交各向异性板 $\bar{K}_{\mathrm{I}R}$ 的收敛情况
($c/b=1, r/b=0.25, a/b=0.4, e/b=0.1$)

M^- \ M^+	2	3	4	5	6	7	8	9
2	1.178	1.194	1.196	1.199	1.200	1.211	1.215	1.211
3	1.177	1.192	1.194	1.198	1.199	1.210	1.214	1.210
4	1.184	1.200	1.202	1.206	1.207	1.219	1.223	1.219
5	1.184	1.200	1.202	1.206	1.207	1.219	1.223	1.218
6	1.183	1.200	1.202	1.205	1.206	1.220	1.224	1.219

由以上结果可以看出，Ⅰ型圆形孔边裂纹问题的收敛性是很好的。



图 6－4 表示受均匀剪切的含内部裂纹的矩形板，而图 6－5 则表示受均匀剪切的含圆形孔边裂纹的矩形板，其几何尺寸与材料性质均与受均匀拉伸情况相同。在各向同性和正交各向异性材料情况下，收敛性验证的计算结果分别列于表 6－7 至表 6－10 之中。表中所列数值为 $\overline{K}_{\text{II}}=K_{\text{II}}/(\tau\sqrt{\pi a})$，$\overline{K}_{\text{IIL}}=K_{\text{IIL}}/(\tau\sqrt{\pi a})$ 以及 $\overline{K}_{\text{IIR}}=K_{\text{IIR}}/(\tau\sqrt{\pi a})$。

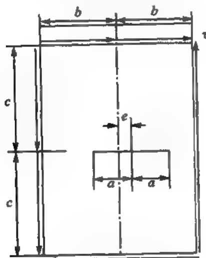


图 6－4　受均匀剪切含内部裂纹的矩形板

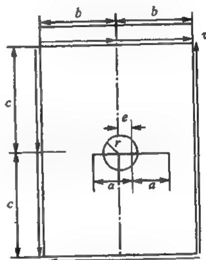


图 6－5　受均匀剪切含圆形孔边裂纹的矩形板

表 6－7　含 II 型中心内部裂纹矩形板 $\overline{K}_{\text{II}}$ 计算结果的收敛情况

$(c/b=1, a/b=0.4, e/b=0)$

M^{+} / 材　料	2	3	4	5	6	7	8	9
各向同性	1.102	1.107	1.124	1.128	1.133	1.134	1.135	1.135
正交各向异性	1.056	1.070	1.078	1.082	1.083	1.083	1.083	1.083



表6-8 含Ⅱ型偏心内部裂纹矩形板计算结果的收敛情况

($c/b=1, a/b=0.24, e/b=0.6$)

材料 \ M^+	$\bar{K}_{\mathrm{II}}$	2	3	4	5	6	7	8	9
各向同性	$\bar{K}_{\mathrm{II}t}$	1.205	1.255	1.277	1.305	1.317	1.378	1.361	1.371
	$\bar{K}_{\mathrm{II}R}$	1.169	1.235	1.228	1.245	1.246	1.300	1.260	1.290
正交各向异性	$\bar{K}_{\mathrm{II}L}$	1.103	1.110	1.140	1.157	1.173	1.193	1.224	1.223
	$\bar{K}_{\mathrm{II}L}$	1.094	1.111	1.134	1.160	1.171	1.183	1.218	1.216

表6-9 含Ⅱ型中心圆形孔边裂纹各向同性板 $\bar{K}_{\mathrm{II}}$ 的收敛情况

($c/b=2, r/b=0.25, a/b=0.4, e/b=0$)

M^- \ M^+	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1.053	1.067	1.079	1.086	1.088	1.089	1.092	1.090
2	0.761	0.777	0.790	0.796	0.799	0.800	0.802	0.801
3	0.757	0.774	0.787	0.793	0.796	0.797	0.799	0.798
4	0.752	0.769	0.782	0.788	0.791	0.792	0.794	0.793
5	0.752	0.769	0.782	0.789	0.792	0.793	0.794	0.793

表6-10 含Ⅱ型中心圆形孔边裂纹正交各向异性板 $\bar{K}_{\mathrm{II}}$ 的收敛情况

($c/b=2, r/b=0.25, a/b=0.4, e/b=0$)

M \ M^+	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0.715	0.753	0.772	0.776	0.779	0.782	0.783	0.785
3	0.712	0.750	0.769	0.773	0.777	0.779	0.780	0.782
4	0.682	0.729	0.749	0.753	0.757	0.759	0.760	0.762
5	0.701	0.732	0.752	0.760	0.765	0.767	0.769	0.775

由以上结果可以看到，Ⅱ型裂纹问题的收敛性也是很好的。对于各向同性材料，取 $M^+=M^-=3$，误差不超过3%。

最后，图6-6表示受均匀拉伸的含菱形孔边裂纹的矩形板。在各向同性材料情况下，收敛性验证的计算结果列于表6-11之中。

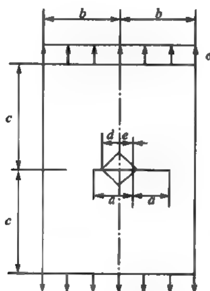


图6-6　受均匀拉伸含菱形孔边裂纹的矩形板

表6-11　含Ⅰ型中心菱形孔边裂纹各向同性板 $\bar{K}_I$ 的收敛情况
($c/b=2, d/b=0.15, a/b=0.3, e/b=0$)

M^- \ M^+	2	3	4	5	6	7	8	9
2	1.054	1.059	1.059	1.061	1.061	1.062	1.062	1.062
3	1.071	1.075	1.075	1.076	1.076	1.078	1.078	1.078
4	1.072	1.076	1.077	1.079	1.079	1.080	1.079	1.079
5	1.071	1.076	1.077	1.079	1.079	1.080	1.079	1.079



为了工程应用的需要，采用此解析变分方法求解受均匀拉伸或均匀剪切的各向同性矩形板的圆形孔边裂纹问题，并提供了系统的计算结果。图 6－7 至图 6－11 给出了在各种高宽比条件下，对称各向同性含孔边裂纹板的 $\overline{K}_{\mathrm{I}}$ 曲线族；图 6－12 至图 6－16 给出了在各种高宽比条件下，反对称各向同性含孔边裂纹板的 $\overline{K}_{\mathrm{II}}$ 曲线族。

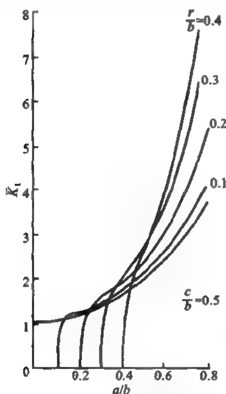


图 6－7 受均匀拉伸含圆形孔边裂纹各向同性矩形板 $\overline{K}_{\mathrm{I}} \sim a/b$ 的关系曲线($c/b=0.5$)

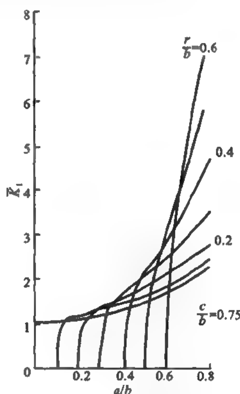


图 6－8 受均匀拉伸含圆形孔边裂纹各向同性矩形板 $\overline{K}_{\mathrm{I}} \sim a/b$ 的关系曲线($c/b=0.75$)



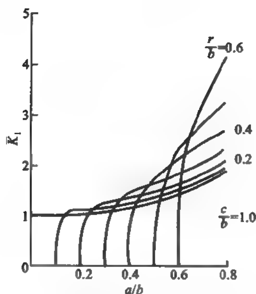


图 6-9 受均匀拉伸含圆形孔边裂纹各向同性矩形板 $\bar{K}_{\text{I}} \sim a/b$ 的关系曲线($c/b=1.0$)

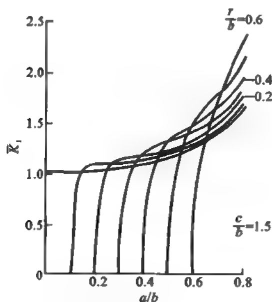


图 6-10 受均匀拉伸含圆形孔边裂纹各向同性矩形板 $\bar{K}_{\text{I}} \sim a/b$ 的关系曲线($c/b=1.5$)



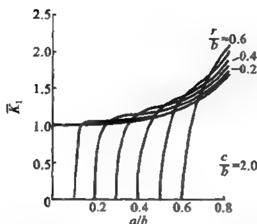


图 6-11 受均匀拉伸含圆形孔边裂纹各向同性矩形板 $\bar{K}_I \sim a/b$ 的关系曲线($c/b=2.0$)

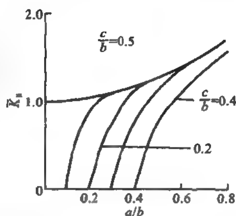


图 6-12 受均匀剪切含圆形孔边裂纹各向同性矩形板 $\bar{K}_{II} \sim a/b$ 的关系曲线($c/b=0.5$)

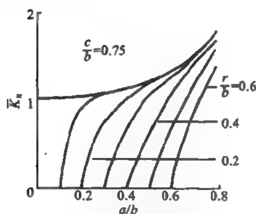


图 6-13 受均匀剪切含圆形孔边裂纹各向同性矩形板 $\bar{K}_{II} \sim a/b$ 的关系曲线($c/b=0.75$)

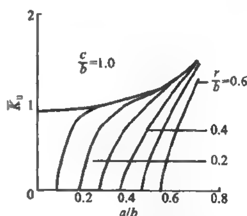


图 6-14 受均匀剪切含圆形孔边裂纹各向同性矩形板 $\bar{K}_{II} \sim a/b$ 的关系曲线($c/b=1.0$)



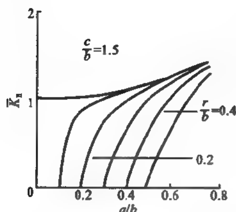


图 6-15 受均匀剪切含圆形孔边裂纹各向同性矩形板 $\bar{K}_{\rm I} \sim a/b$ 的关系曲线($c/b=1.5$)

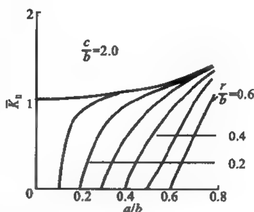


图 6-16 受均匀剪切含圆形孔边裂纹各向同性矩形板 $\bar{K}_{\rm I} \sim a/b$ 的关系曲线($c/b=2.0$)

通过对于上述解析变分解法的理论分析与采用该方法所进行的数值计算,可以得出如下结论:

① 由于所有基本方程预先得到满足,故在变分方程中只存在着沿板边界的线积分,而没有面积分。

② 沿裂纹表面的边界条件被精确地满足。

③ 利用基于分部积分的递推公式,获得有关含孔边裂纹板的精确位移表达式。

④ 预先还满足绕孔边裂纹的位移单值条件,以保证含内部裂纹板中复连通域位移的单值性。

⑤ 利用罗彼塔法则可以证明,各向异性板的应力和位移表达式可以用于各向同性板的情况。

⑥ 数值计算实例表明,由本方法所得结果收敛正确、迅速,故计算节省机时。应着重指出,本方法大量简化了上机前的准备工作,易于得到系统计算结果。因而,该方法便于在工程上应用。



6.2　加劲平板孔边裂纹情况

对于含孔边裂纹板，工程上经常采用铆接加劲环，以降低被加劲板的应力强度因子，如图 6-17 所示。

采用一般计算力学方法分析这一问题时，计算工作量将会是很大的。如果将铆钉孔直径取为零，则该点位移具有对数奇异性，故计算结果不收敛。如果将铆钉孔直径不取为零，网格划分必然相当复杂，结构自由度也大为增加。为此，采用解析变分方法解决这一问题。

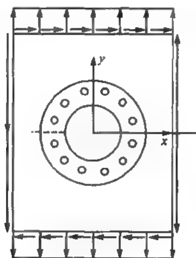


图 6-17　含孔边裂纹铆接加劲板

6.2.1　被加劲板的一般表达式

被加劲板的受力形式如图 6-18 所示。板上有 L 个钉孔。第 l 个钉孔上铆钉力可表示为 $R_{1l}+\mathrm{i}R_{2l}$。c_l 是只含钉孔 A_l 的任意周界。



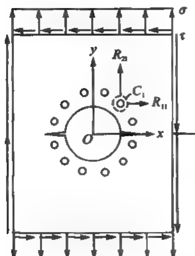


图 6-18　被加劲板的受力形式

由于钉孔合力不为零，根据各向异性弹性力学平面问题的一般理论，可知

$$\varphi(z_1) = \sum_{l=1}^{L} D_l \ln(z_1 - z_{1l}) + \phi^*(z_1) \qquad (6-65)$$

$$\psi(z_2) = \sum_{l=1}^{L} E_l \ln(z_2 - z_{2l}) + \psi^*(z_2) \qquad (6-66)$$

式中，z_{1l} 与 z_{2l} 为钉孔 A_l 内任意点的复坐标；$\phi^*(z_1)$ 和 $\psi^*(z_2)$ 为关于 $c_l(l=1,\cdots,L)$ 的单值函数，由式(6-47)与式(6-48)决定；D_l 和 E_l 为待定的复常数，它们取决于绕 c_l 的合力条件和位移单值条件。

采用 5.2.2 节的推导方法，可将以上两个条件写成如下形式：

$$(1+i\mu_1)D_l - (1+i\bar{\mu}_1)\bar{D}_l + (1+i\mu_2)E_l - (1+i\bar{\mu}_2)\bar{E}_l = -\frac{R_{1l}+iR_{2l}}{2\pi} \qquad (6-67)$$

$$(p_1+iq_1)D_l - (\bar{p}_1+i\bar{q}_1)\bar{D}_l + (p_2+iq_2)E_l - (\bar{p}_2+i\bar{q}_2)\bar{E}_l = 0 \qquad (6-68)$$

令



$$p_j = p_j^R + ip_j^I, \qquad q_j = q_j^R + iq_j^I \qquad (j = 1,2) \tag{6-69}$$

$$D_l = D_l^R + iD_l^I, \qquad E_l = E_l^R + iE_l^I \qquad (l = 1,\cdots,L) \tag{6-70}$$

对于正交各向异性材料，有

$$\mu_j = i\beta_j, \qquad p_j^I = q_j^R = 0 \qquad (j = 1,2) \tag{6-71}$$

于是，由式(6-67)与式(6-68)，可知

$$\left.\begin{aligned} D_l^R &= \frac{q_2^I R_{1l}}{4\pi(\beta_1 q_2^I - \beta_2 q_1^I)}, \qquad D_l^I = \frac{p_2^R R_{2l}}{4\pi(p_1^R - p_2^R)} \\ E_l^R &= \frac{-q_1^I R_{1l}}{4\pi(\beta_1 q_2^I - \beta_2 q_1^I)}, \qquad E_l^I = \frac{-p_1^R R_{2l}}{4\pi(p_1^R - p_2^R)} \end{aligned}\right\} \tag{6-72}$$

式(6-65)与式(6-66)的一阶导数具有如下形式：

$$\varphi'(z_1) = \sum_{l=1}^{L} \frac{1}{z_1 - z_{1l}} D_l + \varphi^{*\prime}(z_1) \tag{6-73}$$

$$\psi'(z_2) = \sum_{l=1}^{L} \frac{1}{z_2 - z_{2l}} E_l + \psi^{*\prime}(z_2) \tag{6-74}$$

将式(6-73)、式(6-74)、式(6-65)与式(6-66)代入式(5-25)与式(6-1)，可得受钉载含孔边裂纹正交各向异性板应力和位移分量的表达式如下：

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{L} d_{kl}^{(ij)}(x,y)R_{kl} + \sum_{k=1}^{4}\sum_{m=-M^-}^{M^+} f_{km}^{(ij)}(x,y)H_{km} \tag{6-75}$$

$$u_i = \sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{L} e_{kl}^{(i)}(x,y)R_{kl} + \sum_{k=1}^{4}\sum_{m=-M^-}^{M^+} g_{km}^{(i)}(x,y)H_{km} \tag{6-76}$$

式中，$d_{kl}^{(ij)}(x,y),\cdots,g_{km}^{(i)}(x,y)$为坐标的已知函数；$R_{kl}$为已知常数；$H_{km}$为待定常数。



6.2.2 加劲环的一般表达式

加劲环的受力形式如图 6-19 所示。该环具有一个不含裂纹的无载孔以及 L 个无孔边裂纹的有载孔。

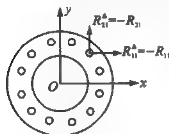


图 6-19 加劲环的受力形式

对于有限大的各向异性板，按照各向异性平面问题弹性理论，应力分量和位移分量可用复变函数 $\varphi(z_1)$ 与 $\psi(z_2)$ 表示如下：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{xx} &= 2\mathrm{Re}\,[\mu_1^2\varphi'(z_1)+\mu_2^2\psi'(z_2)]\\ \sigma_{yy} &= 2\mathrm{Re}\,[\varphi'(z_1)+\psi'(z_2)]\\ \sigma_{xy} &= -2\mathrm{Re}\,[\mu_1\varphi'(z_1)+\mu_2\psi'(z_2)]\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}u_x &= 2\mathrm{Re}\,[p_1\varphi(z_1)+p_2\psi(z_2)]\\ u_y &= 2\mathrm{Re}\,[q_1\varphi(z_1)+q_2\psi(z_2)]\end{aligned}\right\}$$

为了便于研究，可将上述两个复变函数分为如下两部分：

$$\varphi'(z_1)=\varphi_1'(z_1)+\varphi_2'(z_1),\qquad \psi'(z_2)=\psi_1'(z_2)+\psi_2'(z_2) \tag{6-77}$$

这样，应力场也被分成相应的两部分。

第一应力场系由 $\varphi_1'(z_1)$ 与 $\psi_1'(z_2)$ 所控制，它们满足沿 x 轴切应力 $\sigma_{xy}=0$ 的条件。由式(5-32)可知，这个条件可由下式得到保证，即

$$\mu_1\varphi_1'(\tau)+\mu_2\psi_1'(\tau)=0 \tag{6-78}$$

式中，τ 为 z_1 与 z_2 在 x 轴上的值。

第二应力场系由 $\varphi_2'(z_1)$ 与 $\psi_2'(z_2)$ 所控制，它们满足沿 x 轴正应力 $\sigma_{yy}=0$ 的条件。由式(5-32)可知，这个条件可由下式得到保证，即

$$\varphi_2'(\tau)+\psi_2'(\tau)=0 \tag{6-79}$$

于是，可以得出



$$\varphi'(z_1)=\frac{\mu_2}{\mu_2-\mu_1}f_1'(z_1)+\frac{1}{\mu_2-\mu_1}f_2'(z_1) \tag{6-80}$$

$$\psi'(z_2)=-\frac{\mu_1}{\mu_2-\mu_1}f_1'(z_2)-\frac{1}{\mu_2-\mu_1}f_2'(z_2) \tag{6-81}$$

以及

$$\varphi(z_1)=\frac{\mu_2}{\mu_2-\mu_1}f_1(z_1)+\frac{1}{\mu_2-\mu_1}f_2(z_1) \tag{6-82}$$

$$\psi(z_2)=-\frac{\mu_1}{\mu_2-\mu_1}f_1(z_2)-\frac{1}{\mu_2-\mu_1}f_2(z_2) \tag{6-83}$$

将式(6-80)和式(6-81)代入式(5-32)，应力分量可以写成如下形式：

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{xx}&=2\mathrm{Re}\left\{\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_2-\mu_1}[\mu_1f_1'(z_1)-\mu_2f_1'(z_2)]+\frac{1}{\mu_2-\mu_1}[\mu_1^2f_2'(z_1)-\mu_2^2f_2'(z_2)]\right\}\\
\sigma_{yy}&=2\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\mu_2-\mu_1}[\mu_2f_1'(z_1)-\mu_1f_1'(z_2)]+\frac{1}{\mu_2-\mu_1}[f_2'(z_1)-f_2'(z_2)]\right\}\\
\sigma_{xy}&=-2\mathrm{Re}\left\{\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_2-\mu_1}[f_1'(z_1)-f_1'(z_2)]+\frac{1}{\mu_2-\mu_1}[\mu_1f_2'(z_1)-\mu_2f_2'(z_2)]\right\}
\end{aligned}\right\} \tag{6-84}$$

将式(6-82)和式(6-83)代入式(5-33)，位移分量可以表达为如下形式：

$$\left.\begin{aligned}
u_x&=2\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\mu_2-\mu_1}[p_1\mu_2f_1(z_1)-p_2\mu_1f_1(z_2)]+\frac{1}{\mu_2-\mu_1}[p_1f_2(z_1)-p_2f_2(z_2)]\right\}\\
u_y&=2\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\mu_2-\mu_1}[q_1\mu_2f_1(z_1)-q_2\mu_1f_1(z_2)]+\frac{1}{\mu_2-\mu_1}[q_1f_2(z_1)-q_2f_2(z_2)]\right\}
\end{aligned}\right\} \tag{6-85}$$



对于含有一个无孔边裂纹的无载孔的板，若原点位于孔心处，解析函数 $f_j(z_k)$ 可以展成如下的罗朗级数(Laurrent's series)：

$$f'_1(z_k) = \sum_{m=-M^-}^{M^+} A_m z_k^m, \qquad f'_2(z_k) = \sum_{m=-M^-}^{M^+} B_m z_k^m \qquad (6-86)$$

$$\left.\begin{aligned} f_1(z_k) &= \sum_{m\neq -1} \frac{1}{m+1} A_m z_k^{m+1} + A_{-1} \ln z_k \\ f_2(z_k) &= \sum_{m\neq -1} \frac{1}{m+1} B_m z_k^{m+1} + B_{-1} \ln z_k \end{aligned}\right\} \qquad (6-87)$$

根据绕钉孔的位移单值条件，有

$$u_x \mid_c = 0, \qquad u_y \mid_c = 0 \qquad (6-88)$$

式中，c 为绕钉孔的任一封闭曲线。根据式(6 - 85)、式(6 - 87)和式(6 - 88)，可得出

$$A_{-1} = 0, \qquad B_{-1} = 0 \qquad (6-89)$$

考虑到元素的刚体转动

$$\omega = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \qquad (6-90)$$

于是，可以看出，当

$$\operatorname{Im} A_0 = A_0^I = 0, \qquad \operatorname{Re} B_0 = B_0^R = 0 \qquad (6-91)$$

时，则消除了整块板的刚体转动。

对于一个具有 L 个有载孔的板，则有必要在式(6 - 82)和式(6 - 83)中引入某些附加项，即

$$\varphi(z_1) = \sum_{l=1}^{L} D_l \ln(z_1 - z_{1l}) + \varphi^*(z_1) \qquad (6-92)$$

$$\psi(z_2) = \sum_{l=1}^{L} E_l \ln(z_2 - z_{2l}) + \psi^*(z_2) \qquad (6-93)$$

式中，D_l 和 E_l 根据式(6 - 72)来确定，而 $\varphi^*(z_1)$ 和 $\psi^*(z_2)$ 则由式(6 - 82)和式(6 - 83) 所定义。

令

$$C_{1m} = \operatorname{Re} A_m = A_m^R, \qquad C_{2m} = \operatorname{Im} A_m = A_m^I \qquad (6-94)$$

$$C_{3m} = \operatorname{Re} B_m = B_m^R, \qquad C_{4m} = \operatorname{Im} B_m = B_m^I \qquad (6-95)$$



将式(6-92)与式(6-93)代入式(5-32)和式(5-33)，则可得具有一个不含裂纹的无载孔以及 L 个无孔边裂纹的有载孔的正交各向异性板的应力和位移分量的表达式，即

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{L} d_{kl}^{(ij)}(x,y)R_{kl} + \sum_{k=1}^{4}\sum_{m=-M^-}^{M^+} s_{km}^{(ij)}(x,y)C_{km} \tag{6-96}$$

$$u_i = \sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{L} e_{kl}^{(i)}(x,y)R_{kl} + \sum_{k=1}^{4}\sum_{m=-M^-}^{M^+} t_{km}^{(i)}(x,y)C_{km} \tag{6-97}$$

应该指出，在加劲环和被加劲板中，待定系数与已知函数是不同的。

6.2.3 加劲平板孔边裂纹情况的解析变分解法

6.2.1 节和 6.2.2 节给出的被加劲板和加劲环的应力和位移分量表达式分别满足各自的基本方程、复连通域的位移单值条件以及合力平衡条件。首先，假定铆钉力已知。在这种情况下，板与环的应力和位移表达式中的待定系数分别取决于各自的边界条件，并由此来确定所有待定系数。在没有指定位移边界条件的情况下，采用基于最小总势能原理的变分方法是较为便利的。

被加劲板或加劲环的总势能 Π 可以表示为

$$\Pi = \int_V W\mathrm{d}V - \int_V F_i u_i \mathrm{d}V - \int_{S_T} T_i u_i \mathrm{d}s \tag{6-98}$$

式中，W 为应变能密度；F_i 为体力分量；T_i 为面力分量；u_i 为位移分量；V 为板或环的体积；S_T 是静力边界面积。

总势能的极值条件为

$$\delta\Pi = 0 \tag{6-99}$$

应用分部积分公式、体积分与面积分变换公式，式(6-99)变为如下形式：



$$\int_V (\sigma_{ij,j} + F_i)\delta u_i \mathrm{d}V - \int_{S_p} (\sigma_{ij} n_j - T_i)\delta u_i \mathrm{d}s -$$

$$\sum_{l=1}^{L}\left[\int_{S_l} (\sigma_{ij} n_j - T_i)\delta u_i \mathrm{d}s\right] = 0 \qquad (6-100)$$

式中，S_p 为钉孔以外的静力边界；S_l 则为第 l 个钉孔的表面面积。

由于板与环的平衡方程已经预先得到满足，可知

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0 \qquad (在\ V\ 内) \qquad (6-101)$$

进一步，在小钉孔的条件下，沿钉孔表面，可以认为位移变分保持常数，从而

$$\int_{S_l} (\sigma_{ij} n_j - T_i)\delta u_i \mathrm{d}s = \left\{\int_{S_l} (\sigma_{ij} n_j - T_i)\mathrm{d}s\right\}\delta u_i \qquad (6-102)$$

由于绕钉孔的合力边界条件已经预先满足，故

$$\int_{S_l} (\sigma_{ij} n_j - T_i)\mathrm{d}s = 0 \qquad (6-103)$$

因此，由式(6－102)和式(6－103)，可知

$$\int_{S_l} (\sigma_{ij} n_j - T_i)\delta u_i \mathrm{d}s = 0 \qquad (6-104)$$

于是，变分方程式(6－100)可简化如下：

$$\int_{S_p} (\sigma_{ij} n_j - T_i)\delta u_i \mathrm{d}s = 0 \qquad (6-105)$$

对于被加劲板，由式(6－75)和式(6－76)，可将应力及位移分量分解为如下两部分：

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{*} + \sigma_{ij}^{**} \qquad (6-106)$$

$$u_i = u_i^{*} + u_i^{**} \qquad (6-107)$$

这里

$$\sigma_{ij}^{*} = \sum_{k=1}^{4}\sum_{m=-M^-}^{M^+} f_{km}^{(ij)}(x,y)H_{km} \qquad (6-108)$$

$$\sigma_{ij}^{**} = \sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{L} d_{kl}^{(ij)}(x,y)R_{kl} \qquad (6-109)$$

$$u_i^{*} = \sum_{k=1}^{4}\sum_{m=-M^-}^{M^+} g_{km}^{(i)}(x,y)H_{km} \qquad (6-110)$$



$$u_i^{**} = \sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{L} e_{kl}^{(i)}(x,y)R_{kl} \tag{6-111}$$

由于σ_{ij}^{**}满足沿裂纹表面S_c的边界条件，而且u_i^{**}没有变分，于是式(6-105)可以改写如下：

$$\int_{S_T-S_c}\sigma_{ij}^{*}n_j\delta u_i^{*}\,\mathrm{d}s = \int_{S_T}(T_i-\sigma_{ij}^{**}n_j)\delta u_i^{*}\,\mathrm{d}s \tag{6-112}$$

将式(6-108)、式(6-109)与式(6-110)代入式(6-112)，可得

$$\sum_{r=1}^{4}\sum_{m=-M^-}^{M^-}\lambda_{rmsn}H_{rm} = P_{sn} + \sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{L}R_{kl}\alpha_{klsn}$$
$$(s=1,2,3,4),\qquad (-M^-\leqslant n\leqslant M^+) \tag{6-113}$$

这里

$$\lambda_{rmsn} = \int_{S_T-S_c} f_{rm}^{(ij)}(x,y)n_j g_{sn}^{(i)}(x,y)\mathrm{d}s \tag{6-114}$$

$$P_{sn} = \int_{S_T-S_c} T_i g_{sn}^{(i)}(x,y)\mathrm{d}s \tag{6-115}$$

$$\alpha_{klsn} = \int_{S_T} d_{kl}^{(ij)}(x,y)n_j g_{sn}^{(i)}(x,y)\mathrm{d}s \tag{6-116}$$

对于加劲环，也可将应力及位移分量分解为如下两部分：

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{*} + \sigma_{ij}^{**} \tag{6-117}$$

$$u_i = u_i^{*} + u_i^{**} \tag{6-118}$$

式中

$$\sigma_{ij}^{*} = \sum_{k=1}^{4}\sum_{m=-M^-}^{M^+} s_{km}^{(ij)}(x,y)C_{km} \tag{6-119}$$

$$\sigma_{ij}^{**} = \sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{L} d_{kl}^{(ij)}(x,y)R_{kl} \tag{6-120}$$

$$u_i^{*} = \sum_{k=1}^{4}\sum_{m=-M^-}^{M^+} t_{km}^{(i)}(x,y)C_{km} \tag{6-121}$$

$$u_i^{**} = \sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{L} e_{kl}^{(i)}(x,y)R_{kl} \tag{6-122}$$

于是，式(6-105)可以简化为

$$\int_{S_T}\sigma_{ij}^{*}n_j\delta u_i^{*}\,\mathrm{d}s=\int_{S_T}(T_i-\sigma_{ij}^{**}n_j)\delta u_i^{*}\,\mathrm{d}s \tag{6-123}$$

将式(6-119)、式(6-120)与式(6-121)代人式(6-123)，可得

$$\sum_{r=1}^{4}\sum_{m=-M^-}^{M^+}\mu_{rsmn}C_{rm}=Q_{sn}+\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{L}R_{kl}\beta_{klsn}$$
$$(s=1,2,3,4),\qquad (-M^-\leqslant n\leqslant M^+) \tag{6-124}$$

这里

$$\mu_{rsmn}=\int_{S_T}s_{rm}^{(ij)}(x,y)n_jt_{sn}^{(i)}(x,y)\mathrm{d}s \tag{6-125}$$

$$Q_{sn}=\int_{S_T}T_it_{sn}^{(i)}(x,y)\mathrm{d}s \tag{6-126}$$

$$\beta_{klsn}=\int_{S_T}d_{kl}^{(ij)}(x,y)n_jt_{sn}^{(i)}(x,y)\mathrm{d}s \tag{6-127}$$

由式(6-113)与式(6-124)，即可求得系数 H_{rm} 和 C_{rm}，并可进一步由式(6-36)与式(6-37)确定被加劲板应力强度因子与加强环孔边应力集中系数。

6.2.4 各向异性理论应用于各向同性情况的研究

业已证明，对于含无载孔的孔边裂纹板，由正交各向异性材料所得应力与位移表达式同样也适用于各向同性材料的情况。鉴于两组公式体系的类似性，对于具有无载孔且无孔边裂纹的板，也可以证明，由正交各向异性材料所得应力与位移表达式仍然适用于各向同性材料的情况。现在，仅仅需要证明，对于具有载孔且无孔边裂纹的板，上述有效性的存在。

根据叠加原理，考虑一个有载孔的情况，且原点移至该孔的中心。于是，由式(6-92)和式(6-93)，可以得出

$$\varphi'(z_1)=(D_l^R+\mathrm{i}D_l^I)\frac{1}{z_1} \tag{6-128}$$

$$\psi'(z_2)=(E_l^R+\mathrm{i}E_l^I)\frac{1}{z_2} \tag{6-129}$$



这里，四个常数是根据式(6－72)来确定的。将式(6－128)和式(6－129)代入式(5－32)，可以得出

$$\sigma_{xx}=2\mathrm{Re}\left\{-\frac{R_{1l}}{4\pi(\beta_1 q_2^{\mathrm{I}}-\beta_2 q_1^{\mathrm{I}})}\left[\frac{\beta_1^2 q_2^{\mathrm{I}}}{z_1}-\frac{\beta_2^2 q_1^{\mathrm{I}}}{z_2}\right]-\mathrm{i}\frac{R_{2l}}{4\pi(p_1^{\mathrm{R}}-p_2^{\mathrm{R}})}\left[\frac{\beta_1^2 p_2^{\mathrm{R}}}{z_1}-\frac{\beta_2^2 p_1^{\mathrm{R}}}{z_2}\right]\right\} \tag{6-130}$$

$$\sigma_{yy}=2\mathrm{Re}\left\{\frac{R_{1l}}{4\pi(\beta_1 q_2^{\mathrm{I}}-\beta_2 q_1^{\mathrm{I}})}\left[\frac{q_2^{\mathrm{I}}}{z_1}-\frac{q_1^{\mathrm{I}}}{z_2}\right]+\mathrm{i}\frac{R_{2l}}{4\pi(p_1^{\mathrm{R}}-p_2^{\mathrm{R}})}\left[\frac{p_2^{\mathrm{R}}}{z_1}-\frac{p_1^{\mathrm{R}}}{z_2}\right]\right\} \tag{6-131}$$

$$\sigma_{xy}=2\mathrm{Re}\left\{-\mathrm{i}\frac{R_{1l}}{4\pi(\beta_1 q_2^{\mathrm{I}}-\beta_2 q_1^{\mathrm{I}})}\left[\frac{\beta_1 q_2^{\mathrm{I}}}{z_1}-\frac{\beta_2 q_1^{\mathrm{I}}}{z_2}\right]+\frac{R_{2l}}{4\pi(p_1^{\mathrm{R}}-p_2^{\mathrm{R}})}\left[\frac{\beta_1 p_2^{\mathrm{R}}}{z_1}-\frac{\beta_2 p_1^{\mathrm{R}}}{z_2}\right]\right\} \tag{6-132}$$

对于各向同性材料，可以引入小量，使各向异性弹性理论中的复参数改写为

$$\beta_1=1-\varepsilon,\qquad \beta_2=1+\varepsilon,\qquad \varepsilon\to 0 \tag{6-133}$$

和

$$a_{11}=a_{22}=\frac{1}{E},\qquad a_{12}=a_{21}=-\frac{\nu}{E} \tag{6-134}$$

式中，E 为杨氏弹性模量；ν 为泊松比。

可以看出，在上述条件下，应力分量属于以下类型：

$$\sigma_{ij}=\lim_{\varepsilon\to 0}h(\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} \tag{6-135}$$

这里

$$\lim_{\varepsilon\to 0}f(\varepsilon)=0,\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}g(\varepsilon)=0 \tag{6-136}$$

利用在极限运算中的罗彼塔法则，有

$$\sigma_{ij}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)} \tag{6-137}$$

于是，可以得出

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_{xx}+\sigma_{yy}=4\mathrm{Re}\left[-\frac{1+\nu}{8\pi z}(R_{1l}+\mathrm{i}R_{2l})\right]\\&\sigma_{yy}-\sigma_{xx}+2\mathrm{i}\sigma_{xy}=\frac{1}{2\pi z}[2R_{1l}-\mathrm{i}R_{2l}(1-\nu)]-\\&\qquad\mathrm{i}\frac{y}{2\pi z^{2}}[R_{1l}(1+\nu)+\mathrm{i}R_{2l}(1+\nu)]\end{aligned}\right\}\tag{6-138}$$

此外，对于各向同性板，有[6,3]

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_{xx}+\sigma_{yy}=4\mathrm{Re}\,[\varphi'(z)]\\&\sigma_{yy}-\sigma_{xx}+2\mathrm{i}\sigma_{xy}=2[\bar{z}\varphi''(z)+\psi'(z)]\end{aligned}\right\}\tag{6-139}$$

通过对比式(6-138)和式(6-139)，可得

$$\varphi'(z)=-\frac{1+\nu}{8\pi z}(R_{1l}+\mathrm{i}R_{2l})\tag{6-140}$$

$$\psi'(z)=\frac{3-\nu}{8\pi z}(R_{1l}-\mathrm{i}R_{2l})\tag{6-141}$$

式(6-140)和式(6-141)正好为适用于含有载孔各向同性板的复变函数表达式。通过积分，$\varphi(z)$和$\psi(z)$将为

$$\varphi(z)=-\frac{1+\nu}{8\pi}(R_{1l}+\mathrm{i}R_{2l})\ln z\tag{6-142}$$

$$\psi(z)=\frac{3-\nu}{8\pi}(R_{1l}-\mathrm{i}R_{2l})\ln z\tag{6-143}$$

6.2.5 铆接加劲平板孔边裂纹问题的解法

图 6-20 表示具有铆接加劲环的含孔边裂纹板。该图所示含孔边裂纹铆接加劲板可视为一静不定结构。对于一个 n 度静不定结构，假定多余约束力为 $X_1, X_2, \cdots, X_j, \cdots, X_n$。根据位移协调条件，可得到力法正则方程如下：

$$\Delta_i=\sum_{j=1}^{n}\delta_{ij}X_j+\Delta_{ip}=0\qquad(i=1,2,\cdots,n)\tag{6-144}$$

式中，系数 δ_{ij} 为 X_j 取单位值，而其他多余约束力与载荷为零时，



在基本系统中 X_i 作功的相对位移；自由项 Δ_{ip} 为在载荷作用下，所有多余约束力为零时，在基本系统中 X_i 作功的相对位移。系数 δ_{ij} 与自由项 Δ_{ip} 可以利用上述解析变分解法来求得。由位移互等定理，可知

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} \tag{6-145}$$

即式(6-144)中的系数矩阵是对称的。

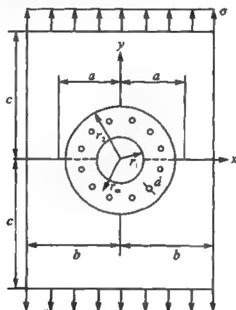


图 6-20 具有铆接加劲环的含孔边裂纹板

对于图 6-20 所示双对称问题，即 I 型问题，设每一象限包含 L 个钉孔。从平衡条件来看，作用在第 l 个钉孔上铆钉力的两个分量 R_{1l} 与 R_{2l} 是互相独立的。故可将多余约束力取为

$$\left.\begin{array}{ll} X_1 = R_{11}, & X_2 = R_{21} \\ \vdots & \\ X_{2l-1} = R_{1l}, & X_{2l} = R_{2l} \\ \vdots & \\ X_{2L-1} = R_{1L}, & X_{2L} = R_{2L} \end{array}\right\} \tag{6-146}$$

而且，关于第 l 个铆钉的相对位移 u_{1l} 与 u_{2l} 可表达为



$$\left.\begin{aligned} u_{1l} &= u_{1l}^{(1)} + u_{1l}^{(2)} \\ u_{2l} &= u_{2l}^{(1)} + u_{2l}^{(2)} \end{aligned}\right\} \tag{6-147}$$

式中，$u_{1l}^{(1)}$ 和 $u_{2l}^{(1)}$ 为被加劲板的绝对位移分量；$u_{1l}^{(2)}$ 和 $u_{2l}^{(2)}$ 为加劲环的绝对位移分量。于是

$$\left.\begin{aligned} &\Delta_1 = u_{11}, \qquad \Delta_2 = u_{21} \\ &\quad\vdots \\ &\Delta_{2l-1} = u_{1l}, \qquad \Delta_{2l} = u_{2l} \\ &\quad\vdots \\ &\Delta_{2L-1} = u_{1L}, \qquad \Delta_{2L} = u_{2L} \end{aligned}\right\} \tag{6-148}$$

从而，对于铆接加劲板而言，力法正则方程式(6-144)应该表示所有钉孔的位移协调条件，加劲板的静不定度 n 等于一个象限内铆钉孔个数的 2 倍。

方程式(6-144)的自由项 Δ_{ip}、开裂板的柔度系数 $\delta_{ij}^{(1)}$ 与加劲板的柔度系数 $\delta_{ij}^{(2)}$ 均可由变分方程式 (6-113)与式(6-124)以及式 (6-76)与式(6-97)求出。很容易证明

$$\delta_{ij} = \delta_{ij}^{(1)} + \delta_{ij}^{(2)} \tag{6-149}$$

在确定了 Δ_{ip} 与 δ_{ij} 后，即可由力法正则方程式(6-144)来求解铆钉力 X_j。

根据线性叠加原理，可求出开裂板的应力强度因子与加劲环的孔边应力如下：

$$K_{\mathrm{I}} = K_{\mathrm{I}}^{(P)} + \sum_{i=1}^{2L} \overline{K}_{\mathrm{I}}^{(i)} X_i \tag{6-150}$$

$$\sigma_y = \sum_{i=1}^{2L} \bar{\sigma}_y^{(i)} X_i \tag{6-151}$$

式中，$K_{\mathrm{I}}^{(P)}$ 为开裂板由外载荷所产生的应力强度因子；$\overline{K}_{\mathrm{I}}^{(i)}$ 为开裂板由单位铆钉力 $X_i = 1$ 所产生的应力强度因子；$\bar{\sigma}_y^{(i)}$ 为加劲环由单位铆钉力 $X_i = 1$ 所产生的孔边应力。



6.2.6　解析变分方法的收敛性验证

在对本方法进行收敛性验证时，研究三种类型的板。第一种类型是具有一个无载开裂孔与四个承受铆钉力的非开裂孔的单块矩形板；第二种类型是具有一个无载非开裂孔与四个承受铆钉力的非开裂孔的单块圆形板；第三种类型是一个以铆接圆环加劲的具有一个无载开裂孔的单块矩形板。这三种类型的板分别示于图6－21、图6－22和图6－23。其尺寸比例如下：

$$\frac{c}{b}=1.0,\quad \frac{r_1}{b}=0.3,\quad \frac{r_2}{b}=0.6$$

$$\frac{r_m}{b}=0.45,\quad \frac{d}{b}=0.02,\quad \frac{a}{b}=0.5,\quad \frac{h_2}{h_1}=1.0$$

其中，h_1 与 h_2 分别为被加劲板与加劲环的厚度。收敛性验证的计算结果列于表6－12至表6－17。

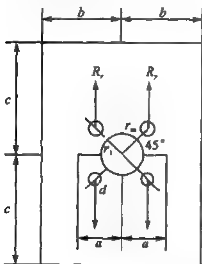


图6－21　含无载开裂孔承受铆钉力的矩形板

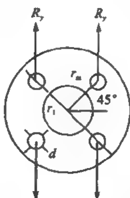


图6－22　含无载非开裂孔承受铆钉力的圆形板

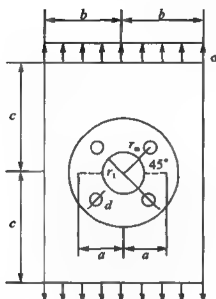


图 6-23　受均匀拉伸的含无载开裂孔的加劲板

表 6-12　含开裂孔承受铆钉力矩形板的
应力强度因子 $\bar{K}_{\text{I}}$ 的收敛情况(见图 6-21)

M^- \ M^+	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1.253	1.283	1.332	1.352	1.361	1.368	1.373	1.367
2	1.377	1.415	1.471	1.495	1.506	1.513	1.521	1.512
3	1.394	1.432	1.487	1.511	1.522	1.530	1.537	1.528
4	1.395	1.433	1.489	1.513	1.524	1.531	1.539	1.530
5	1.399	1.436	1.492	1.516	1.527	1.534	1.542	1.533
6	1.399	1.436	1.492	1.516	1.527	1.534	1.542	1.533
7	1.398	1.436	1.492	1.516	1.527	1.534	1.542	1.533

在表 6-12 中,$\bar{K}_{\text{I}}$ 为量纲为 1 的应力强度因子,并有

$$\bar{K}_{\text{I}} = K_{\text{I}} / \left(\frac{R_y}{bh_1}\sqrt{\pi a}\right) \qquad (6-152)$$

由表 6-12 可以看出,取 $M^+=4$,$M^-=3$ 时,$\bar{K}_{\text{I}}$ 的相对误差仅在



2%左右。

表 6－13　含开裂孔承受铆钉力矩形板的
铆钉孔边位移 $\bar{u}_y$ 的收敛情况(见图 6－21)

M^- \ M^+	2	3	4	5	6	7	8	9
1	3.436	3.509	3.581	3.612	3.623	3.629	3.635	3.629
2	3.503	3.584	3.662	3.694	3.709	3.716	3.722	3.715
3	3.527	3.606	3.683	3.718	3.730	3.737	3.743	3.737
4	3.526	3.605	3.683	3.718	3.729	3.736	3.743	3.736
5	3.527	3.607	3.684	3.719	3.731	3.738	3.744	3.738
6	3.528	3.606	3.684	3.719	3.731	3.738	3.744	3.737
7	3.528	3.607	3.684	3.719	3.731	3.738	3.744	3.738

在表 6－13 中，$\bar{u}_y$ 为量纲为 1 的铆钉孔边位移，并有

$$\bar{u}_y = \frac{u_y}{b} \times 10^4 \tag{6-153}$$

由表 6－13 可以看出，取 $M^+=3$，$M^-=3$ 时，$\bar{u}_y$ 的相对误差最多不超过 3%。

表 6－14　含非开裂孔承受铆钉力圆形板
的铆钉孔边位移 $\bar{u}_y$ 的收敛情况(见图 6－22)

M^- \ M^+	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2.287	2.376	2.384	2.396	2.394	2.421	2.374	2.372
2	3.165	3.258	3.264	3.277	3.275	3.240	3.254	3.253
3	3.200	3.346	3.353	3.365	3.363	3.396	3.341	3.340
4	3.222	3.347	3.353	3.366	3.363	3.397	3.342	3.341
5	3.224	3.350	3.356	3.369	3.366	3.340	3.344	3.343
6	3.225	3.350	3.356	3.369	3.366	3.340	3.345	3.343
7	3.226	3.351	3.357	3.370	3.367	3.401	3.346	3.344

在表 6－14 中，$\bar{u}_y$ 为量纲为 1 的铆钉孔边位移，并有

$$\bar{u}_y = \frac{u_y}{b} \times 10^4 \tag{6-154}$$

由表 6－14 可以看出，取 $M^+=3$，$M^-=3$ 时，$\bar{u}_y$ 的相对误差已小于 0.1%。

表 6－15　含开裂孔承受远方拉力加劲板

铆钉力 $\bar{R}_y$ 的收敛情况（见图 6－23）

M^- \ M^+	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0.350 7	0.347 3	0.348 4	0.348 3	0.348 6	0.347 2	0.350 0	0.349 9
2	0.306 4	0.303 6	0.305 3	0.305 5	0.305 9	0.304 5	0.307 2	0.307 0
3	0.299 4	0.295 6	0.297 4	0.297 6	0.298 0	0.296 6	0.299 3	0.299 1
4	0.299 1	0.295 4	0.297 2	0.297 4	0.297 8	0.296 4	0.299 1	0.298 9
5	0.298 8	0.295 1	0.296 9	0.297 1	0.297 5	0.296 1	0.298 7	0.298 6
6	0.298 8	0.295 1	0.296 9	0.297 1	0.297 4	0.296 1	0.298 8	0.298 6
7	0.298 8	0.295 1	0.296 9	0.297 1	0.297 4	0.296 1	0.298 8	0.298 6

在表 6－15 中，$\bar{R}_y$ 为量纲为 1 的铆钉力，并有

$$\bar{R}_y = \frac{R_y}{\sigma b h_2} \tag{6-155}$$

由表 6－15 可以看出，取 $M^+=3$，$M^-=3$ 时，$\bar{R}_y$ 的相对误差仅在 1%左右。

表 6－16　含开裂孔承受远方拉力加劲板

的应力强度因子 $\bar{K}_{\rm I}$ 的收敛情况（见图 6－23）

M^- \ $M+$	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1.058	1.064	1.069	1.071	1.071	1.073	1.071	1.070
2	1.159	1.167	1.175	1.178	1.179	1.181	1.179	1.178



续表 6-16

M^- \ M^+	2	3	4	5	6	7	8	9
3	1.153	1.162	1.170	1.173	1.174	1.176	1.174	1.173
4	1.151	1.160	1.169	1.171	1.172	1.175	1.173	1.172
5	1.150	1.160	1.168	1.171	1.171	1.173	1.172	1.171
6	1.150	1.160	1.167	1.170	1.171	1.173	1.172	1.171
7	1.150	1.160	1.167	1.170	1.171	1.173	1.172	1.171

在表 6-16 中，$\overline{K}_{\mathrm{I}}$ 为加劲板量纲为 1 的应力强度因子，并有

$$\overline{K}_{\mathrm{I}} = \frac{K_{\mathrm{I}}}{\sigma\sqrt{\pi a}} \tag{6-156}$$

由表 6-16 可以看出，取 $M^+=2$，$M^-=2$ 时，$\overline{K}_{\mathrm{I}}$ 的相对误差已小于 1%。

表 6-17　承受铆钉力加劲环孔边应力 $\bar{\sigma}_{\max}$ 的收敛情况(见图 6-23)

M^- \ M^+	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3.235	3.276	3.288	3.292	3.293	3.295	3.309	3.312
3	3.617	3.739	3.755	3.756	3.759	3.762	3.773	3.774
4	3.710	3.832	3.832	3.834	3.835	3.849	3.858	3.867
5	3.583	3.711	3.711	3.707	3.708	3.715	3.736	3.745
6	3.500	3.627	3.625	3.621	3.622	3.630	3.650	3.658
7	3.667	3.799	3.800	3.796	3.797	3.805	3.825	3.813



在表 6-17 中，$\bar{\sigma}_{max}$为加劲环量纲为 1 的孔边应力，并有

$$\bar{\sigma}_{mx} = \frac{\sigma_{max}}{\sigma} \tag{6-157}$$

由表 6-17 可以看出，取 $M^+ = 4, M^- = 4$ 时，$\bar{\sigma}_{max}$的相对误差已小于 0.1%。

为进一步确定解析变分方法的收敛性，可以考虑图 6-24 所示的加劲板，在该板的每一象限中有三个铆钉。此加劲板的尺寸比例为

$$\frac{c}{b} = 1.0, \quad \frac{r_1}{b} = 0.3, \quad \frac{r_2}{b} = 0.6, \quad \frac{r_m}{b} = 0.45$$

$$\frac{d}{b} = 0.04, \quad \frac{a}{b} = 0.5, \quad \frac{h_2}{h_1} = 1.0$$

关于这个加劲板收敛性检验的结果示于表 6-18、表 6-19 和表 6-20 中。

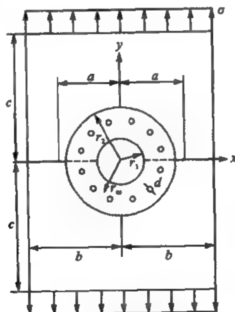


图 6-24　受均匀拉伸含无裂开裂孔的加劲板



表 6-18 承受远方拉力含无载开裂孔加劲板的铆钉力 $\bar{R}_{1y}$ 的收敛情况(见图 6-24)

M^- \ M^+	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0.274 1	0.270 0	0.268 7	0.268 1	0.268 2	0.268 1	0.267 4	0.268 2
2	0.317 0	0.311 8	0.310 9	0.310 8	0.311 2	0.310 8	0.310 2	0.311 2
3	0.308 2	0.304 0	0.303 3	0.303 0	0.303 3	0.303 0	0.302 8	0.303 3
4	0.307 1	0.303 1	0.302 5	0.302 2	0.302 5	0.302 2	0.302 0	0.3025
5	0.306 7	0.302 8	0.302 2	0.301 9	0.302 2	0.301 9	0.301 7	0.302 2
6	0.306 6	0.302 7	0.302 1	0.301 8	0.302 1	0.301 8	0.301 6	0.302 1
7	0.306 5	0.302 6	0.302 0	0.301 7	0.302 0	0.301 7	0.301 5	0.302 0

在表 6-18 中，$\bar{R}_{1y}$为量纲为 1 的铆钉力，并有

$$\bar{R}_{1y} = \frac{R_{1y}}{\sigma b h_1} \tag{6-158}$$

由表 6-18 可以看出，取 $M^+=3, M^-=3$ 时，$\bar{R}_{1y}$的相对误差已小于 1%。

表 6-19 承受远方拉力含无载开裂孔加劲板的应力强度因子 $\bar{K}_1$ 的收敛情况(见图 6-24)

M^- \ M^+	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0.883	0.886	0.885	0.885	0.884	0.884	0.884	0.884
2	0.982	0.989	0.991	0.991	0.990	0.991	0.991	0.991
3	0.973	0.981	0.983	0.983	0.982	0.983	0.983	0.983
4	0.972	0.979	0.981	0.981	0.981	0.982	0.981	0.981
5	0.971	0.978	0.980	0.980	0.980	0.981	0.980	0.980
6	0.970	0.980	0.980	0.980	0.980	0.980	0.980	0.980
7	0.970	0.979	0.980	0.980	0.979	0.980	0.980	0.980



在表 6－19 中，$\overline{K}_{\mathrm{I}}$ 仍代表量纲为 1 的应力强度因子。由表 6－19可以看出，取 $M^{+}=2,M^{-}=2$ 时，$\overline{K}_{\mathrm{I}}$ 的相对误差已接近 0.2%。

表 6－20　承受铆钉力加劲环孔边应力 $\bar{\sigma}_{\max}$ 的收敛情况(见图 6－24)

M^{-} \ M^{+}	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3.543	3.597	3.616	3.623	3.621	3.626	3.626	3.623
3	3.684	3.753	3.771	3.784	3.786	3.781	3.784	3.784
4	3.604	3.671	3.705	3.718	3.716	3.719	3.722	3.714
5	3.468	3.552	3.587	3.602	3.602	3.601	3.606	3.600
7	3.570	3.660	3.695	3.710	3.710	3.710	3.714	3.707

在表 6－20 中，$\bar{\sigma}_{\max}$为加劲环量纲为 1 的孔边应力，并有

$$\bar{\sigma}_{\max}=\frac{\sigma_{\max}}{\sigma} \tag{6-159}$$

由表 6－20 可以看出，取 $M^{+}=4,M^{-}=4$ 时，$\bar{\sigma}_{\max}$的相对误差已小于 0.1%。

6.2.7　加劲平板孔边裂纹情况的系统数值计算结果

下面给出由铆接环加劲的承受远方拉力含无载开裂孔加劲板的系统数值计算结果。该板的几何形状如图 6－24 所示，其尺寸比例为

$$\frac{c}{b}=1.0,\qquad \frac{r_1}{b}=0.3,\qquad \frac{r_2}{b}=0.6$$

$$\frac{r_m}{b}=0.45,\qquad \frac{h_2}{h_1}=1.0$$



系统计算曲线如图 6 - 25 至图 6 - 30 所示。

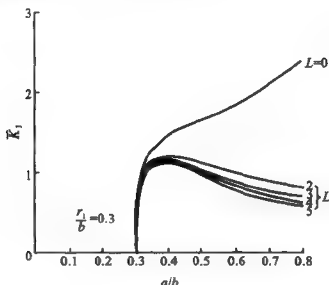


图 6 - 25 加劲板的 $\bar{K}_{\text{I}}$ 与 a/b 的关系曲线

对于上述加劲平板孔边裂纹问题，由解析变分解法的理论分析与采用该方法所进行的数值计算，可以得出如下结论：

① 由于所有基本方程预先得到满足，故在变分方程中仅存在线积分，而没有面积分。

② 预先满足绕被加劲板开裂孔和加劲环未开裂孔位移单值条件，以保证含内部裂纹板中复连通域位移的单值性。

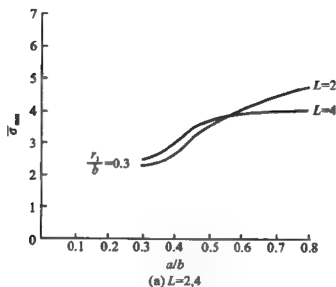
③ 预先还满足绕铆钉孔的合力边界条件和位移单值条件。

④ 利用罗彼塔法则可以证明，各向异性板的应力和位移表达式可以用于各向同性板的情况。

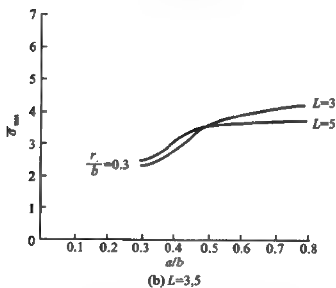
⑤ 数值计算实例表明，本方法在求解加劲板应力强度因子、加劲环应力集中系数以及它们之间的铆钉力方面所得计算结果收敛迅速。

⑥ 相对于其他计算力学方法，本方法易于获得便于在工程上应用的系统计算结果。





(a) $L=2,4$

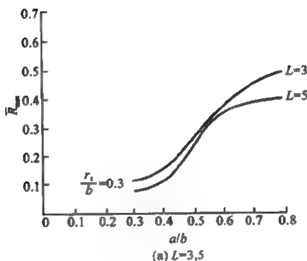


(b) $L=3,5$

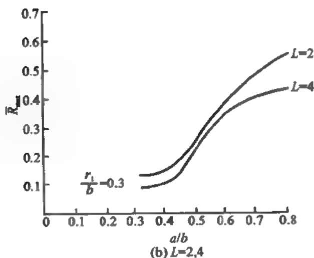
图 6-26 加劲环的 $\bar{\sigma}_{max}$ 与 a/b 的关系曲线

($L=0,2,3,4,5,d/b=0.02$)





(a) $L=3,5$



(b) $L=2,4$

图 6-27　最大铆钉力 $\bar{R}_{max}$ 与 a/b 的关系曲线



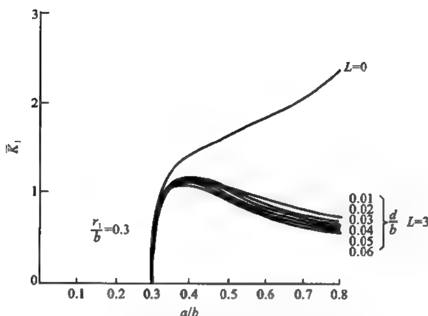


图 6-28 加劲板的 $\bar{K}_1$ 与 a/b 的关系曲线

($L=3, d/b=0.01, 0.02, \cdots, 0.06$)

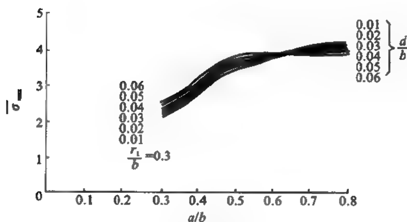


图 6-29 加劲环的 $\bar{\sigma}_{max}$ 与 a/b 的关系曲线

($L=3, d/b=0.01, 0.02, \cdots, 0.06$)



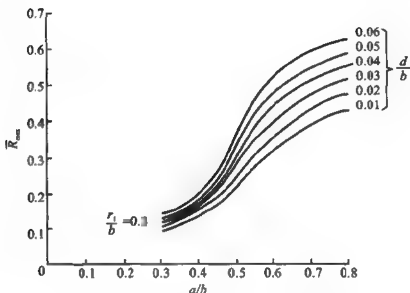


图 6-30　加劲环的 $\bar{R}_{max}$ 与 a/b 的关系曲线

($L=3, d/b=0.01, 0.02, \cdots, 0.06$)

⑦ 对于短裂纹情况,量纲为 1 的应力强度因子是量纲为 1 的裂纹长度的增函数;而对于长裂纹情况,量纲为 1 的应力强度因子是量纲为 1 的裂纹长度的减函数。其原因是,尽管随着裂纹长度的增加将引起应力强度因子的增加,但是由于增加的裂纹长度所引起的被加劲板的刚度降低却又会引起应力强度因子的下降。

参考文献

[6.1]　中国航空研究院主编. 应力强度因子手册. 增订版. 北京:科学出版社,1993.

[6.2]　SIH G C. Handbook of Stress Intensity Factors. Institute of Fracture Mechanics. Bethlehem Pennsylvania: Lehigh University, 1973: 1.5.3-1-1.5.3-2.

[6.3]　MUSKHELISHVILI N I. Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity. Groningen:Noordhoff, 1953. 88-112.

[6.4]　LEKHNITSKII S G. Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic



Body. San Franscisco: Holden Day, 1963. 28-39.

[6.5] LIEBOWITZ H. Fracture. Vol. Ⅱ. New York: Academic Press, 1968. 108-120.

[6.6] WASHIZU K. Variational Method in Elasticity and Plasticity. 2nd ed. Oxford: Pergamon Press, 1975:27-39.

[6.7] 傅东山,张行. 含孔边裂纹无限大单快板的解析变分解法. 航空学报,1992,13.

[6.8] FU D S, ZHANG X. Analytical — Variational Method of Solution for Stress Intensity Factors about Anisotropic and Isotropic Finite Plates with Double Cracks Emanating from Holes. Engineering Fracture Mechanics, 1995, 50(3): 311-324.

[6.9] 傅东山,张行,肖仁仕,等. 含孔边Ⅰ型裂纹各向异性板解析变分解法及其在铆接加劲结构中之应用. 中国航空科技文献,1991.

[6.10] 傅东山,张行,肖仁仕,等. 含孔边Ⅱ型裂纹各向异性板解析变分解法及其在铆接加劲结构中之应用. 中国航空科技文献,1991.

[6.11] 傅东山,张行,肖仁仕,等. 含孔边裂纹铆接加劲平板的解析变分解法. 固体力学学报,1991,12(专刊).

[6.12] FU D S, ZHANG X. Analytical-Variational Method of Analysis about a Finite Plate With a Cracked Hole Stiffened by a Ring with Rivet Joints. Engineering Fracture Mechanics, 1995, 50(3): 325-344.

第7章　三维应力强度因子能量差率闭合解法——张开型裂纹

应力强度因子是断裂力学的重要参量。对穿透厚度裂纹问题，即二维问题，已有许多成熟方法与可靠结果。而对工程上很常见的部分穿透厚度裂纹问题，即三维问题，由于问题的复杂性，结果要少得多，远不能满足工程需要。只有对于含三维裂纹的无限大体才能获得精确解。对于有限大体，现有的近似解法主要有交替法、有限元法、边界元法和有限元-交替法。以上方法在断裂力学发展中均起过重要作用，但这些方法在不同程度上都是比较耗费人工与机时的，因此，对于含三维裂纹的有限大体，目前只有少量应力强度因子数值解。在本章及第 8 章中将介绍一种半解析-半工程的能量差率解法，导出含非穿透裂纹有限大体应力强度因子与能量差率的封闭解。这一方法可充分利用已有二维应力强度因子的大量可靠结果，可大量节省机时与人力。利用该方法可以提供损伤容限设计需要的大量三维应力强度因子，既可避免过于粗糙的、迫不得已的简化计算，提高设计与分析质量，又可避免过于复杂的有限元数值计算，提高设计与分析效率，降低设计与分析成本。

假定在物体内含有一个椭圆形裂纹（见图 7 - 1(a)），在远离裂纹处物体受到拉应力 σ 的作用（见图 7 - 1(b)）。将这一问题看成以下两种情况的叠加：其一是在远离裂纹处受到应力 σ 的作用，而在裂纹表面上作用着约束力的情况，该约束力与无裂纹时该处的应力相同（见图 7 - 1(c)）；其二是仅在裂纹表面上作用着松弛力的情况，该松弛力与上述约束力大小相等、方向相反（见图 7 - 1(d)）。

(a) 含张开型椭圆裂纹有限大体的横截面

(b) 含张开型裂纹体的受力状态

(c) 无裂纹体被视为含裂纹体时的等效受力状态

(d) 反映含裂纹体与无裂纹体差别的附加受力状态

图 7－1　含张开型椭圆裂纹有限大体分析方法的叠加原理示意图

显然，图 7－1(c)情况相当于无裂纹体受应力 σ 的作用，图 7－1(b)情况与图 7－1(d)情况的应力强度因子相同。据此，问题转化为求当裂纹表面受力时的应力强度因子。

为简单起见，这里假定裂纹是椭圆形的；对于非椭圆形裂纹，可用完全类似的办法求解。



7.1 含全椭圆裂纹无限大体应力强度因子能量差率闭合解法

7.1.1 裂纹张开位移与三维应力强度因子

对于在椭圆裂纹表面承受均布压力的无限大体，假定裂纹表面张开位移 ν 具有椭球形分布规律，即

$$\nu(x,z)=\nu_0\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}} \tag{7-1}$$

式中，ν_0 为裂纹表面中心处的最大位移。令裂纹前沿任意点 $P(x_1,z_1)$ 的法线 n 方向与 z 轴夹角为 ψ，椭圆参数方程为

$$x_1=a\sin\varphi,\qquad z_1=c\cos\varphi \tag{7-2}$$

φ 是椭圆裂纹的参数角，则

$$\sin\psi=\frac{c\sin\varphi}{\sqrt{c^2\sin^2\varphi+a^2\cos^2\varphi}},\qquad \cos\psi=\frac{a\cos\varphi}{\sqrt{c^2\sin^2\varphi+a^2\cos^2\varphi}} \tag{7-3}$$

如图 7-2 所示，在裂纹前沿内法线方向上，距裂纹前沿 $P(x_1,z_1)$ 点为 r 的一点坐标为

$$\left.\begin{aligned}x&=x_1-r\sin\psi\\ z&=z_1-r\cos\psi\end{aligned}\right\} \tag{7-4}$$

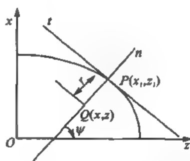


图 7-2　椭圆裂纹前沿法线的几何表示

将上式代入式(7-1)，并考虑到 r/a，r/c 为小量，略去高阶小量后，可得裂纹前沿邻域裂



纹张开位移如下：

$$\nu = \sqrt{2}\nu_0\sqrt{\frac{x_1}{a^2}r\sin\psi + \frac{z_1}{c^2}r\cos\psi} \tag{7-5}$$

将式(7-2)与式(7-3)代入上式，可得

$$\nu^2 = \nu_0^2\frac{2r}{ac}\sqrt{a^2\cos^2\varphi + c^2\sin^2\varphi} \tag{7-6}$$

距裂纹前沿 $P(x_1, z_1)$ 点的法线方向上截取一个无限薄片，该薄片含穿透裂纹，假定该薄片处于平面应变状态。于是由式(7-6)与式(2-46)，并以 $E/(1-\nu^2)$ 代替 E，则该薄片裂纹张开位移与Ⅰ型应力强度因子具有如下关系：

$$K_{\mathrm{I}}^2 = \frac{\pi}{4}\left(\frac{E}{1-\nu^2}\right)^2\frac{\nu_0^2}{ac}\sqrt{a^2\cos^2\varphi + c^2\sin^2\varphi} \tag{7-7}$$

总位能差率为

$$G = \frac{\pi}{4}\left(\frac{E}{1-\nu^2}\right)\frac{\nu_0^2}{ac}\sqrt{a^2\cos^2\varphi + c^2\sin^2\varphi} \tag{7-8}$$

因此，只要确定了 ν_0，即可得到 K_{I} 与 G。

7.1.2 广义裂纹张开位移的基本微分方程式

为确定 ν_0，假定在裂纹扩展过程中，裂纹前沿的半短轴与半长轴的扩展是按比例的，如图 7-3 所示。

$$\mathrm{d}a = a\mathrm{d}g, \qquad \mathrm{d}c = c\mathrm{d}g \tag{7-9}$$

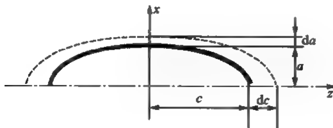


图 7-3 椭圆裂纹的虚扩展



根据投影原理,在这种情况下法向切片的裂纹扩展量为

$$dr = (da)\sin\varphi\sin\psi + (dc)\cos\varphi\cos\psi \tag{7-10}$$

裂纹前沿 $P(x_1, z_1)$点与 $P(x_1+dx_1, z_1+dz_1)$点间的弧长为

$$ds = \sqrt{c^2\sin^2\varphi + a^2\cos^2\varphi} \tag{7-11}$$

总位能差率等于各无限薄法向切片总位能差率的积分

$$d\Pi = -\int_S G dr ds = -\pi \frac{E}{1-\nu^2} c\Phi\nu_0^2 dg \tag{7-12}$$

这里,Φ 为第二类完全椭圆积分。

$$\Phi = \int_0^{\pi/2}\sqrt{\sin^2\varphi + \frac{a^2}{c^2}\cos^2\varphi}\,d\varphi \tag{7-13}$$

另一方面,对于线弹性体,总势能还可表示为

$$\Pi = -\int_A \sigma\nu dA = -\sigma_0\int_A t(x,z)\nu(x,z)dA = -\frac{2}{3}\pi\sigma_0 ac\nu_0 \tag{7-14}$$

将上式对 g 微分并与式(7-12)比较,可得到一个关于 ν_0 的微分方程

$$\frac{\partial\nu_0}{\partial g} + 2\nu_0 = \frac{3}{2}\frac{E}{1-\nu^2}\frac{\Phi}{\sigma a}\nu_0^2 \tag{7-15}$$

7.1.3　基本方程的封闭解法

式(7-15)为伯努利方程,则可得到 ν_0 的解答

$$\nu_0 = 2\frac{\sigma}{\Phi}\frac{1-\nu^2}{E}a \tag{7-16}$$

由式(7-16)与式(7-7),即可确定 K_{I} 如下:

$$K_{\mathrm{I}} = \frac{\sigma}{\Phi}\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{a}{c}}\sqrt[4]{a^2\cos^2\varphi + c^2\sin^2\varphi} \tag{7-17}$$

7.2 含对称裂纹三维有限大体应力强度因子能量差率闭合解法

7.2.1 裂纹张开位移与三维应力强度因子

对于三维裂纹的有限大板(见图 7-4),将裂纹表面张开位移写为如下形式:

$$\nu(x,z) = \nu_0 h(x,z) \tag{7-18}$$

式中,ν_0 为原点处裂纹张开位移,$h(x,z)$为裂纹张开位移模态函数,详见 7.2.4 节。因此,有

$$\nu^2(x,z) = \nu_0^2 H(x,z), \qquad H(x,z) = h^2(x,z) \tag{7-19}$$

式中,$H(x,z)$在裂纹前沿二次可导。

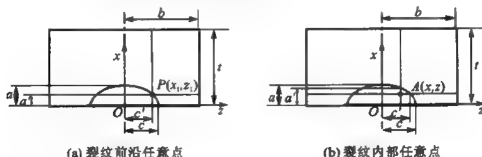


图 7-4 三维有限大体含对称非穿透裂纹的截面

在裂纹前沿 $P(x_1,z_1)$点,将 $\nu^2(x,z)$展开为泰勒级数,略去高次项,可得裂纹前沿附近点 Q 张开位移表达式:

$$\nu^2(x,z) = \nu_0^2\left[\frac{\partial H}{\partial x}\bigg|_P (x-x_1) + \frac{\partial H}{\partial z}\bigg|_P (z-z_1)\right] = \nu^2(x,z_1) + \nu^2(x_1,z) \tag{7-20}$$

式中,$\nu(x,z_1)$,$\nu(x_1,z)$分别为过点 $P(x_1,z_1)$横向及纵向截面的



裂纹张开位移。上式可称为裂纹张开位移的勾股定理。在裂纹前沿附近，有

$$H(x,z) = H(z_1,x) + H(x_1,z) = h_1^2(z_1,x) + h_2^2(x_1,z) \tag{7-21}$$

而在裂纹内部，则令

$$h(x,z) = [h_1(z,x) + h_2(x,z)]/2 \tag{7-22}$$

引入任意法向切片，如图7.2所示。在裂纹前沿点 $P(x_1,z_1)$ 邻域的表面位移可由相应的应力强度因子表示为

$$\nu^2(x,z) = \frac{8}{\pi}\frac{K_{\mathrm{I}}^2}{E_n^2}r \tag{7-23}$$

式中，E_n 为法向切片的广义杨氏弹性模量，可写为

$$E_n = E + (E_1 - E)f(\psi), \qquad E_1 = E/(1-\nu^2), \qquad f(\psi) \in [0,1] \tag{7-24}$$

$$f(\psi) = \begin{cases} 1 & \text{深埋裂纹} \\ \sin\psi & \text{表面裂纹} \\ \sin 2\psi & \text{角裂纹} \end{cases} \tag{7-25}$$

这里，φ 是椭圆裂纹的参数角。

由式(7-23)与式(7-19)及式(7-20)，可得

$$K_{\mathrm{I}}^2 = \frac{\pi}{8}E_n^2\nu_0^2\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}[H(x,z_1) + H(x_1,z)] \tag{7-26}$$

因此，只要确定了 ν_0 与 $H(x,z)$，即可得到 K_{I}。

7.2.2 裂纹张开位移的基本微分方程式

根据叠加原理，可以将板的远端载荷转化为裂纹表面载荷 $\sigma(x,z) = \sigma_0 t(x,z)$，并将总势能表示为

$$\Pi = \int_A \sigma\nu \mathrm{d}A = -\sigma_0\int_A t(x,z)\nu(x,z)\mathrm{d}A - \sigma_0\pi ac\nu_0 B \tag{7-27}$$

式中，A 为裂纹面积；σ 为裂纹表面的载荷；$t(x,z)$ 为其分布函数；

σ_0 为载荷幅值，即广义力。同时，有

$$B = \frac{1}{2\pi ac}\int t(x,z)[h_1(x,z)+h_2(x,z)]\mathrm{d}A \qquad (7-28)$$

为确定 ν_0，令虚裂纹扩展形式为按比例扩展，$\mathrm{d}a = a\mathrm{d}g$，$\mathrm{d}c = c\mathrm{d}g$，如图 7－3 所示。

这种虚裂纹扩展形式下的总位能差率一方面等于各无限薄法向切片总位能差率的积分，而另一方面等于外力势能的变化率。由此，可得到一个关于 ν_0 的微分方程

$$\frac{\partial \nu_0}{\partial g} + \left[2 + \frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial g}\right]\nu_0 = \frac{E_1}{8\sigma_0 B}\left[\frac{I}{a} + \frac{J}{c}\right]\nu_0^2 \qquad (7-29)$$

式中

$$I = a\int \frac{E_n}{E_1}\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}H(x,z_1)\mathrm{d}\varphi, \qquad J = c\int \frac{E_n}{E_1}\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}H(x_1,z)\mathrm{d}\varphi \qquad (7-30)$$

这样，得到了关于 ν_0 的伯努利方程。ν_0 的解答为

$$\frac{1}{\nu_0} = e^{2g}B\left[-\frac{E_1}{8\sigma_0}\int_0^g \frac{1}{B^2}\left(\frac{I}{a} + \frac{J}{c}\right)\mathrm{e}^{-2g^*}\,\mathrm{d}g^* + \left(\frac{1}{\nu_0 B}\right)\Big|_{g=0}\right] \qquad (7-31)$$

7.2.3 基本方程的封闭解法

以下探讨进一步简化 ν_0 的封闭解答。令 a/t 与 c/b 不变，考虑两种极端情况：

(1) $a/c \to 0$

$$\left(\frac{1}{\nu_0 B}\right)\Big|_{a/c\to 0} = \mathrm{e}^{2g}\left[-\frac{E_1}{8\sigma_0 a}\int_0^g \left(\frac{I}{B^2}\right)\Big|_{a/c\to 0}\mathrm{e}^{-2g^*}\,\mathrm{d}g^* + \left(\frac{1}{\nu_0 B}\right)\Big|_{g=0,a/c\to 0}\right] \qquad (7-32)$$

裂纹可看作沿宽度方向穿透的二维裂纹。令

$$L_1 = \frac{1}{\nu_0}\frac{\mathrm{d}\nu_0}{\mathrm{d}g}\Big|_{a/c\to 0} \qquad (7-33)$$



则

$$\nu_0\big|_{a/c\to 0}=\frac{8\sigma_0 a}{E_1 I_{a/c\to 0}}\left[(2+L_1)B+\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}g}\right] \qquad (7-34)$$

(2) $c/a\to 0$

$$\left(\frac{1}{\nu_0 B}\right)\bigg|_{c/a\to 0}=\mathrm{e}^{2g}\left[-\frac{E_1}{8\sigma_0 c}\int_0^g\left(\frac{J}{B^2}\right)\bigg|_{c/a\to 0}\mathrm{e}^{-2g^*}\,\mathrm{d}g^*+\left(\frac{1}{\nu_0 B}\right)\bigg|_{g=0,c/a\to 0}\right] \qquad (7-35)$$

裂纹可看作沿厚度方向穿透的二维裂纹。令

$$L_2=\frac{1}{\nu_0}\frac{\mathrm{d}\nu_0}{\mathrm{d}g}\bigg|_{c/a\to 0} \qquad (7-36)$$

则

$$\nu_0\big|_{c/a\to 0}=\frac{8\sigma_0 c}{E_1 J_{c/a\to 0}}\left[(2+L_2)B+\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}g}\right] \qquad (7-37)$$

然后对任意 a/c 值,进行分离变量如下:

$$\frac{I}{B^2}=m\left(\frac{a}{c},\frac{t}{b}\right)\left(\frac{I}{B^2}\right)\bigg|_{a/c\to 0},\qquad \frac{J}{B^2}=n\left(\frac{c}{a},\frac{b}{t}\right)\left(\frac{J}{B^2}\right)\bigg|_{c/a\to 0} \qquad (7-38)$$

即可确定 $m(a/c,t/b)$ 与 $n(c/a,b/t)$。

将式(7-38)代入式(7-31),与式(7-32)及式(7-35)比较,并考虑到 ν_0 为状态函数,与 g 无关,有

$$\frac{1}{\nu_0 B}=\frac{m\left(\frac{a}{c},\frac{t}{b}\right)}{(\nu_0 B)\big|_{a/c\to 0}}+\frac{n\left(\frac{c}{a},\frac{b}{t}\right)}{(\nu_0 B)\big|_{c/a\to 0}} \qquad (7-39)$$

将式(7-38)代入式(7-39),与式(7-34)及式(7-37)比较,有

$$\frac{1}{\nu_0}=\frac{E_1}{8\sigma_0}\frac{I}{a\left[(2+L_1)B+\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}g}\right]}+\frac{E_1}{8\sigma_0}\frac{J}{c\left[(2+L_2)B+\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}g}\right]} \qquad (7-40)$$

上式计算较简单。但若要求更高精度,也可以对任意 a/c 值按下式进行分离变量,即



$$\frac{I+\frac{a}{c}J}{B^2}=m\left(\frac{a}{c},\frac{t}{b}\right)\left(\frac{I}{B^2}\right)\Bigg|_{a/c\to 0}+n\left(\frac{c}{a},\frac{b}{t}\right)\frac{a}{c}\left(\frac{J}{B^2}\right)\Bigg|_{c/a\to 0} \tag{7-41}$$

式中，$m\left(\frac{a}{c},\frac{t}{b}\right)$与$n\left(\frac{c}{a},\frac{b}{t}\right)$可由最小二乘方法确定。分别求出$\nu_0|_{a/c\to 0}$与$\nu_0|_{c/a\to 0}$，代入式(7-39)即可求出$\nu_0$，再由式(7-26)确定$K_{\mathrm{I}}$。

7.2.4 裂纹张开位移模态

1. 二维内部裂纹的张开位移

为了构造三维裂纹张开位移模态，首先考虑二维裂纹张开位移(见图7-5)。根据式(1-52)与式(1-71)，有

$$\sigma_{yy}-\mathrm{i}\sigma_{xy}=\varphi'(z)+\overline{\Omega'(z)}+(z-\bar{z})\overline{\varphi''(z)} \tag{7-42}$$

$$2\mu(u_x+\mathrm{i}u_y)=\kappa\varphi(z)-\overline{\Omega(z)}\quad(z-\bar{z})\overline{\varphi'(z)} \tag{7-43}$$

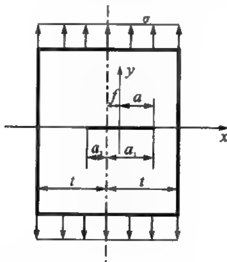


图7-5 含二维张开型内部裂纹板

对于图7-5所示含内部裂纹板，在裂纹上、下表面为自由表面，



可得

$$\left.\begin{aligned}\varphi'(z) &= (z^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}\sum_{m=0}^{M}F_m z^m + \sum_{n=0}^{N}G_n Z^n \\ \Omega'(z) &= (z^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}\sum_{m=0}^{M}F_m z^m - \sum_{n=0}^{N}\overline{G}_n z^n\end{aligned}\right\} \quad (7-44)$$

令

$$\beta_m = \int (z^2-a^2)^{-\frac{1}{2}} z^m \mathrm{d}z \quad (7-45)$$

可得

$$\left.\begin{aligned}&\beta_0 = \ln(z+\sqrt{z^2-a^2}), \qquad \beta_1 = \sqrt{z^2-a^2} \\ &\beta_n = \frac{z^{n-1}}{n}\sqrt{z^2-a^2} + \frac{n-1}{n}a^2\beta_{n-2}\end{aligned}\right\} \quad (7-46)$$

因此，β_n 可写为如下形式：

$$\beta_{2i-1} = \sum_{j=1}^{i} b_{2j-1,2i-1}(z^2-a^2)^{\frac{2j-1}{2}} \quad (7-47)$$

$$\beta_{2i} = \sum_{j=1}^{i} b_{2j,2i} z (z^2-a^2)^{\frac{2j-1}{2}} + b_{0,2i}\ln(z+\sqrt{z^2-a^2}) \quad (7-48)$$

在以上二式中，$b_{2j-1,2i-1}$，$b_{2j,2i}$ 与 $b_{0,2i}$ 均为已知常数。

由式(7-44)求出 $\varphi(z)$ 与 $\Omega(z)$ 如下：

$$\left.\begin{aligned}\varphi(z) &= \sum_{m=0}^{M}F_m\beta_m(z) + \sum_{n=0}^{N}G_n\frac{z^{n+1}}{n+1} \\ \Omega(z) &= \sum_{m=0}^{M}\overline{F}_m\beta_m(z) - \sum_{n=0}^{N}\overline{G}_n\frac{z^{n+1}}{n+1}\end{aligned}\right\} \quad (7-49)$$

式中

$$\sum_{m=0}^{M}F_m\beta_m(z) = f_0\ln(z+\sqrt{z^2-a^2}) + \sum_{i=1}^{[M/2]} f_{2i-1}(z^2-a^2)^{\frac{2i-1}{2}} + \sum_{i=1}^{[M/2]} f_{2i} z (z^2-a^2)^{\frac{2i-1}{2}} \quad (7-50)$$

且



$$\left.\begin{aligned} f_0 &= \sum_{j=0}^{[M/2]} F_{2j} b_{0,2j}, \qquad f_{2i} = \sum_{j=0}^{[M/2]} F_{2j} b_{2i,2j} \\ f_{2i-1} &= \sum_{j=1}^{[M/2]} F_{2j-1} b_{2i-1,2j-1} \end{aligned}\right\} \tag{7-51}$$

当 M 为偶数时，$[M/2]=M/2$；当 M 为奇数，且位于奇数项的和中时，$[M/2]=(M+1)/2$；当 M 为奇数，且位于偶数项的和中时，$[M/2]=(M-1)/2$。将式(7-49)及式(7-50)代入式(7-43)，可得

$$\begin{aligned} 2\mu(u_r+\mathrm{i}u_y) = {} & f_0[\kappa\ln(z+\sqrt{z^2-a^2})-\ln(\bar{z}+\sqrt{\bar{z}^2-a^2})]+ \\ & \sum_{i=1}^{[M/2]} f_{2i-1}[\kappa(z^2-a^2)^{\frac{2i-1}{2}}-(\bar{z}^2-a^2)^{\frac{2i-1}{2}}]+ \\ & \sum_{i=1}^{[M/2]} f_{2i}[\kappa z(z^2-a^2)^{\frac{2i-1}{2}}-\bar{z}(\bar{z}^2-a^2)^{\frac{2i-1}{2}}]- \\ & (z-\bar{z})\Big[\sum_{m=1}^{M}\bar{F}_m(\bar{z}^2-a^2)^{\frac{1}{2}}\bar{z}^m+\sum_{n=1}^{N}\bar{G}_n\bar{z}^n\Big]+ \\ & \sum_{n=1}^{N}\bar{G}_n\left(\kappa\frac{z^{n+1}}{n+1}-\frac{\bar{z}^{n+1}}{n+1}\right) \end{aligned} \tag{7-52}$$

上式的第一项具有多值性，由位移单值条件可知 $f_0=0$。又基于位移关于 x 轴对称，因此，不存在 G_n 项。因此，裂纹张开位移可写为如下形式：

$$\begin{aligned} (u_x+\mathrm{i}u_y)\big|_{\text{crack surface}} = {} & \frac{\kappa+1}{2\mu}\Big[\sum_{i=1}^{[M/2]} f_{2i-1}a^{2i-1}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{2i-1}{2}}+ \\ & \sum_{i=1}^{[M/2]} f_{2i}a^{2i}\frac{x}{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{2i-1}{2}}\Big] \end{aligned} \tag{7-53}$$

式中，第一部分与第二部分分别为相对于 y 轴的对称与反对称项。

根据叠加原理将远方载荷转化到裂纹表面，上式中的 u_y（今后以 u 表示）仍可用于描述裂纹张开位移。对于无限大板受均匀拉力，已知

$$\nu = \frac{\kappa+1}{2\mu}\sigma\frac{a}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = \frac{\sigma}{E}a\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \tag{7-54}$$



而对于有限宽、无限长板，则需要取更多项，本文选取 3 项。因此，裂纹张开位移可写为

$$\nu=\frac{\sigma_0}{E}a\left[2f\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right)\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}+2g\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right)\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right]+\frac{\sigma_0}{E}a\,2h\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right)\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{x}{a} \tag{7-55}$$

式中，第一部分与第二部分分别为相对于 y 轴的对称与反对称项；f,g,h 为未知函数。

由式(7－55)，原点处的裂纹张开线位移 ν_{01} 为

$$\nu_{01}=\frac{\sigma_0}{E}a\left[2f\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right)+2g\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right)\right]=\frac{\sigma_0}{E}aF\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right) \tag{7-56}$$

式中

$$F\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right)=2f\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right)+2g\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right) \tag{7-57}$$

又，原点处的角位移为 ν_{02}/a，则

$$\nu_{02}=\left.\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)}\right|_{\frac{x}{a}=0}=\frac{\sigma_0}{E}a\,2h\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right) \tag{7-58}$$

令

$$\alpha\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right)=f\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right)\Big/F\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right) \tag{7-59}$$

将式(7－56)至式(7－59)代入式(7－55)，可得

$$\nu=\nu_{01}\left\{2\alpha\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right)\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}+\left[1-2\alpha\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right)\right]\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}+\nu_{02}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{x}{a} \tag{7-60}$$

由上式可以看出，裂纹张开位移是由 ν_{01}，ν_{02} 与 $\alpha(a_1/t,a_2/t)$ 决定的，而 ν_{01}，ν_{02} 与 $\alpha(a_1/t,a_2/t)$ 又是由 $f(a_1/t,a_2/t)$，$F(a_1/t,a_2/t)$ 与 $h(a_1/t,a_2/t)$ 决定的。

在裂纹右尖端附近，$x_R/a=1-r/a$；在裂纹左尖端附近，$x_L/a=-(1-r/a)$。由式(7－55)可得

$$\left.\begin{aligned}\nu_R &= \frac{\sigma_0}{E}a2\sqrt{2r}\left[f\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right)+h\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right)\right]\\ \nu_L &= \frac{\sigma_0}{E}a2\sqrt{2r}\left[f\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right)-h\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right)\right]\end{aligned}\right\} \tag{7-61}$$

另一方面，在裂纹尖端附近

$$\nu(r)=\sqrt{\frac{8}{\pi}}\frac{K_I}{E}\sqrt{r} \tag{7-62}$$

设裂纹右、左两端已知应力强度因子可分别表示为

$$K_{IR}=\eta_R\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right)\sigma_0\sqrt{\pi a},\qquad K_{IL}=\eta_L\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right)\sigma_0\sqrt{\pi a} \tag{7-63}$$

式中，$\eta_R(a_1/t,a_2/t)$与$\eta_L(a_1/t,a_2/t)$为关于a_1/t与a_2/t的已知函数。

将式(7-63)代入式(7-62)，并与式(7-61)比较，可得

$$f\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right)=\left[\eta_R\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right)+\eta_L\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right)\right]\Big/2 \tag{7-64}$$

$$h\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right)=\left[\eta_R\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right)-\eta_L\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right)\right]\Big/2 \tag{7-65}$$

因此

$$a\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right)=\left[\eta_R\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right)+\eta_L\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right)\right]\Big/2F\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right) \tag{7-66}$$

$$\nu_{01}=\frac{\sigma_0}{E}aF\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right) \tag{7-67}$$

$$\nu_{02}=\nu_{01}\left[\eta_R\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right)-\eta_L\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right)\right]\Big/F\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right) \tag{7-68}$$

$$\xi=\frac{\nu_{02}}{\nu_{01}}=\left[\eta_R\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right)-\eta_L\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right)\right]\Big/F\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right) \tag{7-69}$$

下面，可用能量差率方法确定$F(a_1/t,a_2/t)$。假设裂纹虚扩展形式为按比例扩展，有

$$da=da_1=da_2 \tag{7-70}$$



则总能量差率为

$$\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}a}=-\left(\frac{K_{\mathrm{IR}}^2}{E}+\frac{K_{\mathrm{IL}}^2}{E}\right)=-\frac{\pi\sigma_0^2 a}{E}\left[\eta_L^2\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right)+\eta_R^2\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right)\right] \tag{7-71}$$

因此

$$\Pi=-\frac{\pi\sigma_0^2 a^2}{E\left(\frac{a}{t}\right)^2}\left\{\int_0^{\frac{a}{t}}\frac{a}{t}\left[\eta_L^2\left(\frac{a_1^*}{t},\frac{a_2^*}{t}\right)+\eta_R^2\left(\frac{a_1^*}{t},\frac{a_2^*}{t}\right)\right]\mathrm{d}\frac{a^*}{t}+\Delta\right\} \tag{7-72}$$

又因为总位能 Π 也可写为

$$\Pi=-\sigma_0\int_{-a}^{a}\nu(x)t(x)\mathrm{d}x \tag{7-73}$$

将式 (7－55) 代入上式，并考虑到式(7－57)，可得

$$\Pi=-\frac{2\sigma_0^2 a^2}{E}\left\{\left[2f\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right)(m_1-m_3)+F\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right)m_3\right]+2h\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right)n_1\right\} \tag{7-74}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}
m_1&=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}t(x)\mathrm{d}\frac{x}{a}\\
m_3&=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}t(x)\mathrm{d}\frac{x}{a}\\
n_1&=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{x}{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}t(x)\mathrm{d}\frac{x}{a}
\end{aligned}\right\} \tag{7-75}$$

比较式(7－72)与式(7－74)，可得

$$F\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right)=\frac{\pi}{2m_3\left(\frac{a}{t}\right)^2}\left\{\int_0^{\frac{a}{t}}\frac{a^*}{t}\left[\eta_L^2\left(\frac{a_1^*}{t},\frac{a_2^*}{t}\right)+\eta_R^2\left(\frac{a_1^*}{t},\frac{a_2^*}{t}\right)\right]\mathrm{d}\frac{a^*}{t}+\Delta\right\}-\left(\frac{m_1}{m_3}-1\right)2f\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right)-\frac{n_1}{m_3}2h\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right) \tag{7-76}$$

考虑到

$$\lim_{\frac{a}{t}\to 0}\left(\frac{a}{t}\right)^2 F\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right)=0 \tag{7-77}$$

$$\lim_{\frac{a}{t}\to 0}\int_0^{\frac{a}{t}}\frac{a^*}{t}\left[\eta_L^2\left(\frac{a_1^*}{t},\frac{a_2^*}{t}\right)+\eta_R^2\left(\frac{a_1^*}{t},\frac{a_2^*}{t}\right)\right]\mathrm{d}\,\frac{a^*}{t}=0 \tag{7-78}$$

$$\lim_{\frac{a}{t}\to 0}\left(\frac{a}{t}\right)^2\left[\eta_R\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right)\pm\eta_L\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right)\right]=0 \tag{7-79}$$

由式(7－76)，可得

$$\Delta=0 \tag{7-80}$$

因此，令 $\omega=a^*/a$，可将式(7－76)改写为

$$F\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right)=\frac{\pi}{2m_3}\int_0^1\omega\left[\eta_L^2\left(\frac{a}{t}\omega+\frac{f}{t},\frac{a}{t}\omega-\frac{f}{t}\right)+\right.$$
$$\left.\eta_R^2\left(\frac{a}{t}\omega+\frac{f}{t},\frac{a}{t}\omega-\frac{f}{t}\right)\right]\mathrm{d}\omega-$$
$$\left(\frac{m_1}{m_3}-1\right)2f\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right)-\frac{n_1}{m_3}2h\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right) \tag{7-81}$$

总之，裂纹张开位移可写为如下形式：

$$\nu=\nu_{01}\left\{n\alpha\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right)\left[\beta\left(\frac{x}{a}\right)\right]^{\frac{1}{2}}+\right.$$
$$\left.\left[1-n\alpha\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right)\right]\left[\beta\left(\frac{x}{a}\right)\right]^{\frac{3}{2}}\right\}+$$
$$\nu_{02}\left[\beta\left(\frac{x}{a}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\frac{x}{a} \tag{7-82}$$

式中

$$n=2 \tag{7-83}$$

$$\beta\left(\frac{x}{a}\right)=1-\left(\frac{x}{a}\right)^2 \tag{7-84}$$

对于含对称裂纹矩形板受均匀应力作用的情况，裂纹张开位移没有非对称项，即 $\nu_{02}=0$，且 $a_1=a_2=a$，则



$$\nu=\nu_0 h\left(\frac{a}{t},\frac{x}{a}\right)=\nu_0\left\{2\alpha\left(\frac{a}{t}\right)\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}+\left[1-2\alpha\left(\frac{a}{t}\right)\right]\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right\} \tag{7-85}$$

$$\eta\left(\frac{a}{t}\right)=\sqrt{\sec\left(\frac{\pi}{2}\frac{a}{t}\right)} \tag{7-86}$$

$$F\left(\frac{a}{t}\right)=\frac{16}{3}\left[\frac{2t}{\pi a}\right]^2\left[-\ln\left(\cos\frac{\pi a}{2t}\right)\right]-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2t}{\pi a}\tan\left(\frac{\pi a}{2t}\right)} \tag{7-87}$$

且

$$\nu_0=\frac{\sigma_0}{E}aF\left(\frac{a}{t}\right),\qquad \mathrm{d}\nu_0=L\frac{\nu_0}{a}\mathrm{d}a \tag{7-88}$$

$$L=1+\left[\frac{F'\left(\frac{a}{t}\right)}{F\left(\frac{a}{t}\right)}\right]\frac{a}{t} \tag{7-89}$$

2. 二维边缘裂纹的张开位移

对于如图 7－6 所示含边缘裂纹板，与含内部裂纹板类似，可令

$$\nu=\sqrt{8}\,\frac{\sigma_0}{E}a\left[f\left(\frac{a}{t}\right)\left(1-\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}}+g\left(\frac{a}{t}\right)\left(1-\frac{x}{a}\right)^{\frac{3}{2}}\right] \tag{7-90}$$

裂纹嘴张开位移 ν_0 为

$$\nu_0=\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{\sigma_0}{E}aF\left(\frac{a}{t}\right) \tag{7-91}$$

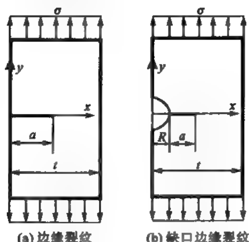
式中

$$F\left(\frac{a}{t}\right)=4f\left(\frac{a}{t}\right)+4g\left(\frac{a}{t}\right) \tag{7-92}$$

令

$$\alpha\left(\frac{a}{t}\right)-f\left(\frac{a}{t}\right)\Big/F\left(\frac{a}{t}\right) \tag{7-93}$$





(a) 边缘裂纹　　(b) 缺口边缘裂纹

图 7-6　含二维张开型边缘裂纹板

将以上三式代入式(7-90)，可得

$$\nu = \nu_0 \left\{ 4\alpha\left(\frac{a}{t}\right)\left(1-\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} + \left[1 - 4\alpha\left(\frac{a}{t}\right)\right]\left(1-\frac{x}{a}\right)^{\frac{3}{2}} \right\} \tag{7-94}$$

裂纹张开位移是由 ν_0 与 $\alpha(a/t)$ 决定的，而 ν_0 与 $\alpha(a/t)$ 又是由 $f(a/t)$，$F(a/t)$ 决定的。

考虑裂纹前沿应力强度因子与位移的关系，可得

$$f\left(\frac{a}{t}\right) = \eta\left(\frac{a}{t}\right) = K_{\rm I} / \sigma\sqrt{\pi a} \tag{7-95}$$

由式(7-91)，也可得到

$$\mathrm{d}\nu_0 = L\frac{\nu_0}{a}\mathrm{d}a \tag{7-96}$$

$$L = 1 + \frac{a}{t}F'\left(\frac{a}{t}\right) \bigg/ F\left(\frac{a}{t}\right) \tag{7-97}$$

若裂纹表面分布载荷为

$$\sigma = \sigma_0 t(x) \tag{7-98}$$

则采用能量释放率方法求出 $F(a/t)$ 如下：



$$F\left(\frac{a}{t}\right)=\frac{\sqrt{2}\pi}{m_3}\int_0^1 \omega\left[\eta^2\left(\frac{a}{t}\omega\right)\right]d\omega-4\left(\frac{m_1}{m_3}-1\right)f\left(\frac{a}{t}\right) \tag{7-99}$$

式中

$$m_1=\int_0^1\left(1-\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}}t(x)d\frac{x}{a} \tag{7-100}$$

$$m_3=\int_0^1\left(1-\frac{x}{a}\right)^{\frac{3}{2}}t(x)d\frac{x}{a} \tag{7-101}$$

当远方受均匀载荷时，$t(x)=1$，且

$$f\left(\frac{a}{t}\right)=1.12-0.231\left(\frac{a}{t}\right)+10.55\left(\frac{a}{t}\right)^2-21.72\left(\frac{a}{t}\right)^3+30.39\left(\frac{a}{t}\right)^4 \tag{7-102}$$

采用能量释放率方法确定 $F(a/t)$，即

$$F\left(\frac{a}{t}\right)=\sqrt{\frac{25}{2}\pi}\int_0^1 \omega\left[\eta^2\left(\frac{a}{t}\omega\right)\right]d\omega-\frac{8}{3}f\left(\frac{a}{t}\right) \tag{7-103}$$

也可采用卡氏定理确定 $F(a/t)$，其精度较能量释放率方法高。所得结果为

$$\begin{aligned}F\left(\frac{a}{t}\right)=\Big\{8.3465-\Big[&0.09\left(1-\frac{a}{t}\right)^4-0.256\left(1-\frac{a}{t}\right)^{\frac{9}{2}}+\\&0.266\left(1-\frac{a}{t}\right)^{\frac{7}{2}}-0.376\left(1-\frac{a}{t}\right)^{\frac{3}{2}}+\\&4.7797\left(1-\frac{a}{t}\right)^{\frac{1}{2}}+1.1528\ln\left(1-\frac{a}{t}\right)+\\&4.7797\left(1-\frac{a}{t}\right)^{\frac{1}{2}}+1.1528\ln\left(1-\frac{a}{t}\right)+\\&5.8135\left(1-\frac{a}{5}\right)^{-1}-1.9747\left(1-\frac{a}{t}\right)^{-2}\Big]\Big\}2\sqrt{2}\Big/\left(\frac{a}{t}\right)\end{aligned} \tag{7-104}$$

对于孔边裂纹，与一般边沿裂纹类似，可得



$$\nu = \nu_0 \left\{ 4\alpha\left(\frac{a}{R},\frac{R}{t}\right)\left[1-\frac{x}{a}\right]^{\frac{1}{2}} + \left[1-4\alpha\left(\frac{a}{R},\frac{R}{t}\right)\left[1-\frac{x}{a}\right]^{\frac{3}{2}}\right\} \tag{7-105}$$

式中

$$\nu_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sigma_0}{E}aF\left(\frac{a}{R},\frac{R}{t}\right) \tag{7-106}$$

$$\alpha\left(\frac{a}{R},\frac{R}{t}\right) = \frac{f\left(\frac{a}{R},\frac{R}{t}\right)}{E\left(\frac{a}{R},\frac{R}{t}\right)} \tag{7-107}$$

$$f\left(\frac{a}{R},\frac{R}{t}\right) = \frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{\pi a}} \tag{7-108}$$

$$F\left(\frac{a}{R},\frac{R}{t}\right) = \frac{\sqrt{2}\pi}{m_3}\int_0^1 \omega\left[f^2\left(\frac{a}{R}\omega,\frac{R}{t}\right)\right]\mathrm{d}\omega - 4\left(\frac{m_1}{m_3}-1\right)f\left(\frac{a}{R},\frac{R}{t}\right) \tag{7-109}$$

$$m_1 = \int_0^1\left(1-\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} t(x)\mathrm{d}\,\frac{x}{a} \tag{7-110}$$

$$m_3 = \int_0^1\left(1-\frac{x}{a}\right)^{\frac{3}{2}} t(x)\mathrm{d}\,\frac{x}{a} \tag{7-111}$$

总之，裂纹张开位移表达式可写为

$$\nu = \nu_0 \left\{ n\alpha\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right)\left[\beta\left(\frac{x}{a}\right)\right]^{\frac{1}{2}} + \left[1-n\alpha\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right)\right]\left[\beta\left(\frac{x}{a}\right)\right]^{\frac{3}{2}}\right\} \tag{7-112}$$

式中

$$a_1 = a_2 = a \tag{7-113}$$

$$n = 4 \tag{7-114}$$

$$\beta\left(\frac{x}{a}\right) = 1-\frac{x}{a} \tag{7-115}$$

3. 三维裂纹张开位移模态

假设三维问题中横、纵截面的裂纹张开位移的模态分别与二



维问题中具有相同几何形状和载荷分布的平板裂纹张开位移的模态相同。根据以上假设，并使横、纵切片裂纹张开位移及导数沿 x 轴、z 轴与裂纹前沿互相协调，则经过任一点 $A(x,z)$ 的横、纵截面（见图 7-4），裂纹张开位移为

$$\nu_1(x,z)=\nu_0 h_1(x,z),\qquad \nu_2(x,z)=\nu_0 h_2(x,z) \tag{7-116}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}
h_1(z,x)=&\left\{n_1\alpha_1\left(\frac{a'}{t}\right)\left[\beta_1\left(\frac{x}{a'}\right)\right]^{\frac{1}{2}}+\left[1-n_1\alpha_1\left(\frac{a'}{t}\right)\right]\left[\beta_1\left(\frac{x}{a'}\right)\right]^{\frac{3}{2}}\right\}\cdot\\
&\left\{n_2\alpha_2\left(\frac{c}{b}\right)\left[\beta_2\left(\frac{z}{c}\right)\right]^{\frac{1}{2}}+\left[1-n_2\alpha_2\left(\frac{c}{b}\right)\right]\left[\beta_2\left(\frac{z}{c}\right)\right]^{\frac{3}{2}}\right\}\\
h_2(x,z)=&\left\{n_1\alpha_1\left(\frac{a}{t}\right)\left[\beta_1\left(\frac{x}{a}\right)\right]^{\frac{1}{2}}+\left[1-n_1\alpha_1\left(\frac{a}{t}\right)\right]\left[\beta_1\left(\frac{x}{a}\right)\right]^{\frac{3}{2}}\right\}\cdot\\
&\left\{n_2\alpha_2\left(\frac{c'}{b}\right)\left[\beta_2\left(\frac{z}{c'}\right)\right]^{\frac{1}{2}}+\left[1-n_2\alpha_2\left(\frac{c'}{b}\right)\right]\left[\beta_2\left(\frac{z}{c'}\right)\right]^{\frac{3}{2}}\right\}
\end{aligned}\right\} \tag{7-117}$$

$n_i,\beta_i(\bar{z}),\alpha_i$ 的推导见 7.2.4 节中的第 1 部分和第 2 部分，下标 i 代表截面方向。

因此，在裂纹前沿邻域，由式(7-21)可知

$$H(x,z)=h_1^2(z_1,x)+h_2^2(x_1,z) \tag{7-118}$$

且在裂纹内部，有

$$h(x,z)=[h_1(z,x)+h_2(x,z)]/2 \tag{7-119}$$

继而由式(7-28)与式(7-30)确定 I,J,B，并由式(7-39)或式(7-40)与式(7-26)确定 ν_0 与 K_1。



总能量释放率为

$$G_{ge} = -\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}g} = \frac{\pi}{8}E_1 a c v_0^2\left(\frac{I}{a} + \frac{J}{c}\right) \qquad (7-120)$$

7.2.5 典型算例

图 7-7 至图 7-10 给出了四种典型情况下本方法与有限元法[7.1]所得结果的比较。本方法与现有结果符合得较好。

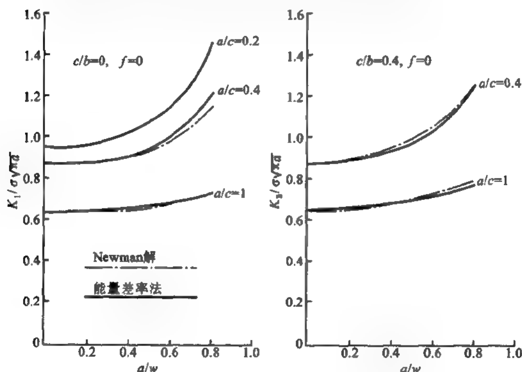
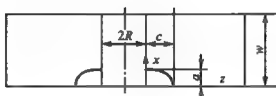


图 7-7 含深埋椭圆裂纹有限大矩形板结果(与 Newman 结果比较)



图 7-8　含表面半椭圆裂纹有限大矩形板结果(与 Newman 结果比较)



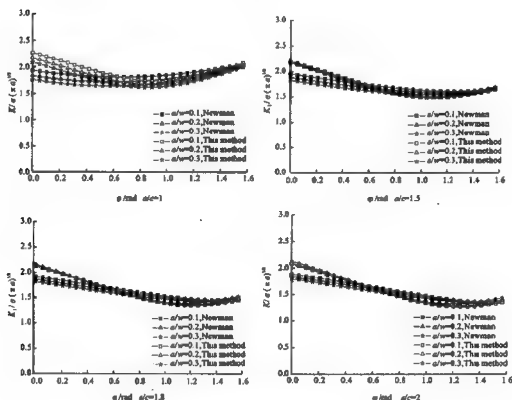


图 7-9 含中心圆孔有限大矩形板孔边 1/4 椭圆角裂纹有限大矩形板结果（与 Newman 结果比较）($\nu=0.3, R/w=2.0$)



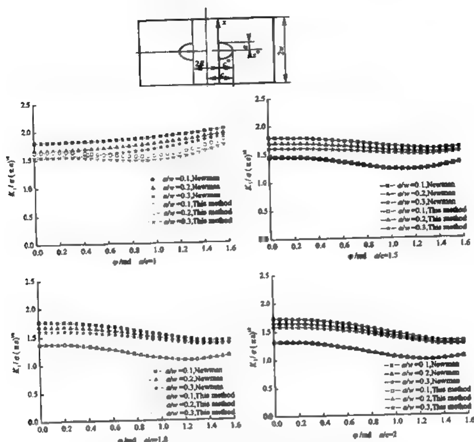


图 7-10 含中心圆孔有限大矩形板孔边 1/2 椭圆表面裂纹
(与 Newman 结果比较)
(取泊松比为 0.3, $R/w=2, 0<a/w\leqslant 0.3, \phi=0\sim\pi/2$)

7.3 含偏心裂纹三维有限大体应力强度因子能量差率闭合解法

7.3.1 裂纹张开位移与三维应力强度因子

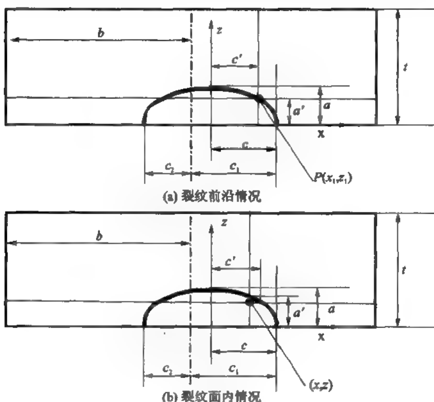
对于含偏心裂纹的有限大板(见图 7-11),将裂纹张开位移 v 分解成关于 z 轴对称与反对称的形式,即



$$\nu(x,z) = \nu_{0i} h_i(x,z) \qquad (i = 1,2) \qquad (7-121)$$

$$\nu^2(x,z) = \nu_{0i}\nu_{0j} H_{ij}(x,z) \qquad (i,j = 1,2) \qquad (7-122)$$

式中，h_1 与 h_2 分别为关于 z 轴对称与反对称裂纹张开位移模态函数，ν_{01} 与 ν_{02} 分别为相应的位移幅值，即广义位移。



(a) 裂纹前沿情况

(b) 裂纹面内情况

图 7-11 有限大体含偏心非穿透裂纹的截面

在裂纹前沿 $P(x_1,z_1)$ 点，将 $\nu^2(x,z)$ 展开为泰勒级数，略去高次项，可得

$$\nu^2(x,z) = \nu_{0i}\nu_{0j}\left[\frac{\partial H_{ij}}{\partial x}\bigg|_P (x - x_1) + \frac{\partial H_{ij}}{\partial z}\bigg|_P (z - z_1)\right] =$$

$$\nu^2(x,z_1) + \nu^2(x_1,z) \qquad (7-123)$$

式中，$\nu(x,z_1)$，$\nu(x_1,z)$ 分别为过点 $P(x_1,z_1)$ 横向及纵向截面的裂纹张开位移。上式可称为裂纹张开位移的勾股定理。



引入任意法向切片，如图 7-2 所示。在裂纹前沿 $P(x_1,z_1)$ 点邻域的裂纹张开位移可由相应的应力强度因子表示如下：

$$v^2(x,z)=\frac{8}{\pi}\frac{K_1^2}{E_n^2}r \qquad (7-124)$$

式中，E_n 为杨氏弹性模量；K_1 为应力强度因子。

由式(7-122)与式(7-123)及式(7-124)，可得

$$K_1^2=\frac{\pi}{8}E_n^2\nu_{0_t}\nu_{0_t}\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}[H_y(x,z_1)+H_y(x_1,z)] \qquad (7-125)$$

因此，只要确定了 ν_{0_t} 与 $H_y(x,z)$，即可得到 K_1。

7.3.2　广义裂纹张开位移的基本微分方程式

为确定 ν_{0_t}，引入两种虚裂纹扩展形式，如图 7-12 所示。

(1) 按比例扩展

$$\mathrm{d}a=a\mathrm{d}g_1,\quad \mathrm{d}c=c\mathrm{d}g_1 \qquad (7-126)$$

在这种情况下的总位能差率等于各无限薄法向切片总位能差率的积分，即

$$\mathrm{d}\Pi=-\int_s G\mathrm{d}r\mathrm{d}s=-\left[\frac{\pi}{8}E_1ac\nu_{0_t}^2\left(\frac{I_t}{a}+\frac{J_t}{c}\right)\right]\mathrm{d}g_1 \qquad (7-127)$$

式中，G 为裂纹前沿单位厚度法向切片能量差率；$\mathrm{d}r$ 为该切片的裂纹扩展量；$\mathrm{d}s$ 为该切片裂纹前沿处的厚度。同时，有

$$\left.\begin{aligned}I_t&=a\int\frac{E_n}{E_1}\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}H_y(x,z_1)\big|_{j=t}\cos^2\psi\mathrm{d}\varphi\\J_t&=c\int\frac{E_n}{E_1}\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}H_y(x_1,z)\big|_{j=t}\cos^2\psi\mathrm{d}\varphi\end{aligned}\right\} \qquad (7-128)$$

这里，φ 是椭圆裂纹的参数角。

而另一方面根据叠加原理，可将板的远端载荷转移至裂纹表面，并将总势能表示为



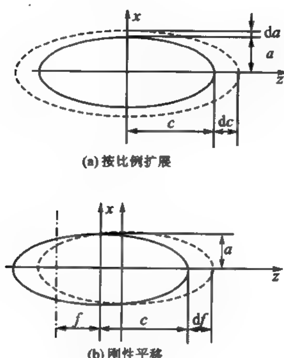


图 7-12　两种裂纹扩展形式

$$\Pi=-\int_A \sigma\nu \mathrm{d}A=-\sigma_0\int_A t(x,z)\nu(x,z)\mathrm{d}A=-\sigma_0\pi ac\nu_{0i}B_i$$

(7-129)

式中，A 为裂纹面积；σ 为裂纹表面的载荷；$t(x,z)$ 为其分布函数；σ_0 为载荷幅值，即广义力。同时

$$B_i=\frac{1}{\pi ac}\int t(x,z)h_i(x,z)\mathrm{d}A \qquad (7-130)$$

将式(7-129)对 g_1 微分并与式(7-127)比较，且令

$$\xi=\frac{\nu_2}{\nu_1},\qquad B=B_1+\xi B_2 \qquad (7-131)$$

$$I=I_1+\xi^2 I_2,\qquad J=J_1+\xi^2 J_2 \qquad (7-132)$$

可得到一个关于 ν_{01} 的微分方程

$$\frac{\partial \nu_{01}}{\partial g_1}+\left(2+\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial g_1}\right)\nu_{01}=\frac{E_1}{8\sigma_0 B}\left(\frac{I}{a}+\frac{J}{c}\right)\nu_{01}^2 \quad (7-133)$$



(2) 刚性平移

$$\mathrm{d}f = f\mathrm{d}g_2 \tag{7-134}$$

根据这种虚裂纹扩展形式下的总位能差率一方面等于各无限薄法向切片总位能差率的积分,而另一方面等于外力势能的变化率,可得到如下关于 ν_{01} 的另一微分方程式:

$$\frac{\partial \nu_{01}}{\partial g_2} + \left(\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial g_2}\right)\nu_{01} = \frac{E_1}{4\sigma_0 B}\left(\frac{M}{a} + \frac{N}{c}\right)\left(\frac{f}{c}\right)\nu_{01}\nu_{02} \tag{7-135}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} M &= a\int \frac{E_n}{E_1}\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}H_{12}(x,z_1)\cos\varphi\mathrm{d}\varphi \\ N &= c\int \frac{E_n}{E_1}\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}H_{12}(x_1,z)\cos\varphi\mathrm{d}\varphi \end{aligned}\right\} \tag{7-136}$$

7.3.3 基本方程的封闭解法

这样,得到了关于 ν_{01} 与 ν_{02} 的两个一阶非线性方程组式(7-133)与式(7-135)。应当指出,实际上 ξ 比 1 小一个数量级。从而 ξ^2 比 1 小两个数量级,在分析与计算中,可以取 $I=I_1$;对于受对称载荷的情况,$B=B_1$。因此式(7-133)可视为伯努利方程,则可得到 ν_{01} 的解答

$$\frac{1}{\nu_{01}} = \mathrm{e}^{2g_1}B\left[-\frac{E_1}{8\sigma_0}\int_0^{g_1}\frac{1}{B^2}\left(\frac{I}{a}+\frac{J}{c}\right)\mathrm{e}^{-2g_1^*}\mathrm{d}g_1^* + \left(\frac{1}{\nu_{01}B}\right)\bigg|_{g_1=0}\right] \tag{7-137}$$

以下探讨进一步简化 ν_{01} 的封闭解答。令 a/t 与 c/b 不变,考虑两种极端情况。

(1) $a/c\to 0$,裂纹可看作沿宽度方向穿透的二维裂纹

$$\left(\frac{1}{\nu_{01}B}\right)\bigg|_{a/c\to 0} = \mathrm{e}^{2g_1}\left[-\frac{E_1}{8\sigma_0 a}\int_0^{g_1}\left(\frac{I}{B^2}\right)\bigg|_{a/c\to 0}\mathrm{e}^{-2g_1^*}\mathrm{d}g_1^* + \left(\frac{1}{\nu_{01}B}\right)\bigg|_{g_1=0,a/c\to 0}\right] \tag{7-138}$$



(2) $c/a \to 0$,裂纹可看作沿厚度方向穿透的二维裂纹

$$\left(\frac{1}{\nu_{01}B}\right)\bigg|_{c/a\to 0}=e^{2g_1}\left[\frac{E_1}{8\sigma_0 c}\int_0^{g_1}\left(\frac{J}{B^2}\right)\bigg|_{c/a\to 0}e^{-2g_1^*}\,dg_1^*+\left(\frac{1}{\nu_{01}B}\right)\bigg|_{g_1=0,c/a\to 0}\right] \tag{7-139}$$

然后对于任意 a/c 值,进行分离变量如下:

$$\frac{I+\frac{a}{c}J}{B^2}=m\left(\frac{a}{c},\frac{t}{b}\right)\left(\frac{I}{B^2}\right)\bigg|_{a/c\to 0}+n\left(\frac{c}{a},\frac{b}{t}\right)\frac{a}{c}\left(\frac{J}{B^2}\right)\bigg|_{c/a\to 0} \tag{7-140}$$

式中,$m\left(\frac{a}{c},\frac{t}{b}\right)$与$n\left(\frac{c}{a},\frac{b}{t}\right)$可由最小二乘方法确定。

将式(7-140)代入式(7-137),与式(7-138)及式(7-139)比较,并考虑到 ν_{01} 为状态函数,与 g_i 无关,有

$$\frac{1}{\nu_{01}B}=\frac{m\left(\frac{a}{c},\frac{t}{b}\right)}{(\nu_{01}B)\mid_{a/c\to 0}}+\frac{n\left(\frac{c}{a},\frac{b}{t}\right)}{(\nu_{01}B)\mid_{c/a\to 0}} \tag{7-141}$$

在由上式得到 ν_{01} 的解答后,即可根据式(7-135)确定 ξ 如下:

$$\xi=\frac{\nu_{02}}{\nu_{01}}=\frac{-\frac{\partial}{\partial g_2}\left(\frac{1}{\nu_{01}B}\right)}{\frac{E_1}{4\sigma_0 B^2}\left(\frac{M}{a}+\frac{N}{c}\right)\left(\frac{f}{c}\right)} \tag{7-142}$$

7.3.4 裂纹张开位移模态

假设三维问题中横、纵截面裂纹张开位移的对称与反对称部分的模态分别与二维问题中具有相同几何形状,与载荷分布的平板裂纹张开位移的对称及反对称部分的模态相同。根据以上假设,并使横、纵切片裂纹张开位移及导数沿 x 轴、z 轴与裂纹前沿互相协调,则经过任一点(x,z)的横、纵截面裂纹张开位移为

$$\nu_1(x,z)=\nu_{0i}h_{1i}(x,z),\qquad \nu_2(x,z)=\nu_{0i}h_{2i}(x,z) \tag{7-143}$$



式中

$$\left.\begin{aligned}
h_{11}(z,x) = {} & \left\{n_1\alpha_1\left(\frac{a'}{t}\right)\left[\beta_1\left(\frac{x}{a'}\right)\right]^{\frac{1}{2}} + \right. \\
& \left.\left[1-n_1\alpha_1\left(\frac{a'}{t}\right)\right]\left[\beta\left(\frac{x}{a'}\right)\right]^{\frac{3}{2}}\right\}\cdot \\
& \left\{n_2\alpha_2\left(\frac{c_1}{b},\frac{c_2}{b}\right)\left[\beta_2\left(\frac{z}{c}\right)\right]^{\frac{1}{2}} + \right. \\
& \left.\left[1-n_2\alpha_2\left(\frac{c_1}{b},\frac{c_2}{b}\right)\right]\left[\beta\left(\frac{z}{c}\right)\right]^{\frac{3}{2}}\right\} \\
h_{12}(z,x) = {} & \left\{n_1\alpha_1\left(\frac{a'}{t}\right)\left[\beta_1\left(\frac{x}{a'}\right)\right]^{\frac{1}{2}} + \right. \\
& \left.\left[1-n_1\alpha_1\left(\frac{a'}{t}\right)\right]\left[\beta\left(\frac{x}{a'}\right)\right]^{\frac{3}{2}}\right\}\cdot \\
& \left\{n_2\alpha_2\left(\frac{c_1}{b},\frac{c_2}{b}\right)\left[\beta_2\left(\frac{z}{c}\right)\right]^{\frac{1}{2}} + \right. \\
& \left.\left[1-n_2\alpha_2\left(\frac{c_1}{b},\frac{c_2}{b}\right)\right]\left[\beta\left(\frac{z}{c}\right)\right]^{\frac{3}{2}}\right\}\left(\frac{z}{c}\right) \\
h_{21}(z,x) = {} & \left\{n_1\alpha_1\left(\frac{a}{t}\right)\left[\beta_1\left(\frac{x}{a}\right)\right]^{\frac{1}{2}} + \right. \\
& \left.\left[1-n_1\alpha_1\left(\frac{a}{t}\right)\right]\left[\beta\left(\frac{x}{a}\right)\right]^{\frac{3}{2}}\right\}\cdot \\
& \left\{n_2\alpha_2\left(\frac{c_1'}{b},\frac{c_2'}{b}\right)\left[\beta_2\left(\frac{z}{c'}\right)\right]^{\frac{1}{2}} + \right. \\
& \left.\left[1-n_2\alpha_2\left(\frac{c_1'}{b},\frac{c_2'}{b}\right)\right]\left[\beta\left(\frac{z}{c'}\right)\right]^{\frac{3}{2}}\right\} \\
h_{22}(z,x) = {} & \left\{n_1\alpha_1\left(\frac{a}{t}\right)\left[\beta_1\left(\frac{x}{a}\right)\right]^{\frac{1}{2}} + \right. \\
& \left.\left[1-n_1\alpha_1\left(\frac{a}{t}\right)\right]\left[\beta\left(\frac{x}{a}\right)\right]^{\frac{3}{2}}\right\}\cdot \\
& \left\{n_2\alpha_2\left(\frac{c_1'}{b},\frac{c_2'}{b}\right)\left[\beta_2\left(\frac{z}{c'}\right)\right]^{\frac{1}{2}} + \right. \\
& \left.\left[1-n_2\alpha_2\left(\frac{c_1'}{b},\frac{c_2'}{b}\right)\right]\left[\beta\left(\frac{z}{c'}\right)\right]^{\frac{3}{2}}\right\}\left(\frac{z}{c'}\right)
\end{aligned}\right\} \quad (7-144)$$

其中，n_i，$\beta_i(\bar{z})$，α_i 的推导见 7.2.4 节。



因此，在裂纹前沿邻域，由式(7－123)可知

$$\left.\begin{aligned} H_{11}(x,z) &= h_{11}^2(z_1,x)+h_{21}^2(x_1,z) \\ H_{22}(x,z) &= h_{12}^2(z_1,x)+h_{22}^2(x_1,z) \\ H_{12}(x,z) &= h_{11}(z_1,x)h_{12}(z_1,x)+h_{21}(x_1,z)h_{22}(x_1,z) \end{aligned}\right\} \tag{7-145}$$

且在裂纹内部，有

$$h_i(x,z)=[h_{1i}(z,x)+h_{2i}(x,z)]/2 \tag{7-146}$$

继而由式(7－128)至式(7－132)与式(7－136)确定 I,J,B,M,N，并由式(7－141)、式(7－142)与式(7－125)确定 ν_{0i} 与 K_{I}。

7.3.5 典型算例

图 7－13 至图 7－14 给出了典型情况下的应力强度因子结果。

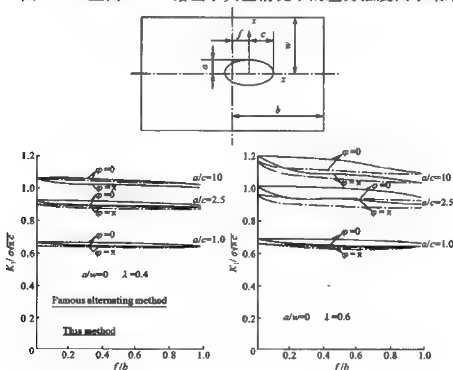


图 7－13 含深埋偏心椭圆裂纹有限大矩形板结果



图 7-13 还给出了本方法所得结果与现有少量结果(含深埋偏心椭圆裂纹有限大板情况)的比较。该图表明,能量差率闭合解法与交替迭代法所得结果符合得很好。

图 7-14　含表面偏心半椭圆裂纹有限大矩形板结果

7.4 含孔边裂纹圆管应力强度因子能量差率闭合解法

7.4.1 裂纹张开位移与三维应力强度因子

对于含孔边角裂纹受拉圆管(见图 7-15),将裂纹表面张开位移写为如下形式:

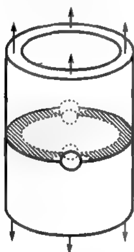


图 7-15 含孔边角裂纹受拉圆管

$$v(x,z) = v_0 h(x,z) \tag{7-147}$$

式中,v_0 为原点处裂纹张开位移;$h(x,z)$ 为裂纹张开位移模态函数。因此,有

$$\left.\begin{aligned} v^2(x,z) &= v_0^2 H(x,z) \\ H(x,z) &= h^2(x,z) \end{aligned}\right\} \tag{7-148}$$

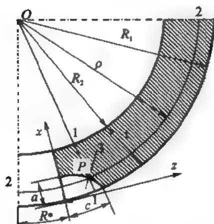
式中,$H(x,z)$ 在裂纹前沿为零,且二次可导。

如图 7-16(a)所示,假设孔是顶点为 O 的圆锥台孔,这对于管壁较薄的轴是可以接受的。经裂纹前沿任意点 P,引入三种截面:径向截面 1-1、环向截面 2-2 及法向截面3-3。由图 7-16(b),在裂纹前沿附近,法向、径向和环向截面相应点的直角坐标分别为

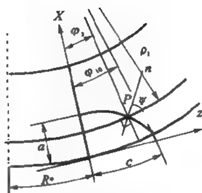
$$\left.\begin{aligned} &x = x_1 - r\sin(\varphi_1+\psi), \quad z = z_1 - r\cos(\varphi_1+\psi), \quad r = \overline{PA} \\ &x = x_1 - r_1\cos\varphi_1, \quad z = z_1 + r_1\sin\varphi_1, \quad r_1 = \overline{PA_1} \\ &x = x_1 - r_2\sin\varphi_1, \quad z = z_1 - r_2\cos\varphi_1, \quad r_2 = \overline{PA_2} \end{aligned}\right\} \tag{7-149}$$

将这些截面裂纹张开位移的平方展开为泰勒级数,略去高次项,可得

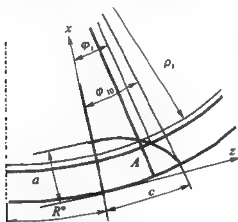




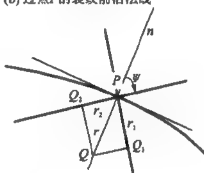
(a) 过裂纹前沿任意点P的三种截面



(b) 过点P的裂纹前沿法线



(c) 裂纹面内任意点A



(d) 裂纹前沿任意点P的邻域

图 7－16　圆管、含孔边角裂纹的截面

$$\nu^2(\rho,\varphi) = -\nu_0^2\left[\frac{\partial H}{\partial x}\bigg|_P \sin(\varphi_1+\psi) + \frac{\partial H}{\partial z}\bigg|_P \cos(\varphi_1+\psi)\right] r \tag{7-150}$$

$$\nu^2(\rho,\varphi_1) = -\nu_0^2\left(\frac{\partial H}{\partial x}\bigg|_P \cos\varphi_1 - \frac{\partial H}{\partial z}\bigg|_P \sin\varphi_1\right) r_1 \tag{7-151}$$

$$\nu^2(\rho_1,\varphi) = -\nu_0^2\left(\frac{\partial H}{\partial x}\bigg|_P \sin\varphi_1 + \frac{\partial H}{\partial z}\bigg|_P \cos\varphi_1\right) r_2 \tag{7-152}$$

式中，$r_1 = r\sin\psi$，$r_2 = r\cos\psi$。由式(7－150)、式(7－151)和式(7－152)可看出

$$\nu^2(\rho,\varphi) = \nu^2(\rho_1,\varphi) + \nu^2(\rho,\varphi_1) \tag{7-153}$$

上式可称为裂纹张开位移的勾股定理。

在裂纹前沿 P 点邻域的表面位移可由相应的应力强度因子表示如下：

$$\nu^2(\rho,\varphi) = \frac{8}{\pi}\frac{K_{\rm I}^2}{E_n^2} r \tag{7-154}$$

式中，E_n 为法向切片的广义杨氏弹性模量，可写为

$$\left.\begin{aligned} E_n &= E + (E_1 - E)f(\psi) \\ E_1 &= E/(1-\nu^2) \\ f(\psi) &\in [0,1] \end{aligned}\right\} \tag{7-155}$$

由式(7－154)与式(7－150)，可得

$$K_{\rm I}^2 = -\frac{\pi}{8}E_n^2\nu_0^2\left[\frac{\partial H}{\partial x}\bigg|_P \sin(\varphi_1+\psi) + \frac{\partial H}{\partial z}\bigg|_P \cos(\varphi_1+\psi)\right] \tag{7-156}$$

因此，只要确定了 ν_0 与 $H(x,z)$，即可得到 $K_{\rm I}$。

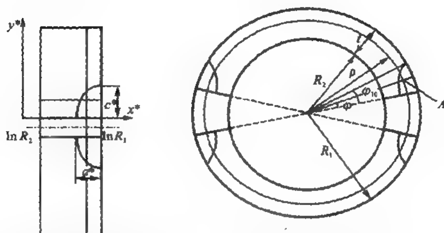
7.4.2 裂纹张开位移幅值的基本微分方程式

图 7－17(b)是一含孔边裂纹圆管的截面图，为了与平板情况相统一，假设它是由图 7－17(a)经保角变换 $\vec{\omega} = e^{\vec{z}^*}$ 而来，即

$$\vec{\omega} = e^{\vec{z}^*} = \rho e^{i\varphi}, \qquad \rho = e^{x^*}, \qquad \varphi = y^*, \qquad \vec{z}^* = x^* + iy^* \tag{7-157}$$

图 7－17(a)为含 1/4 椭圆角裂纹的矩形截面，$x^* = a^*\sin\theta$，$y^* = c^*\cos\theta$，因此，圆管孔边角裂纹的方程为





(a) 含1/4椭圆角裂纹的矩形截面　　(b) 含孔边裂纹圆管截面

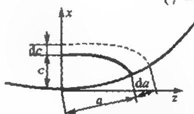
图 7-17　由矩形板到圆管的保角变换

$$\rho_1 = R_1\left(1-\frac{a}{R_1}\right)^{\sin\theta}, \qquad \varphi_1 = \frac{c}{R_1}\cos\theta \tag{7-158}$$

该裂纹可称为准 1/4 椭圆裂纹，且

$$\left.\begin{aligned}\sin\psi &= \frac{\frac{c}{R_1}\sin\theta}{\sqrt{\left[\frac{c}{R_1}\sin\theta\right]^2+\left[\ln\left(1-\frac{a}{R_1}\right)\cos\theta\right]^2}}\\ \cos\psi &= \frac{-\ln\left(1-\frac{a}{R_1}\right)\cos\theta}{\sqrt{\left[\frac{c}{R_1}\sin\theta\right]^2+\left[\ln\left(1-\frac{a}{R_1}\right)\cos\theta\right]^2}}\end{aligned}\right\} \tag{7-159}$$

为确定 ν_0，首先考虑在裂纹扩展中总位能的增量 $d\Pi$。令虚裂纹扩展形式为按比例扩展，如图 7-18 所示。



7-18　裂纹虚扩展形式为按比例扩展

$$da = a\,dg, \qquad dc = c\,dg \tag{7-160}$$

式中，g 为裂纹扩展系数，所以在这种情况下的总位能差率等于各无限薄法向切片总位能差率的积分，即

$$\mathrm{d}\Pi = -\int_s G\mathrm{d}r\mathrm{d}s = -\int_s \frac{K_{\mathrm{I}}^2}{E_n}\mathrm{d}r\mathrm{d}s \tag{7-161}$$

而

$$\mathrm{d}r\mathrm{d}s = acp\left(\frac{a}{R_1},\theta\right)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}g \tag{7-162}$$

$$p\left(\frac{a}{R_1},\theta\right) = \left(1-\frac{a}{R_1}\right)^{2\sin\theta}\left\{\sin^2\theta\left(1-\frac{a}{R_1}\right)^{-1} + \frac{R_1}{a}\cos^2\theta\left[\ln\left(1-\frac{a}{R_1}\right)^{-1}\right]\right\} \tag{7-163}$$

将式(7-156)及式(7-162)代入式(7-161)，得到

$$\mathrm{d}\Pi = -\int_s G\mathrm{d}r\mathrm{d}s = -\frac{\pi}{8}E_1 ac\nu_0^2\left(\frac{I}{a}+\frac{J}{c}\right)\mathrm{d}g \tag{7-164}$$

$$I = a\int\frac{E_n}{E_1}\left(\left.\frac{\partial H}{\partial x}\right|_p\cos\varphi_1 - \left.\frac{\partial H}{\partial z}\right|_p\sin\varphi_1\right)\sin\psi p\left(\frac{a}{R_1},\theta\right)\mathrm{d}\theta \tag{7-165}$$

$$J = c\int\frac{E_n}{E_1}\left(\left.\frac{\partial H}{\partial x}\right|_p\sin\varphi_1 + \left.\frac{\partial H}{\partial z}\right|_p\cos\varphi_1\right)\cos\psi p\left(\frac{a}{R_1},\theta\right)\mathrm{d}\theta \tag{7-166}$$

另一方面，根据叠加原理，可将板的远端载荷转化为裂纹表面载荷 $\sigma(\rho,\varphi)=\sigma_0 t(\rho,\varphi)$，并将总势能表示为

$$\Pi = -\int_A \sigma\nu\mathrm{d}A = -\sigma_0\int_A t(\rho,\varphi)\nu(\rho,\varphi)\mathrm{d}A = -\sigma_0\pi ac\nu_0 B \tag{7-167}$$

式中，A 为裂纹面积；σ 为裂纹表面的载荷；t 为其分布函数；σ_0 为载荷幅值，即广义力。同时，有

$$B = \frac{1}{2\pi ac}\int t(\rho,\varphi)h(\rho,\varphi)\mathrm{d}A \tag{7-168}$$

而在裂纹内部，令

$$h(\rho,\varphi) = [h_1(\rho,\varphi)+h_2(\rho,\varphi)]/2 \tag{7-169}$$



可得

$$B=\frac{1}{2\pi ac}\int t(\rho,\varphi)[h_1(\rho,\varphi)+h_2(\rho,\varphi)]\mathrm{d}A \quad (7-170)$$

由于虚裂纹扩展形式下的总位能差率一方面等于各无限薄法向切片总位能差率的积分，而另一方面等于外力势能的变化率，可得到一个关于 ν_0 的微分方程

$$\frac{\partial\nu_0}{\partial g}+\left(2+\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial g}\right)\nu_0-\frac{E_1}{8\sigma_0 B}\left(\frac{I}{a}+\frac{J}{c}\right)\nu_0^2 \quad (7-171)$$

这样，便得到了关于 ν_0 的伯努利方程。ν_0 的解答为

$$\frac{1}{\nu_0}=\mathrm{e}^{2g}B\left[-\frac{E_1}{8\sigma_0}\int_0^g\frac{1}{B^2}\left(\frac{I}{a}+\frac{J}{c}\right)\mathrm{e}^{-2g^*}\,\mathrm{d}g^*+\left(\frac{1}{\nu_0 B}\right)\Big|_{g=0}\right] \quad (7-172)$$

7.4.3　基本方程的封闭解法

以下探讨进一步简化 ν_0 的封闭解答。令 a/t 与 c/b 不变，考虑两种极端情况（见图 7-19）。

(1) $\frac{a}{c}\to 0$，而 $\frac{a}{t}$，$\frac{c}{R^*}$，$\frac{R^*}{R_1}$ 保持不变，即 $c\to\infty$

$$\left(\frac{1}{\nu_0 B}\right)\Big|_{a/c\to 0}=\mathrm{e}^{2g}\left[-\frac{E_1}{8\sigma_0 a}\int_0^g\left(\frac{I}{B^2}\right)\Big|_{a/c\to 0}\mathrm{e}^{-2g^*}\,\mathrm{d}g^*+\left(\frac{1}{\nu_0 B}\right)\Big|_{g=0,a/c\to 0}\right] \quad (7-173)$$

裂纹可看作沿环向的穿透裂纹，由 7.4.4 节可知

$$\nu_0\,|_{a/c\to 0}=\frac{\sigma_0}{E}aF\left(\frac{a}{t}\right) \quad (7-174)$$

$$L_1=\frac{1}{\nu_0}\frac{\mathrm{d}\nu_0}{\mathrm{d}g}\Big|_{a/c\to 0} \quad (7-175)$$

则

$$\nu_0\,|_{a/c\to 0}=\frac{8\sigma_0 a}{E_1 I_{a/c\to 0}}\left[(2+L_1)B+\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}g}\right] \quad (7-176)$$



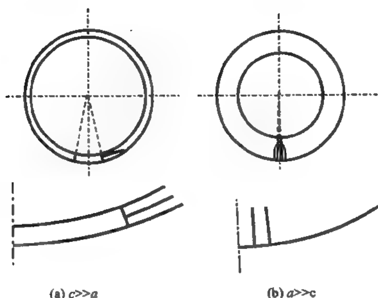


图 7-19　圆管孔边角裂纹的两种极端情况

(2) $\frac{c}{a}\to 0$，而$\frac{a}{t}$，$\frac{c}{R^*}$，$\frac{t}{R_1}$保持不变，即 $a\to\infty$

$$\left(\frac{1}{\nu_0 B}\right)\Bigg|_{c/a\to 0} = e^{2g}\left[-\frac{E_1}{8\sigma_0 c}\int_0^g \left(\frac{J}{B^2}\right)\Bigg|_{c/a\to 0} e^{-2g^*}\,dg^* + \left(\frac{1}{\nu_0 B}\right)\Bigg|_{g=0,c/a\to 0}\right] \tag{7-177}$$

裂纹可看作沿径向的穿透裂纹，由 7.4.4 节可知

$$\nu_0\big|_{c/a\to 0} = \frac{\sigma_0}{E}cF\left(\frac{c}{R^*}\right) \tag{7-178}$$

$$L_2 = \frac{1}{\nu_0}\frac{d\nu_0}{dg}\Bigg|_{c/a\to 0} \tag{7-179}$$

则

$$\nu_0\big|_{c/a\to 0} = \frac{8\sigma_0 c}{E_1 J_{c/a\to 0}}\left[(2+L_2)B + \frac{dB}{dg}\right] \tag{7-180}$$

然后对于任意 a/c 值，进行变量分离如下：

$$\frac{I}{B^2} = m\left(\frac{a}{c},\frac{t}{R^*}\right)\left(\frac{I}{B^2}\right)\Bigg|_{a/c\to 0},\qquad \frac{J}{B^2} = n\left(\frac{c}{a},\frac{R^*}{t}\right)\left(\frac{J}{B^2}\right)\Bigg|_{c/a\to 0} \tag{7-181}$$



即可确定 $m\left(\frac{a}{c},\frac{t}{R^*}\right)$ 与 $n\left(\frac{c}{a},\frac{R^*}{t}\right)$。

将式(7－181)代入式(7－172)，与式(7－173)及式(7－177)比较，并考虑到 ν_0 为状态函数，与 g 无关，有

$$\frac{1}{\nu_0 B}=\frac{m\left(\frac{a}{c},\frac{t}{R^*}\right)}{(\nu_0 B)\big|_{a/c\to 0}}+\frac{n\left(\frac{c}{a},\frac{R^*}{t}\right)}{(\nu_0 B)\big|_{c/a\to 0}} \tag{7-182}$$

将式(7－176)、式(7－180)与式(7－181)代入上式，可得

$$\frac{1}{\nu_0}=\frac{E_1}{8\sigma_0}\frac{I}{a\left[(2+L_1)B+\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}g}\right]}+\frac{E_1}{8\sigma_0}\frac{J}{c\left[(2+L_2)B+\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}g}\right]} \tag{7-183}$$

上式计算较简单。但若要求更高精度，也可以对任意 a/c 值按下式进行变量分离，即

$$\frac{I+\frac{a}{c}J}{B^2}=m\left(\frac{a}{c},\frac{t}{R^*}\right)\left(\frac{I}{B^2}\right)\bigg|_{a/c\to 0}+n\left(\frac{c}{a},\frac{R^*}{t}\right)\frac{a}{c}\left(\frac{J}{B^2}\right)\bigg|_{c/a\to 0} \tag{7-184}$$

式中，$m\left(\frac{a}{c},\frac{t}{R^*}\right)$ 与 $n\left(\frac{c}{a},\frac{R^*}{t}\right)$ 可由最小二乘方法确定。分别由式(7－174)与式(7－178)求出 $\nu_0\big|_{a/c\to 0}$ 与 $\nu_0\big|_{c/a\to 0}$，代入式(7－182)即可求出 ν_0。另外，总能量释放率为

$$G_{ge}=-\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}g}=\frac{\pi}{8}E_1 a c\nu_0^2\left(\frac{I}{a}+\frac{J}{c}\right) \tag{7-185}$$

7.4.4　裂纹张开位移模态

1. 含边沿裂纹的径向切片

为了构造三维裂纹表面位移模态，首先考虑二维裂纹表面位移(见图7－20)。与7.2.4中第2条所述含边沿裂纹板类似，可令含边沿裂纹的径向切片裂纹张开位移为



$$\nu_1\left(\frac{x}{a}\right)=\nu_{01}\left(\frac{a}{t},\frac{x}{a}\right)=\nu_{01}\left\{4\alpha_1\left(\frac{a}{t}\right)\left(1-\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}}+\left[1-4\alpha_1\left(\frac{a}{t}\right)\right]\left(1-\frac{x}{a}\right)^{\frac{3}{2}}\right\} \tag{7-186}$$

式中,裂纹嘴张开位移 ν_0 为

$$\nu_{01}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sigma_0}{E}aF\left(\frac{a}{t}\right) \tag{7-187}$$

$$\mathrm{d}\nu_{01}=L\frac{\nu_{01}}{a}\mathrm{d}a \tag{7-188}$$

$$L=1+\frac{a}{t}F'\left(\frac{a}{t}\right)\Big/F\left(\frac{a}{t}\right) \tag{7-189}$$

$$\alpha_1\left(\frac{a}{t}\right)=f\left(\frac{a}{t}\right)\Big/F\left(\frac{a}{t}\right) \tag{7-190}$$

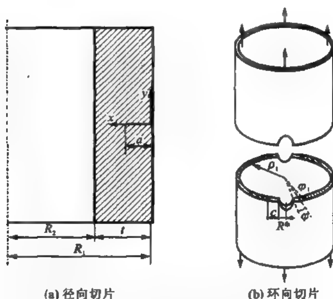


图 7-20 含孔边角裂纹受拉圆管的径向与环向切片

考虑裂纹前沿应力强度因子与位移的关系,可得

$$f\left(\frac{a}{t}\right)=\eta\left(\frac{a}{t}\right)=K_{\mathrm{I}}/\sigma\sqrt{\pi a} \tag{7-191}$$

根据叠加原理,将板的远端载荷转化为裂纹表面载荷 $\sigma=\sigma_0 t(x)$,可采用能量释放率方法求出 $F(a/t)$,即



$$F\left(\frac{a}{t}\right)=\frac{\sqrt{2}\pi}{m_3}\int_0^1 \omega\left[f^2\left(\frac{a}{t}\omega\right)\right]\mathrm{d}\omega-4\left(\frac{m_1}{m_3}-1\right)f\left(\frac{a}{t}\right) \tag{7-192}$$

式中

$$m_1=\int_0^1\left(1-\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}}t(x)\mathrm{d}\frac{x}{a} \tag{7-193}$$

$$m_3=\int_0^1\left(1-\frac{x}{a}\right)^{\frac{3}{2}}t(x)\mathrm{d}\frac{x}{a} \tag{7-194}$$

2. 含孔边裂纹的环向切片

根据圣维南原理，假设在环向切片上没有径向位移，且不同环向切片的层间切应力主要集中在裂纹表面附近，则简化后的壳体基本微分方程与无体力的平面问题形式完全相同。于是，含孔边裂纹的环向切片可以看成含孔边裂纹平板，令裂纹张开位移为

$$\nu_2(\varphi)=\nu_{02}\left\{4\alpha_2\left(\frac{c}{R^*},\frac{2R^*}{\pi R_1}\right)\left(1-\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)^{\frac{1}{2}}+\left[1-4\alpha_2\left(\frac{c}{R^*},\frac{2R^*}{\pi R_1}\right)\left(1-\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)^{\frac{3}{2}}\right]\right\} \tag{7-195}$$

式中

$$\nu_{02}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sigma_0}{E}cF\left(\frac{c}{R^*},\frac{2R^*}{\pi R_1}\right) \tag{7-196}$$

$$\alpha_2\left(\frac{c}{R^*},\frac{2R^*}{\pi R_1}\right)=\frac{f\left(\frac{c}{R^*},\frac{2R^*}{\pi R_1}\right)}{F\left(\frac{c}{R^*},\frac{2R^*}{\pi R_1}\right)} \tag{7-197}$$

$$f\left(\frac{c}{R^*},\frac{2R^*}{\pi R_1}\right)=\frac{K_1}{\sqrt{\pi c}} \tag{7-198}$$

根据叠加原理，将板的远端载荷转化为裂纹表面载荷 $\sigma(z)=\sigma_0 t(z)$，可采用能量释放率方法求出 F，即

$$F\left(\frac{c}{R^*},\frac{2R^*}{\pi R_1}\right)=\frac{\sqrt{2}\pi}{m_3}\int_0^1 \omega\left[f^2\left(\frac{c}{R^*}\omega,\frac{2R^*}{\pi R_1}\right)\right]\mathrm{d}\omega-4\left(\frac{m_1}{m_3}-1\right)f\left(\frac{c}{R^*},\frac{2R^*}{\pi R_1}\right) \tag{7-199}$$

式中

$$m_1 = \int_0^1 \left(1 - \frac{z}{c}\right)^{\frac{1}{2}} t(z) \mathrm{d}\,\frac{z}{c}, \qquad m_3 = \int_0^1 \left(1 - \frac{z}{c}\right)^{\frac{3}{2}} t(z) \mathrm{d}\,\frac{z}{c} \tag{7-200}$$

同理，含表面裂纹的环向切片可以看成含表面裂纹平板，见7.2.4节。

3. 三维裂纹张开位移模态

假设三维裂纹径向、环向截面的模态分别与具有相同几何形状与载荷分布的二维穿透裂纹张开位移的模态相同。根据以上假设，并使径向、环向裂纹张开位移及导数沿 x 轴、z 轴与裂纹前沿互相协调，经过任一点 $A(\rho_0,\varphi_0)$ 的径向、环向截面（见图7-16和图7-17）裂纹张开位移分别为

$$\nu_1(\rho,\varphi_0) = \nu_0 h_1(\rho,\varphi_0), \qquad \nu_2(\rho_0,\varphi) = \nu_0 h_2(\rho_0,\varphi) \tag{7-201}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}
h_1(\rho,\varphi_0) = {} & \left\{4\alpha_1\left(\frac{a'}{t}\right)\left(1 - \frac{R_1-\rho}{R_1-\rho_1}\right)^{\frac{1}{2}} + \right. \\
& \left.\left[1 - 4\alpha_1\left(\frac{a'}{t}\right)\right]\left(1 - \frac{R_1-\rho}{R_1-\rho_1}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}\cdot \\
& \left\{4\alpha_2\left(\frac{c}{R^*},\frac{2R^*}{\pi R_1}\right)\left(1 - \frac{\varphi_0}{\varphi_{10}}\right)^{\frac{1}{2}} + \right. \\
& \left.\left[1 - 4\alpha_2\left(\frac{c}{R^*},\frac{2R^*}{\pi R_1}\right)\right]\left(1 - \frac{\varphi_0}{\varphi_{10}}\right)^{\frac{3}{2}}\right\} \\
h_2(\rho_0,\varphi) = {} & \left\{4\alpha_1\left(\frac{a}{t}\right)\left(1 - \frac{R_1-\rho_0}{a}\right)^{\frac{1}{2}} + \right. \\
& \left.\left[1 - 4\alpha_1\left(\frac{a}{t}\right)\right]\left(1 - \frac{R_1-\rho_0}{a}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}\cdot \\
& \left\{4\alpha_2\left(\frac{c'}{R^*},\frac{2R^*}{\pi R_1}\right)\left(1 - \frac{\varphi}{\varphi_1}\right)^{\frac{1}{2}} + \right. \\
& \left.\left[1 - 4\alpha_2\left(\frac{c'}{R^*},\frac{2R^*}{\pi R_1}\right)\right]\left(1 - \frac{\varphi}{\varphi_1}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}
\end{aligned}\right\} \tag{7-202}$$



因此，在裂纹前沿邻域，由式(7－153)可知

$$H(\rho,\varphi) = h_1^2(\rho,\varphi_1) + h_2^2(\rho_1,\varphi) \qquad (7-203)$$

且在裂纹内部，有

$$h(\rho,\varphi) = [h_1(\rho,\varphi) + h_2(\rho,\varphi)]/2 \qquad (7-204)$$

继而由式(7－165)、式(7－166)与式(7－168)确定 I,J,B，并由式(7－182)或(7－183)确定 ν_0，再由式(7－156)确定 K_I。

7.4.5 典型算例

应用以上所述原理，只需少量机时即可获得含孔边裂纹或表面裂纹圆管应力强度因子大量系统的结果，图7－21至图7－23分别给出了圆管受均匀载荷及钉载情况下的部分结果。虽然未找到其他结果进行对比验证，本方法可退化为平板孔边角裂纹情况。由7.2.4节可知，本方法结果与Newman有限元法所得结果基本吻合。

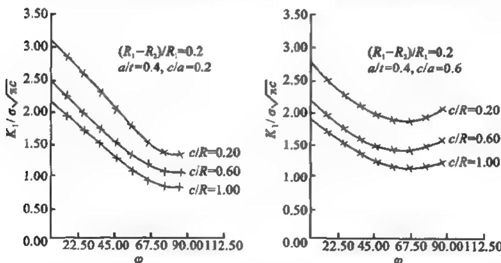


图7－21 圆管孔边角裂纹的应力强度因子(受远方均匀分布载荷)

本章所提供的三维张开型应力强度因子能量差率闭合解法具有计算效率高、适用范围广的优点。本书作者已采用本方法获得了具有工程应用价值的系统结果，由于篇幅所限，未能一一列举，

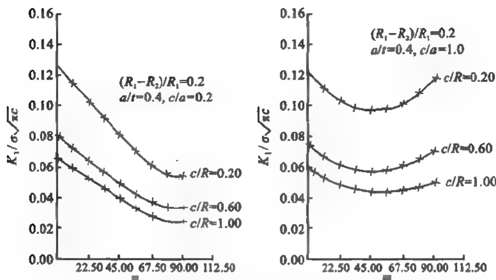


图 7-22 圆管孔边角裂纹的应力强度因子(孔边受正弦分布载荷)

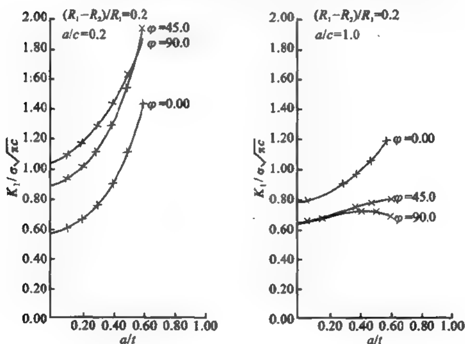


图 7-23 圆管表面裂纹的应力强度因子(受远方均匀分布载荷)



可查阅相关的论文，如含偏轴裂纹的三维有限大体情况的应力强度因子能量差率法封闭解，可见参考文献[7.2]。所得部分结果已被应力强度因子手册[7.3]采用。

参考文献

[7.1] NEWMAN J C, RAJU I S. Stress Intensity Factor Equations for Cracks in Three Dimensional Finite Bodies. Fracture Mechanics Vol. I: Theory and Analysis, ASTM STP 791, 1983: 238-269.

[7.2] 王奇志，张行. 含偏轴裂纹的三维有限大体应力强度因子能量差率法封闭解. 航空学报，1996，17(7)：90-93.

[7.3] 中国航空研究院主编. 应力强度因子手册. 增订版. 北京：科学出版社，1993.

[7.4] 张行. 断裂力学中应力强度因子的解法. 北京：国防工业出版社，1992.

[7.5] 王奇志，张行. 含非对称裂纹的三维有限大体应力强度因子能量释放率方法的封闭解. 航空学报，1989，10(12)：614-622.

[7.6] CHEN ZHIGANG, ZHANG XING. A Closed Form Solution of Stress Intensity Factors for Cracks in Three Dimensional Bodies by Energy Release Rate Method. Engineering Fracture Mechanics, 1989, 32(3): 419-441.

[7.7] WANG QIZHI, ZHANG XING, LIU YI. A Closed Form Solution of Stress Intensity Factors for Three Dimensional Bodies with Biaxial Eccentric Cracks. Engineering Fracture Mechanics, 1990, 36(4): 859-888.

[7.8] WANG QIZHI, ZHANG XING, HE QINGZHI, et al. A Closed Form Solution about Stress Intensity Factors of Shear Modes for 3-D Finite Bodies with Cracks by Energy Release Rate Method. Chinese Journal of Solid Mechanics, 1991, 4(1).

[7.9] TADA H, PARIS P C, IRWIN G R. The Stress Analysis of Cracks Handbook. Del Research Corporation, 1973.

[7.10] PARMERTER R R. Stress Intensity Factors for three dimensional Problems. AD A0250802, 1976.

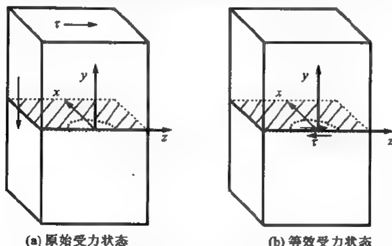
第8章　三维应力强度因子能量差率闭合解法——剪切型裂纹

部分穿透厚度的剪切型裂纹在工程上也是很常见的。对于这种Ⅱ，Ⅲ复合型情况，目前只有很少量的应力强度因子解。在第7章中，介绍了半解析-半工程的能量差率解法，导出了非穿透裂纹板Ⅰ型应力强度因子封闭解。本章将发展这种方法，以解决工程中常见的含非穿透裂纹板的Ⅱ，Ⅲ复合型应力强度因子问题。

假定在物体内含有一个椭圆形裂纹，在远离裂纹处物体受到均匀切应力τ的作用，如图8-1(a)所示。将这一问题看成以下两种情况的叠加：

其一是在远离裂纹处受到均匀切应力τ的作用，而在裂纹表面上作用着约束力的情况，该约束力与无裂纹时该处的应力相同。显然，该情况相当于无裂纹体受应力τ的作用。

其二是仅在裂纹表面上作用着松弛力的情况，该松弛力与上



(a) 原始受力状态　　(b) 等效受力状态

图8-1　含剪切型椭圆裂纹的有限大体受力状态的等效转换



述约束力大小相等，方向相反。

据此，问题转化为求当裂纹表面受切应力时的应力强度因子，如图 8-1(b)所示。

为简单起见，这里假定裂纹是椭圆形的，对于非椭圆形裂纹，可用完全类似的办法求解。

8.1 含全椭圆剪切型裂纹无限大体应力强度因子能量差率闭合解法

8.1.1 裂纹表面位移与三维应力强度因子

对于在椭圆裂纹表面承受均布 z 方向剪切载荷 τ 的无限大体，假定裂纹表面 z 方向剪切位移 w 具有椭球形分布规律，即

$$w(x,z)=w_0\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}} \tag{8-1}$$

式中，w_0 为裂纹表面中心处的最大位移。令裂纹前沿任意点 $P(x_1,z_1)$的法线方向与 z 轴夹角为 ψ，则椭圆参数方程为

$$x_1=a\sin\varphi,\qquad z_1=c\cos\varphi \tag{8-2}$$

φ 是椭圆裂纹的参数角，则

$$\left.\begin{aligned}\sin\psi&=\frac{c\sin\varphi}{\sqrt{c^2\sin^2\varphi+a^2\cos^2\varphi}}\\ \cos\psi&=\frac{a\cos\varphi}{\sqrt{c^2\sin^2\varphi+a^2\cos^2\varphi}}\end{aligned}\right\} \tag{8-3}$$

如图 8-2 所示，在裂纹前沿内法线方向上，距裂纹前沿 $P(x_1,z_1)$点为 r 的一点坐标为

$$\left.\begin{aligned}x&=x_1-r\sin\psi\\ z&=z_1-r\cos\psi\end{aligned}\right\} \tag{8-4}$$



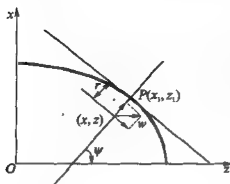


图 8-2 椭圆裂纹前沿法线的几何表示

将上式代入式(8-1)，并考虑到在 P 点邻域 r/a，r/c 为小量，略去高阶小量后，可得裂纹前沿邻域裂纹表面位移如下：

$$w=\sqrt{2}w_0\sqrt{\frac{x_1}{a^2}r\sin\psi+\frac{z_1}{c^2}r\cos\psi} \tag{8-5}$$

将式(8-2)与式(8-3)代入上式，可得

$$w^2=w_0^2\frac{2r}{ac}\sqrt{a^2\cos^2\varphi+c^2\sin^2\varphi} \tag{8-6}$$

距裂纹前沿 $P(x_1,z_1)$ 点的法线方向上截取一个无限薄片，该薄片含穿透裂纹，假定该薄片处于平面应变状态。其裂纹纵向剪切位移可分为两个分量：平面剪切位移 $w\cos\psi$ 及反平面剪切位移 $w\sin\psi$。与第 7 章相似，容易证明这两个分量在裂纹前沿 $P(x_1,z_1)$ 点邻域的表面位移与应力强度因子具有如下关系：

$$K_{\text{II}}^2=\frac{\pi}{4}\left(\frac{E}{1-\nu^2}\right)^2\frac{w_0^2}{ac}\sqrt{a^2\cos^2\varphi+c^2\sin^2\varphi}\cos^2\psi \tag{8-7}$$

$$K_{\text{III}}^2=\pi\mu^2\frac{w_0^2}{ac}\sqrt{a^2\cos^2\varphi+c^2\sin^2\varphi}\sin^2\psi \tag{8-8}$$

总位能差率为

$$G=\frac{1-\nu^2}{E}K_{\text{II}}^2+\frac{1}{\mu}K_{\text{III}}^2=$$

$$\frac{\pi}{4}\left(\frac{E}{1-\nu^2}\right)\frac{w_0^2}{ac}\sqrt{a^2\cos^2\varphi+c^2\sin^2\varphi}\cos^2\psi+$$

$$\pi\mu\frac{w_0^2}{ac}\sqrt{a^2\cos^2\varphi+c^2\sin^2\varphi}\sin^2\psi \tag{8-9}$$



因此，只要确定了 w_0，即可得到 K_{II} 与 K_{III}。

8.1.2　广义裂纹表面位移幅值的基本微分方程式

为确定 w_0，假定在裂纹扩展过程中，裂纹前沿的半短轴与半长轴的扩展是按比例的，如图 7-3 所示。

$$\mathrm{d}a = a\mathrm{d}g,\qquad \mathrm{d}c = c\mathrm{d}g \tag{8-10}$$

根据投影原理，在这种情况下法向切片的裂纹扩展量为

$$\mathrm{d}r = \mathrm{d}a\sin\varphi\sin\psi + \mathrm{d}c\cos\psi\cos\psi \tag{8-11}$$

裂纹前沿 $P(x_1, z_1)$ 点与 $P(x_1+\mathrm{d}x_1, z_1+\mathrm{d}z_1)$ 点间的弧长为

$$\mathrm{d}s = \sqrt{c^2\sin^2\varphi + a^2\cos^2\varphi} \tag{8-12}$$

总位能差率等于各无限薄法向切片总位能差率的积分，即

$$G = \frac{\pi}{4}\left(\frac{E}{1-\nu^2}\right)\frac{w_0^2}{ac}\sqrt{a^2\cos^2\varphi + c^2\sin^2\varphi}\cos^2\psi + \frac{\pi}{2}\left(\frac{E}{2+2\nu}\right)\frac{w_0^2}{ac}\sqrt{a^2\cos^2\varphi + c^2\sin^2\varphi}\sin^2\psi \tag{8-13}$$

$$\mathrm{d}\Pi = -\int_s G\mathrm{d}r\mathrm{d}s = -\pi\frac{E}{1-\nu^2}\mathrm{d}\Phi w_0^2\mathrm{d}g \tag{8-14}$$

式中

$$\Phi = \int_0^{\pi/2}\sqrt{\sin^2\varphi + \frac{a^2}{c^2}\cos^2\varphi}\,(1-\nu\sin^2\psi)\mathrm{d}\varphi \tag{8-15}$$

另一方面，对于线弹性体，总势能还可表示为

$$\Pi = -\int_A \tau w\mathrm{d}A = -\tau_0\int_A t(x,z)w(x,z)\mathrm{d}A = -\frac{2}{3}\pi\tau_0 acw_0 \tag{8-16}$$

将上式对 g 微分并与式(8-14)比较，可得到一个关于 w_0 的微分方程

$$\frac{\partial w_0}{\partial g} + 2w_0 = \frac{3}{2}\,\frac{E}{1-\nu^2}\,\frac{\Phi}{\sigma a}w_0^2 \tag{8-17}$$



8.1.3 基本方程的封闭解法

式(8－17)为伯努利方程，则可得到 w_0 的解答

$$w_0 = 2\frac{\tau}{\Phi}\frac{1-\nu^2}{E}a \tag{8-18}$$

由式(8－18)、式(8－7)及式(8－8)，即可确定 K_{II}，K_{III} 如下：

$$K_{\mathrm{II}} = \frac{\tau}{\Phi}\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{a}{c}}\sqrt[4]{a^2\cos^2\varphi + c^2\sin^2\varphi}\cos\psi \tag{8-19}$$

$$K_{\mathrm{III}} = \frac{\tau}{\Phi}(1-\nu)\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{a}{c}}\sqrt[4]{a^2\cos^2\varphi + c^2\sin^2\varphi}\sin\psi \tag{8-20}$$

图 8－3 给出了本方法与势函数法所得结果的比较，本方法与势函数法[8.1]所得解重合。

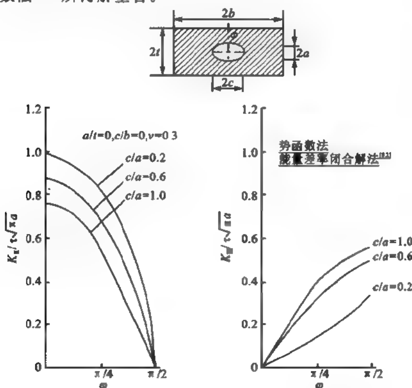


图 8－3 含深埋裂纹无限大体受均匀剪力时的应力强度因子



8.2　含剪切型裂纹三维有限大体应力强度因子能量差率闭合解法一般原理

根据叠加原理将剪力由远方变换到裂纹表面上，并沿裂纹主轴即 x 轴与 z 轴方向分解。只需讨论剪力沿 z 轴方向的情况（见图 8－1），而剪力沿 x 轴方向的情况可用完全类似的办法求解。

当剪力沿 z 轴方向时，假设裂纹表面位移也沿 z 轴方向。这里，仍然假定裂纹是椭圆形的。

8.2.1　裂纹表面位移与三维应力强度因子

对于含裂纹的有限大体（见图 8－4），将裂纹表面沿 z 轴方向的位移 w 写为如下形式：

$$w(x,z)=w_0h(x,z),\qquad w^2(x,z)=w_0^2H(x,z) \tag{8-21}$$

式中，h 与 H 为裂纹表面位移模态函数及其平方；w_0 为原点处的位移幅值，即广义位移。

在裂纹前沿 $P(x_1,z_1)$ 点（见图 8－4(a)），将 $w^2(x,z)$ 展开为泰勒级数，略去高次项，可得

$$w^2(x,z)=w_0^2\left[\frac{\partial H}{\partial x}\bigg|_P(x-x_1)+\frac{\partial H}{\partial z}\bigg|_P(z-z_1)\right]=w^2(x,z_1)+w^2(x_1,z) \tag{8-22}$$

$$\left.\begin{aligned}w^2(x,z_1)&=w_0^2\frac{\partial H}{\partial x}\bigg|_P(x-x_1)\\w^2(x_1,z)&=w_0^2\frac{\partial H}{\partial z}\bigg|_P(z-z_1)\end{aligned}\right\} \tag{8-23}$$



式中 $w(x,z_1)$，$w(x_1,z)$ 分别为点 $P(x_1,z_1)$ 附近点 (x,z_1) 与 (x_1,z) 的裂纹剪切位移，上式可称为裂纹表面位移的勾股定理。

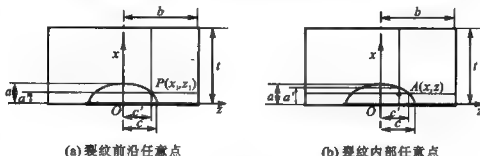


图 8-4　三维有限大体含对称非穿透裂纹的截面

引入任意法向切片，如图 8-2 所示。其裂纹纵向剪切位移可分为两个分量：平面剪切位移 $w\cos\psi$ 及反平面剪切位移 $w\sin\psi$。这两个分量在裂纹前沿 $P(x_1,z_1)$ 点邻域的表面位移可由相应的应力强度因子表示如下：

$$w^2(x,z)\cos^2\psi = \frac{8}{\pi}\frac{K_{\mathrm{II}}^2}{E_n^2}r, \qquad w^2(x,z)\sin^2\psi = \frac{8}{\pi}\frac{K_{\mathrm{III}}^2}{\mu^2}r \tag{8-24}$$

式中，E_n 为杨氏弹性模量；μ 为剪切弹性模量；K_{II} 与 K_{III} 分别为Ⅱ型与Ⅲ型应力强度因子。

$$\left.\begin{aligned} E_n &= E+(E_1-E)f(\psi) \\ E_1 &= E/(1-\nu^2) \\ f(\psi) &\in [0,1] \end{aligned}\right\} \tag{8-25}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{8-26}$$

由式(8-21)与式(8-22)及式(8-24)，可得

$$K_{\mathrm{II}}^2 = \frac{\pi}{8}E_n^2 w_0^2 \lim_{r\to 0}\frac{1}{r}[H(x,z_1)+H(x_1,z)]\cos^2\psi =$$

$$-\frac{\pi}{8}E_n^2 w_0^2\left(\left.\frac{\partial H}{\partial x}\right|_P \sin\psi + \left.\frac{\partial H}{\partial z}\right|_P \cos\psi\right)\cos^2\psi \tag{8-27}$$



$$K_{\mathrm{III}}^2 = \frac{\pi}{2}\mu^2 w_0^2 \lim_{r\to 0}\frac{1}{r}[H(x,z_1)+H(x_1,z)]\sin^2\psi =$$

$$-\frac{\pi}{2}\mu^2 w_0^2\left(\frac{\partial H}{\partial x}\bigg|_p \sin\psi + \frac{\partial H}{\partial z}\bigg|_p \cos\psi\right)\sin^2\psi \quad (8-28)$$

因此,只要确定了 w_0 与 $H(x,z)$,即可得到 K_{II},K_{III}。

8.2.2　广义裂纹表面位移幅值的基本微分方程式

为确定 w_0,首先考虑裂纹扩展过程中总位能 Π 的增量 $\mathrm{d}\Pi$。假设裂纹按比例扩展(如图 7-3 所示),即

$$\mathrm{d}a = a\mathrm{d}g, \quad \mathrm{d}c = c\mathrm{d}g \quad (8-29)$$

在这种情况下的总位能差率等于各无限薄法向切片总位能差率的积分,即

$$\mathrm{d}\Pi = -\int_s G\mathrm{d}r\mathrm{d}s = -\left[\frac{\pi}{8}E_1 acw_0^2\left(\frac{I^*}{a}+\frac{J^*}{c}\right)+\frac{\pi}{4}\mu acw_0^2\left(\frac{I^{**}}{a}+\frac{J^{**}}{c}\right)\right]\mathrm{d}g \quad (8-30)$$

式中,G 为裂纹前沿单位厚度法向切片能量差率;$\mathrm{d}r$ 为该切片的裂纹扩展量;$\mathrm{d}s$ 为该切片裂纹前沿处的厚度。同时,有

$$\left.\begin{aligned}
I^* &= a\int \frac{E_n}{E_1}\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}H(x,z_1)\cos^2\psi\mathrm{d}\varphi \\
J^* &= c\int \frac{E_n}{E_1}\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}H(x_1,z)\cos^2\psi\mathrm{d}\varphi \\
I^{**} &= a\int \lim_{r\to 0}\frac{1}{r}H(x,z_1)\sin^2\psi\mathrm{d}\varphi \\
J^{**} &= c\int \lim_{r\to 0}\frac{1}{r}H(x_1,z)\sin^2\psi\mathrm{d}\varphi
\end{aligned}\right\} \quad (8-31)$$

式中,φ 为椭圆裂纹的参数角。

而另一方面根据叠加原理,可将板的远端载荷转移至裂纹表面,并将总势能表示为

$$\Pi = -\int_A \tau w\mathrm{d}A = -\tau_0\int_A t(x,z)w(x,z)\mathrm{d}A = -\tau_0\pi acw_0 B \quad (8-32)$$



式中，A 为裂纹面积；τ 为裂纹表面的载荷；$t(x,z)$ 为其分布函数；τ_0 为载荷幅值，即广义力。同时，有

$$B=\frac{1}{\pi ac}\int t(x,z)h(x,z)\mathrm{d}A \tag{8-33}$$

将式(8-32)对 g 微分并与式(8-30)比较，可得到一个关于 w_0 的伯努利微分方程

$$\frac{\partial w_0}{\partial g}+\left(2+\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial g}\right)w_0=\left[\frac{E_1}{8\tau_0 B}\left(\frac{I^*}{a}+\frac{J^*}{c}\right)+\frac{\mu}{4\tau_0 B}\left(\frac{I^{**}}{a}+\frac{J^{**}}{c}\right)\right]w_0^2 \tag{8-34}$$

8.2.3 基本方程的封闭解法

式(8-34)的通解为

$$\frac{1}{w_0}=\mathrm{e}^{2g}B\left[-\frac{1}{8\tau_0}\int_0^g\frac{1}{B^2}\left(\frac{E_1I^*+2\mu I^{**}}{a}+\frac{E_1J^*+2\mu J^{**}}{c}\right)\mathrm{e}^{-2g^*}\mathrm{d}g^*+\left(\frac{1}{w_0B}\right)\bigg|_{g=0}\right] \tag{8-35}$$

以下探讨进一步简化 w_0 的封闭解答。令 a/t 与 c/b 不变，考虑两种极端情况。

(1) $a/c\to0$

$$\left(\frac{1}{w_0B}\right)\bigg|_{a/c\to0}=\mathrm{e}^{2g}\left[-\frac{\mu}{4\tau_0}\int_0^g\left(\frac{I^{**}}{B^2}\right)\bigg|_{a/c\to0}\frac{\mathrm{e}^{2g^*}}{a}\mathrm{d}g^*+\left(\frac{1}{w_0B}\right)\bigg|_{g=0,a/c\to0}\right] \tag{8-36}$$

裂纹可看作沿宽度方向穿透的二维裂纹，令

$$L_1=\frac{1}{w_0}\frac{\mathrm{d}w_0}{\mathrm{d}g}\bigg|_{a/c\to0} \tag{8-37}$$



$$w_0\big|_{a/c\to 0}=\frac{4\tau_0 a}{\mu I^{**}\big|_{a/c\to 0}}\left[(2+L_1)B+\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}g}\right] \tag{8-38}$$

(2) $c/a\to 0$

$$\left(\frac{1}{w_0 B}\right)\bigg|_{c/a\to 0}=\mathrm{e}^{2g}\left[-\frac{E_1}{8\tau_0}\int_0^g\left(\frac{J^*}{B^2}\right)\bigg|_{c/a\to 0}\frac{\mathrm{e}^{-2g^*}}{c}\mathrm{d}g^*+\left(\frac{1}{w_0 B}\right)\bigg|_{g=0,c/a\to 0}\right] \tag{8-39}$$

裂纹可看作沿厚度方向穿透的二维裂纹，令

$$L_2=\frac{1}{w_0}\frac{\mathrm{d}w_0}{\mathrm{d}g}\bigg|_{c/a\to 0} \tag{8-40}$$

则

$$w_0\big|_{c/a\to 0}=\frac{8\tau_0 c}{E_1 J^*\big|_{c/a\to 0}}\left[(2+L_2)B+\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}g}\right] \tag{8-41}$$

然后对于任意 a/c 值，进行变量分离如下：

$$\left.\begin{aligned}\frac{E_1 I^*+2\mu I^{**}}{B^2}&=m\left(\frac{a}{c},\frac{t}{b}\right)\left(\frac{2\mu I^{**}}{B^2}\right)\bigg|_{a/c\to 0}\\ \frac{E_1 J^*+2\mu J^{**}}{B^2}&=n\left(\frac{c}{a},\frac{b}{t}\right)\left(\frac{E_1 J^*}{B^2}\right)\bigg|_{c/a\to 0}\end{aligned}\right\} \tag{8-42}$$

将式(8-42)代入式(8-35)，与式(8-36)及式(8-39)比较，并考虑到 w_0 为状态函数，与 g 无关，有

$$\frac{1}{w_0 B}=\frac{m\left(\frac{a}{c},\frac{t}{b}\right)}{(w_0 B)\big|_{a/c\to 0}}+\frac{n\left(\frac{c}{a},\frac{b}{t}\right)}{(w_0 B)\big|_{c/a\to 0}} \tag{8-43}$$

将式(8-38)、式(8-41)代入式(8-43)，可得

$$\frac{1}{w_0}=\frac{1}{8\tau_0}\frac{E_1 I^*+2\mu I^{**}}{a\left[(2+L_1)B+\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}g}\right]}+\frac{1}{8\tau_0}\frac{E_1 J^*+2\mu J^{**}}{c\left[(2+L_2)B+\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}g}\right]} \tag{8-44}$$

上式计算较简单。但若要求更高精度，也可以对任意 a/c 值按下式进行变量分离，即

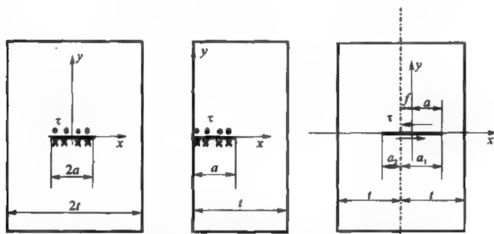
$$\frac{E_1 I^* + 2\mu I^{**}}{B^2} + \frac{a}{c}\frac{E_1 J^* + 2\mu J^{**}}{B^2} =$$

$$m\left(\frac{a}{c},\frac{t}{b}\right)\left(\frac{2\mu I^{**}}{B^2}\right)\bigg|_{a/c\to 0} + \frac{a}{c}n\left(\frac{c}{a},\frac{b}{t}\right)\left(\frac{E_1 J^*}{B^2}\right)\bigg|_{c/a\to 0} \tag{8-45}$$

式中，$m\left(\frac{a}{c},\frac{t}{R^*}\right)$与$n\left(\frac{c}{a},\frac{R^*}{t}\right)$可由最小二乘方法确定。分别求出$w_0|_{a/c\to 0}$与$w_0|_{c/a\to 0}$，代入式(8-43)即可求出$w_0$。

8.2.4 裂纹表面位移模态

为了构造三维裂纹表面位移模态，首先考虑二维裂纹表面位移(见图 8-5)。



(a) 反平面剪切型内部裂纹　(b) 反平面剪切型边缘裂纹　(c) 平面剪切型内部裂纹

图 8-5　含二维剪切型裂纹板

与张开型裂纹情况类似，若已知图 8-5(a)，(b)情况下的应力强度因子

$$K_{Ⅲ} = \eta\left(\frac{a}{t}\right)\tau_0\sqrt{\pi a} \tag{8-46}$$

可用能量释放率方法确定图 8-5(a)，(b)情况下的裂纹剪切位移



$$w = w_0 h\left(\frac{a}{t},\frac{x}{a}\right) = w_0\left\{2\alpha\left(\frac{a}{t}\right)\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left[1-2\alpha\left(\frac{a}{t}\right)\right]\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right\} \tag{8-47}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha\left(\frac{a}{t}\right) = \eta\left(\frac{a}{t}\right)\Big/F\left(\frac{a}{t}\right)\\
&F\left(\frac{a}{t}\right) = \frac{\pi}{2m_3}\int_0^1 \omega\eta^2\left(\frac{a}{t}\omega\right)\mathrm{d}\omega - \left(\frac{m_1}{m_3}-1\right)2\eta\left(\frac{a}{t}\right)\\
&m_1 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} t(x)\mathrm{d}\,\frac{x}{a},\ m_3 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}} t(x)\mathrm{d}\,\frac{x}{a}
\end{aligned}\right\} \tag{8-48}$$

且

$$w_0 = \frac{\tau_0}{E}aF\left(\frac{a}{t}\right),\qquad \mathrm{d}w_0 = L\,\frac{w_0}{a}\mathrm{d}a,\qquad L = 1+\left[\frac{F'\left(\frac{a}{t}\right)}{F\left(\frac{a}{t}\right)}\right]\frac{a}{t} \tag{8-49}$$

若已知图 8－5(c)情况下的应力强度因子

$$K_{\mathrm{II R}} = \eta_{\mathrm{R}}\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right)\tau_0\sqrt{\pi a},\qquad K_{\mathrm{II L}} = \eta_{\mathrm{L}}\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right)\tau_0\sqrt{\pi a} \tag{8-50}$$

则可用能量释放率方法确定图 8－5(c)情况下的裂纹剪切位移

$$w = w_{01}\left\{2\alpha\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right)\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left[1-2\alpha\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right)\right]\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right\} + w_{02}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{x}{a} \tag{8-51}$$

式中



$$\left.\begin{aligned}
&\alpha\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right)-\left[\eta_R\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right)+\eta_L\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right)\right]\Big/2F\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right)\\
&F\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right)=\frac{\pi}{2m_3}\int_0^1\omega\Big[\eta_L^2\left(\frac{a}{t}\omega+\frac{f}{t},\frac{a}{t}\omega-\frac{f}{t}\right)+\\
&\qquad\eta_R^2\left(\frac{a}{t}\omega+\frac{f}{t},\frac{a}{t}\omega-\frac{f}{t}\right)\Big]\mathrm{d}\omega-\\
&\qquad\left(\frac{m_1}{m_3}-1\right)2f\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right)-\frac{n_1}{m_3}2h\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right)
\end{aligned}\right\}\tag{8-52}$$

且

$$\left.\begin{aligned}
&w_{01}=\frac{\tau_0}{E}aF\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right),\\
&w_{02}=w_{01}\left[\eta_R\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right)-\eta_L\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right)\right]\Big/F\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right)\\
&\mathrm{d}w_{01}=L\frac{w_{01}}{a}\mathrm{d}a,\\
&L=1+a\left[\frac{\mathrm{d}F\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right)}{\mathrm{d}a}\right]\Big/F\left(\frac{a_1}{t},\frac{a_2}{t}\right)
\end{aligned}\right\}\tag{8-53}$$

假设三维问题中横、纵截面裂纹表面位移与二维问题中具有相同几何形状与载荷分布的平板裂纹表面位移的模态相同。根据以上假设，并使横、纵切片裂纹表面位移及导数沿 x 轴、z 轴与裂纹前沿互相协调，则经过如图 8-4(b)所示任一点 $A(x,z)$ 的横、纵截面裂纹表面位移为

$$w_1(x,z)=w_0h_1(x,z)\tag{8-54}$$

$$w_2(x,z)=w_0h_2(x,z)\tag{8-55}$$



式中

$$h_1(z,x)=\left\{2\alpha_1\left(\frac{a'}{t}\right)\left[1-\left(\frac{x}{a'}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}+\left[1-2\alpha_1\left(\frac{a'}{t}\right)\right]\left[1-\left(\frac{x}{a'}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}\right\}\cdot\left\{2\alpha_2\left(\frac{c}{b}\right)\left[1-\left(\frac{z}{c}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}+\left[1-2\alpha_2\left(\frac{c}{b}\right)\right]\left[1-\left(\frac{z}{c}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}\right\}\quad(8-56)$$

$$h_2(x,z)=\left\{2\alpha_1\left(\frac{a}{t}\right)\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}+\left[1-2\alpha_1\left(\frac{a}{t}\right)\right]\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}\right\}\cdot\left\{2\alpha_2\left(\frac{c'}{b}\right)\left[1-\left(\frac{z}{c'}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}+\left[1-2\alpha_2\left(\frac{c'}{b}\right)\right]\left[1-\left(\frac{z}{c'}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\}\quad(8-57)$$

因此，在裂纹前沿邻域，由式(8-22)可知

$$H(x,z)=h_1^2(z_1,x)+h_2^2(x_1,z)\quad(8-58)$$

且在裂纹内部，有

$$h(x,z)=[h_1(z,x)+h_2(x,z)]/2\quad(8-59)$$

继而由式(8-31)与式(8-33)确定 I,J,B，并由式(8-44)与式(8-27)、式(8-28)确定 w_0 与 $K_{\mathrm{II}},K_{\mathrm{III}}$。

8.2.5 典型算例

图 8-6 给出了本方法与交替迭代法所得结果的比较。本方法与现有少量结果符合得很好。



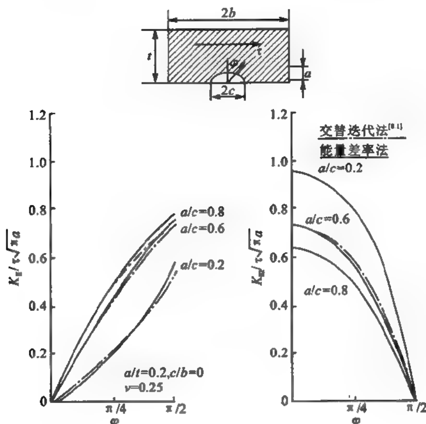


图 8-6　含表面半椭圆裂纹板受均匀剪力时能量差率法与交替迭代法结果比较

8.3　含偏心裂纹三维有限大体应力强度因子能量差率闭合解法

8.3.1　裂纹表面位移与三维应力强度因子

对于含偏心裂纹的有限大板(见图 7-11),将裂纹表面沿 z



轴方向的位移 w 分解成关于 z 轴对称与反对称的形式,即

$$w(x,z) = w_{0i}h_i(x,z) \qquad (i=1,2) \tag{8-60}$$

$$w^2(x,z) = w_{0i}w_{0j}H_{ij}(x,z) \qquad (i,j=1,2) \tag{8-61}$$

式中,h_1 与 h_2 分别为关于 z 轴对称与反对称裂纹剪切位移模态函数,w_{01} 与 w_{02} 分别为相应的位移幅值,即广义位移。

在裂纹前沿 $P(x_1,z_1)$ 点,将 $w^2(x,z)$ 展开为泰勒级数,略去高次项,可得

$$w^2(x,z) = w_{0i}w_{0j}\left[\frac{\partial H_{ij}}{\partial x}\bigg|_P (x-x_1) + \frac{\partial H_{ij}}{\partial z}\bigg|_P (z-z_1)\right] =$$

$$w^2(x,z_1) + w^2(x_1,z) \tag{8-62}$$

式中,$w(x,z_1)$,$w(x_1,z)$分别为过点 $P(x_1,z_1)$横向及纵向截面的裂纹剪切位移。上式可称为裂纹表面位移的勾股定理。

引入任意法向切片,其裂纹纵向剪切位移可分为两个分量:平面剪切位移 $w\cos\psi$ 及反平面剪切位移 $w\sin\psi$。这两个分量在裂纹前沿 $P(x_1,z_1)$点邻域的表面位移可由相应的应力强度因子表示如下:

$$w^2(x,z)\cos^2\psi = \frac{8}{\pi}\frac{K_{\mathrm{II}}^2}{E_n^2}r, \qquad w^2(x,z)\sin^2\psi = \frac{8}{\pi}\frac{K_{\mathrm{III}}^2}{\mu^2}r \tag{8-63}$$

式中,E_n 为广义杨氏弹性模量;μ 为剪切弹性模量;K_{II} 与 K_{III} 分别为Ⅱ型与Ⅲ型应力强度因子。

由式(8-61)与式(8-62)及式(8-63),可得

$$\left.\begin{aligned} K_{\mathrm{II}}^2 &= \frac{\pi}{8}E_n^2 w_{0i}w_{0j}\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}[H_{ij}(x,z_1)+H_{ij}(x_1,z)]\cos^2\psi \\ K_{\mathrm{III}}^2 &= \frac{\pi}{8}\mu^2 w_{0i}w_{0j}\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}[H_{ij}(x,z_1)+H_{ij}(x_1,z)]\sin^2\psi \end{aligned}\right\} \tag{8-64}$$

因此,只要确定了 w_{0i}与 $H_{ij}(x,z)$,即可得到 K_{II},K_{III}。

8.3.2 广义裂纹表面位移幅值的基本微分方程式

为确定 w_{0t}，引入两种虚裂纹扩展形式，如图 7－12 所示。

(1) 按比例扩展

$$\mathrm{d}a = a\mathrm{d}g_1, \qquad \mathrm{d}c = c\mathrm{d}g_1 \tag{8-65}$$

在这种情况下的总位能差率等于各无限薄法向切片总位能差率的积分，即

$$\mathrm{d}\Pi = -\int_{l} G\mathrm{d}r\mathrm{d}s = -\left[\frac{\pi}{8}E_1 acw_{0t}^2\left(\frac{I_t^*}{a}+\frac{J_t^*}{c}\right)+\frac{\pi}{4}\mu acw_{0t}^2\left(\frac{I_t^{**}}{a}+\frac{J_t^{**}}{c}\right)\right]\mathrm{d}g_1 \tag{8-66}$$

式中，G 为裂纹前沿单位厚度法向切片能量差率；$\mathrm{d}r$ 为该切片的裂纹扩展量，$\mathrm{d}s$ 为该切片裂纹前沿处的厚度。同时，有

$$\left.\begin{aligned}
I_t^* &= a\int \frac{E_n}{E_1}\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}H_y(x,z_1)\,|_{j=t}\cos^2\psi\mathrm{d}\varphi \\
J_t^* &= c\int \frac{E_n}{E_1}\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}H_y(x_1,z)\,|_{j=t}\cos^2\psi\mathrm{d}\varphi \\
I_t^{**} &= a\int \frac{E_n}{E_1}\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}H_y(x,z_1)\,|_{j=t}\sin^2\psi\mathrm{d}\varphi \\
J_t^{**} &= c\int \frac{E_n}{E_1}\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}H_y(x_1,z)\,|_{j=t}\sin^2\psi\mathrm{d}\varphi
\end{aligned}\right\} \tag{8-67}$$

式中，φ 为椭圆裂纹的参数角。

而另一方面根据叠加原理，可将板的远端载荷转移至裂纹表面，并将总势能表示为

$$\Pi = -\int_A \tau w\mathrm{d}A = -\tau_0\int_A t(x,z)w(x,z)\mathrm{d}A = -\tau_0\pi acw_{0t}B_t \tag{8-68}$$



式中,A 为裂纹面积;τ 为裂纹表面载荷;$t(x,z)$为其分布函数;τ_0 为载荷幅值,即广义力。同时

$$B_i = \frac{1}{\pi ac}\int t(x,z)h_i(x,z)\mathrm{d}A \tag{8-69}$$

将式(8-68)对 g_1 微分并与式(8-66)比较,且令

$$\xi = \frac{w_{01}}{w_{02}}, \qquad B = B_1 + \xi B_2 \tag{8-70}$$

$$\left.\begin{aligned} I &= I_1^* + \xi^2 I_2^* + \frac{2\mu}{E_1}(I_1^{**} + \xi^2 I_2^{**}) \\ J &= J_1^* + \xi^2 J_2^* + \frac{2\mu}{E_1}(J_1^{**} + \xi^2 J_2^{**}) \end{aligned}\right\} \tag{8-71}$$

可得到一个关于 w_{01} 的微分方程

$$\frac{\partial w_{01}}{\partial g_1} + \left(2 + \frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial g_1}\right)w_{01} = \frac{E_1}{8\tau_0 B}\left(\frac{I}{a} + \frac{J}{c}\right)w_{01}^2 \tag{8-72}$$

(2) 刚性平移

$$\mathrm{d}f = f\mathrm{d}g_2 \tag{8-73}$$

由于这种虚裂纹扩展形式下的总位能差率一方面等于各无限薄法向切片总位能差率的积分,而另一方面等于外力势能的变化率,可得到如下关于 w_{01} 的另一微分方程式

$$\frac{\partial w_{01}}{\partial g_2} + \left(\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial g_2}\right)w_{01} = \frac{E_1}{4\tau_0 B}\left(\frac{M}{a} + \frac{N}{c}\right)\left(\frac{f}{c}\right)w_{01}w_{02} \tag{8-74}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} M &= M^* + \frac{2\mu}{E_1}M^{**} \\ N &= N^* + \frac{2\mu}{E_1}N^{**} \end{aligned}\right\} \tag{8-75}$$

$$\left.\begin{aligned} M^{*} &= a\int \frac{E_n}{E_1}\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}H_{12}(x,z_1)\cos\varphi\cos^2\psi\mathrm{d}\varphi \\ M^{**} &= a\int \lim_{r\to 0}\frac{1}{r}H_{12}(x,z_1)\cos\varphi\sin^2\psi\mathrm{d}\varphi \\ N^{*} &= c\int \frac{E_n}{E_1}\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}H_{12}(x_1,z)\cos\varphi\cos^2\psi\mathrm{d}\varphi \\ N^{**} &= c\int \lim_{r\to 0}\frac{1}{r}H_{12}(x_1,z)\cos\varphi\sin^2\psi\mathrm{d}\varphi \end{aligned}\right\} \quad (8-76)$$

8.3.3 基本方程的封闭解法

以上得到了关于 w_{01} 与 w_{02} 的两个一阶非线性方程组式(8-72)与式(8-74)。应当指出，实际上 ξ 比 1 小一个数量级，从而 ξ^2 比 1 小两个数量级。在分析与计算中，可以取 $I=I_1$；对于受对称载荷的情况，$B=B_1$。因此式(8-72)可视为伯努利方程，则可得到 w_{01} 的解答，即

$$\frac{1}{w_{01}} = \mathrm{e}^{2g_1}B\left[-\frac{E_1}{8\tau_0}\int_0^{g_1}\frac{1}{B^2}\left(\frac{I}{a}+\frac{J}{c}\right)\mathrm{e}^{-2g_1^*}\,\mathrm{d}g_1^* + \left(\frac{1}{w_{01}B}\right)\Big|_{g_1=0}\right] \quad (8-77)$$

以下探讨进一步简化 w_{01} 的封闭解答。令 a/t 与 c/b 不变，考虑两种极端情况。

(1) $a/c\to 0$，$\theta\to 0$，裂纹可看作沿宽度方向穿透的二维裂纹

$$\left(\frac{1}{w_{01}B}\right)\Big|_{a/c\to 0} = \mathrm{e}^{2g_1}\left[-\frac{E_1}{8\tau_0 a}\int_0^{g_1}\left(\frac{I}{B^2}\right)\Big|_{a/c\to 0}\mathrm{e}^{-2g_1^*}\,\mathrm{d}g_1^* + \left(\frac{1}{w_{01}B}\right)\Big|_{g_1=0,a/c\to 0}\right] \quad (8-78)$$

(2) $c/a\to 0$，$\theta\to\pi/2$，裂纹可看作沿厚度方向穿透的二维裂纹

$$\left(\frac{1}{w_{01}B}\right)\Big|_{c/a\to 0} = \mathrm{e}^{2g_1}\left[-\frac{E_1}{8\tau_0 c}\int_0^{g_1}\left(\frac{J}{B^2}\right)\Big|_{c/a\to 0}\mathrm{e}^{-2g_1^*}\,\mathrm{d}g_1^* + \left(\frac{1}{w_{01}B}\right)\Big|_{g_1=0,c/a\to 0}\right] \quad (8-79)$$



然后对于任意 a/c 值，进行变量分离如下：

$$\frac{I+\frac{a}{c}J}{B^2}=m\left(\frac{a}{c},\frac{t}{b}\right)\left(\frac{I}{B^2}\right)\bigg|_{a/c\to 0}+n\left(\frac{c}{a},\frac{b}{t}\right)\frac{a}{c}\left(\frac{J}{B^2}\right)\bigg|_{c/a\to 0} \tag{8-80}$$

式中，$m\left(\frac{a}{c},\frac{t}{b}\right)$与$n\left(\frac{c}{a},\frac{b}{t}\right)$可由最小二乘方法确定。

将式(8－80)代入式(8－77)，与式(8－78)及式(8－79)比较，并考虑到 w_{01} 为状态函数，与 g_i 无关，有

$$\frac{1}{w_{01}B}=\frac{m\left(\frac{a}{c},\frac{t}{b}\right)}{(w_{01}B)\mid_{a/c\to 0}}+\frac{n\left(\frac{c}{a},\frac{b}{t}\right)}{(w_{01}B)\mid_{c/a\to 0}} \tag{8-81}$$

在由式(8－81)得到 w_{01} 的解答后，即可根据式(8－74)确定 ξ 如下：

$$\xi=\frac{w_{02}}{w_{01}}=\frac{-\frac{\partial}{\partial g_2}\left(\frac{1}{w_{01}B}\right)}{\frac{E_1}{4\tau_0 B^2}\left(\frac{M}{a}+\frac{N}{c}\right)\left(\frac{f}{c}\right)} \tag{8-82}$$

8.3.4　裂纹表面位移模态

假设三维问题中横、纵截面裂纹剪切位移的对称与反对称部分的模态，分别与二维问题中具有相同几何形状与载荷分布的平板裂纹表面位移的对称及反对称部分的模态相同。根据以上假设，并使横、纵切片裂纹表面位移及导数沿 x 轴、z 轴与裂纹前沿互相协调，则经过任一点(x,z)的横、纵截面裂纹表面位移为

$$w_1(x,z)=w_{0i}h_{1i}(x,z),\qquad w_2(x,z)=w_{0i}h_{2i}(x,z) \tag{8-83}$$

式中



$$\left.\begin{aligned}
h_{11}(z,x) = &\left\{n_1\alpha_1\left(\frac{a'}{t}\right)\left[\beta_1\left(\frac{x}{a'}\right)\right]^{\frac{1}{2}} + \right.\\
&\left.\left[1 - n_1\alpha_1\left(\frac{a'}{t}\right)\right]\left[\beta\left(\frac{x}{a'}\right)\right]^{\frac{3}{2}}\right\}\cdot\\
&\left\{n_2\alpha_2\left(\frac{c_1}{b},\frac{c_2}{b}\right)\left[\beta_2\left(\frac{z}{c}\right)\right]^{\frac{1}{2}} + \right.\\
&\left.\left[1 - n_2\alpha_2\left(\frac{c_1}{b},\frac{c_2}{b}\right)\right]\left[\beta\left(\frac{z}{c}\right)\right]^{\frac{3}{2}}\right\}\\
h_{12}(z,x) = &\left\{n_1\alpha_1\left(\frac{a'}{t}\right)\left[\beta_1\left(\frac{x}{a'}\right)\right]^{\frac{1}{2}} + \right.\\
&\left.\left[1 - n_1\alpha_1\left(\frac{a'}{t}\right)\right]\left[\beta\left(\frac{x}{a'}\right)\right]^{\frac{3}{2}}\right\}\cdot\\
&\left\{n_2\alpha_2\left(\frac{c_1}{b},\frac{c_2}{b}\right)\left[\beta_2\left(\frac{z}{c}\right)\right]^{\frac{1}{2}} + \right.\\
&\left.\left[1 - n_2\alpha_2\left(\frac{c_1}{b},\frac{c_2}{b}\right)\right]\left[\beta\left(\frac{z}{c}\right)\right]^{\frac{3}{2}}\right\}\left(\frac{z}{c}\right)
\end{aligned}\right\} \quad (8-84)$$

$$\left.\begin{aligned}
h_{21}(x,z) = &\left\{n_1\alpha_1\left(\frac{a}{t}\right)\left[\beta_1\left(\frac{x}{a}\right)\right]^{\frac{1}{2}} + \right.\\
&\left.\left[1 - n_1\alpha_1\left(\frac{a}{t}\right)\right]\left[\beta\left(\frac{x}{a}\right)\right]^{\frac{3}{2}}\right\}\cdot\\
&\left\{n_2\alpha_2\left(\frac{c_1'}{b},\frac{c_2'}{b}\right)\left[\beta_2\left(\frac{z}{c'}\right)\right]^{\frac{1}{2}} + \right.\\
&\left.\left[1 - n_2\alpha_2\left(\frac{c_1'}{b},\frac{c_2'}{b}\right)\right]\left[\beta\left(\frac{z}{c'}\right)\right]^{\frac{3}{2}}\right\}\\
h_{22}(x,z) = &\left\{n_1\alpha_1\left(\frac{a}{t}\right)\left[\beta_1\left(\frac{x}{a}\right)\right]^{\frac{1}{2}} + \right.\\
&\left.\left[1 - n_1\alpha_1\left(\frac{a}{t}\right)\right]\left[\beta\left(\frac{x}{a}\right)\right]^{\frac{3}{2}}\right\}\cdot\\
&\left\{n_2\alpha_2\left(\frac{c_1'}{b},\frac{c_2'}{b}\right)\left[\beta_2\left(\frac{z}{c'}\right)\right]^{\frac{1}{2}} + \right.\\
&\left.\left[1 - n_2\alpha_2\left(\frac{c_1'}{b},\frac{c_2'}{b}\right)\right]\left[\beta\left(\frac{z}{c'}\right)\right]^{\frac{3}{2}}\right\}\left(\frac{z}{c'}\right)
\end{aligned}\right\} \quad (8-85)$$



式中，$n_t=2$；$\beta_t(\bar{z})=1-\bar{z}^2$；$\alpha_t$ 的推导与张开型裂纹情况类似，见 8.2.4 节。

因此，在裂纹前沿邻域，由式(8－60)至式(8－62)可知

$$\left.\begin{aligned}H_{11}(x,z)&=h_{11}^2(z_1,x)+h_{21}^2(x_1,z)\\H_{22}(x,z)&=h_{12}^2(z_1,x)+h_{22}^2(x_1,z)\\H_{12}(x,z)&=h_{11}(z_1,x)h_{12}(z_1,x)+h_{21}(x_1,z)h_{22}(x_1,z)\end{aligned}\right\}\tag{8-86}$$

且在裂纹内部，有

$$h_i(x,z)=[h_{1i}(z,x)+h_{2i}(x,z)]/2\tag{8-87}$$

继而由式(8－67)至式(8－71)与式(8－75)、式(8－76)确定 I，J，B，M，N，并由式(8－83)、式(8－84)与式(8－64)确定 w_{0t} 与 K_{II}，K_{III}。

8.3.5　典型算例

图 8－7 与图 8－8 给出了两种典型情况下本方法所得系列结果中的少量结果。

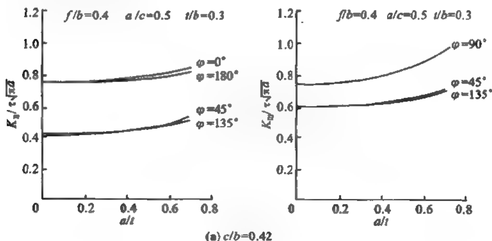


图 8－7　含深埋椭圆裂纹板受均匀剪力时本方法结果



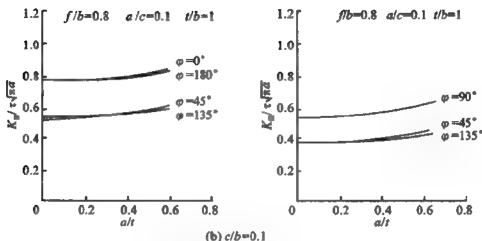


图 8-7 含深埋椭圆裂纹板受均匀剪力时本方法结果(续)

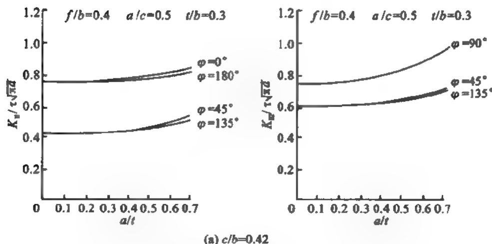
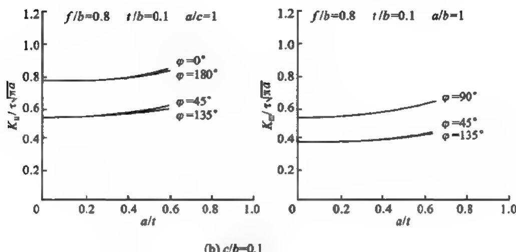


图 8-8 含表面半椭圆裂纹板受均匀剪力时本方法结果





(b) c/b=0.1

图 8－8　含表面半椭圆裂纹板受均匀剪力时本方法结果(续)

8.4　含孔边裂纹圆管应力强度因子能量差率闭合解法

8.4.1　裂纹表面位移与三维应力强度因子

对于含孔边裂纹圆管(见图 8－9),将裂纹表面位移写为如下形式:

$$w(x,z)=w_0h(x,z) \tag{8-88}$$

式中,w_0 为原点处位移幅值;$h(x,z)$ 为裂纹表面位移模态函数。因此,有

$$\left.\begin{aligned}w^2(x,z)&=w_0^2H(x,z)\\H(x,z)&=h^2(x,z)\end{aligned}\right\} \tag{8-89}$$

式中,$H(x,z)$ 在裂纹前沿为零,且二次可导。

如图 7－16 所示,假设孔是顶点为 O 的圆锥台孔,这对于管壁

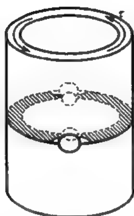


图 8-9　含孔边裂纹受扭圆管

较薄的轴是可以接受的。经裂纹前沿任意点 P,引人三种截面:径向截面 1-1、环向截面 2-2 及法向截面 3-3。在裂纹前沿附近,法向、径向和环向截面相应点的直角坐标分别为

$$\left.\begin{aligned} &x = x_1 - r\sin(\varphi_1 + \psi), \quad z = z_1 - r\cos(\varphi_1 + \psi), \quad r = \overline{PA} \\ &x = x_1 - r_1\cos\varphi_1, \quad z = z_1 + r_1\sin\varphi_1, \quad r_1 = \overline{PA_1} \\ &x = x_1 - r_2\sin\varphi_1, \quad z = z_1 - r_2\cos\varphi_1, \quad r_2 = \overline{PA_2} \end{aligned}\right\} \tag{8-90}$$

将这些截面裂纹表面位移的平方展开为泰勒级数,略去高次项,可得

$$w^2(\rho,\varphi) = -w_0^2\left[\frac{\partial H}{\partial x}\bigg|_P\sin(\varphi_1+\psi) + \frac{\partial H}{\partial z}\bigg|_P\cos(\varphi_1+\psi)\right]r \tag{8-91}$$

$$w^2(\rho,\varphi_1) = -w_0^2\left[\frac{\partial H}{\partial x}\bigg|_P\cos\varphi_1 - \frac{\partial H}{\partial z}\bigg|_P\sin\varphi_1\right]r_1 \tag{8-92}$$

$$w^2(\rho_1,\varphi) = -w_0^2\left[\frac{\partial H}{\partial x}\bigg|_P\sin\varphi_1 + \frac{\partial H}{\partial z}\bigg|_P\cos\varphi_1\right]r_2 \tag{8-93}$$

式中,$r_1 = r\sin\psi$,$r_2 = r\cos\psi$。由以上三式可看出



$$w^2(\rho,\varphi) = w^2(\rho_1,\varphi) + w^2(\rho,\varphi_1) \qquad (8-94)$$

上式可称为裂纹剪切位移的勾股定理。

法向截面裂纹剪切位移可分为两个分量：平面剪切位移 $w\cos\psi$ 及反平面剪切位移 $w\sin\psi$。这两个分量在裂纹前沿 P 点邻域的剪切位移可由相应的应力强度因子表示如下：

$$w^2(\rho,\varphi)\cos^2\psi = \frac{8}{\pi}\frac{K_{\mathrm{II}}^2}{E_n^2}r, \qquad w^2(\rho,\varphi)\sin^2\psi = \frac{8}{\pi}\frac{K_{\mathrm{III}}^2}{\mu^2}r \qquad (8-95)$$

式中，μ 为剪切弹性模量；E_n 为法向切片的广义杨氏弹性模量，可写为

$$\left.\begin{aligned} E_n &= E + (E_1 - E)f(\psi) \\ E_1 &= E(1-\nu^2) \\ f(\psi) &\in [0,1] \end{aligned}\right\} \qquad (8-96)$$

由式(8-95)与式(8-91)，可得

$$K_{\mathrm{II}}^2 = -\frac{\pi}{8}E_n^2 w_0^2\left[\left.\frac{\partial H}{\partial x}\right|_P \sin(\varphi_1+\psi) + \left.\frac{\partial H}{\partial z}\right|_P \cos(\varphi_1+\psi)\right]\cos^2\psi \qquad (8-97)$$

$$K_{\mathrm{III}}^2 = -\frac{\pi}{2}\mu^2 w_0^2\left[\left.\frac{\partial H}{\partial x}\right|_P \sin(\varphi_1+\psi) + \left.\frac{\partial H}{\partial z}\right|_P \cos(\varphi_1+\psi)\right]\sin^2\psi \qquad (8-98)$$

因此，只要确定了 w_0 与 $H(x,z)$，即可得到 K_{II}，K_{III}。

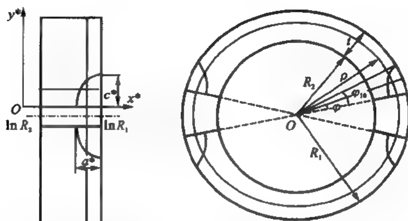
8.4.2 广义裂纹表面位移幅值的基本微分方程式

图 8-10(b)是一含孔边裂纹圆管的截面图，为了与平板情况相统一，假设它是由图 8-10(a)经保角变换 $\vec{\omega}=\mathrm{e}^{\vec{z}^*}$ 而来，即

$$\left.\begin{aligned} \vec{\omega} = \mathrm{e}^{\vec{z}^*} = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, \qquad \rho = \mathrm{e}^{x^*} \\ \varphi = y^*, \qquad \vec{z}^* = x^* + \mathrm{i}y^* \end{aligned}\right\} \qquad (8-99)$$

图 8-10(a)为含 1/4 椭圆角裂纹的矩形截面，在裂纹前沿，





(a) 含1/4椭圆角裂纹的矩形截面　　　(b) 含孔边裂纹圆管截面

图 8-10　由矩形板到圆管的保角变换

$x^* = a^* \sin\theta, y^* = c^* \cos\theta$，因此，圆管孔边角裂纹前沿的方程为

$$\rho_1 = R_1\left(1-\frac{a}{R_1}\right)^{\sin\theta},\qquad \varphi_1 = \frac{c}{R_1}\cos\theta \qquad (8-100)$$

可称为准 1/4 椭圆裂纹，且

$$\left.\begin{aligned}\sin\psi &= \frac{\dfrac{c}{R_1}\sin\theta}{\sqrt{\left[\dfrac{c}{R_1}\sin\theta\right]^2+\left[\ln\left(1-\dfrac{a}{R_1}\right)\cos\theta\right]^2}}\\ \cos\psi &= \frac{-\ln\left(1-\dfrac{a}{R_1}\right)\cos\theta}{\sqrt{\left[\dfrac{c}{R_1}\sin\theta\right]^2+\left[\ln\left(1-\dfrac{a}{R_1}\right)\cos\theta\right]^2}}\end{aligned}\right\}$$

$$(8-101)$$

为确定 w_0，首先考虑在裂纹扩展中总位能的增量 $d\Pi$。令虑裂纹扩展形式为按比例扩展，如图 7-18 所示，即

$$da = a dg,\qquad dc = c dg \qquad (8-102)$$

式中，g 为裂纹扩展系数。在这种情况下的总位能差率等于各无限薄法向切片总位能差率的积分，即



$$\mathrm{d}\Pi=-\int_s G\mathrm{d}r\mathrm{d}s=-\int_s\left(\frac{K_{\mathrm{II}}^2}{E_*}+\frac{K_{\mathrm{III}}^2}{2\mu}\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}s \quad (8-103)$$

而

$$\mathrm{d}r\mathrm{d}s=acp\left(\frac{a}{R_1},\theta\right)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}g \quad (8-104)$$

$$p\left(\frac{a}{R_1},\theta\right)=\left(1-\frac{a}{R_1}\right)^{2\sin\theta}\left\{\sin^2\theta\left(1-\frac{a}{R_1}\right)^{-1}+\frac{R_1}{a}\cos^2\theta\left[\ln\left(1-\frac{a}{R_1}\right)^{-1}\right]\right\} \quad (8-105)$$

将式(8-97)、式(8-98)及式(8-104)代入式(8-103)，得到

$$\mathrm{d}\Pi=-\int_s G\mathrm{d}r\mathrm{d}s=-\left[\frac{\pi}{8}E_1acw_c^2\left(\frac{I^*}{a}+\frac{J^*}{c}\right)+\frac{\pi}{4}\mu acw_0^2\left(\frac{I^{**}}{a}+\frac{J^{**}}{c}\right)\right]\mathrm{d}g \quad (8-106)$$

$$I^*=a\int\frac{E_*}{E_1}\left(\left.\frac{\partial H}{\partial x}\right|_P\cos\varphi_1-\left.\frac{\partial H}{\partial z}\right|_P\sin\varphi_1\right)\sin\psi\cos^2\psi p\left(\frac{a}{R_1},\theta\right)\mathrm{d}\theta \quad (8-107)$$

$$I^{**}=a\int\left(\left.\frac{\partial H}{\partial x}\right|_P\cos\varphi_1-\left.\frac{\partial H}{\partial z}\right|_P\sin\varphi_1\right)\sin^3\psi p\left(\frac{a}{R_1},\theta\right)\mathrm{d}\theta \quad (8-108)$$

$$J^*=c\int\frac{E_*}{E_1}\left(\left.\frac{\partial H}{\partial x}\right|_P\sin\varphi_1+\left.\frac{\partial H}{\partial z}\right|_P\cos\varphi_1\right)\cos^3\psi p\left(\frac{a}{R_1},\theta\right)\mathrm{d}\theta \quad (8-109)$$

$$J^{**}=c\int\left(\left.\frac{\partial H}{\partial x}\right|_P\sin\varphi_1+\left.\frac{\partial H}{\partial z}\right|_P\cos\varphi_1\right)\cos\psi\sin^2\psi p\left(\frac{a}{R_1},\theta\right)\mathrm{d}\theta \quad (8-110)$$

另一方面，根据叠加原理，可将板的远端载荷转化为裂纹表面载荷 $\tau(\rho,\varphi)=\tau_0t(\rho,\varphi)$，并将总势能表示为

$$\Pi=-\int_A\tau w\mathrm{d}A=-\tau_0\int_A t(\rho,\varphi)w(\rho,\varphi)\mathrm{d}A=-\tau_0\pi acw_0B \quad (8-111)$$



式中，A 为裂纹面积；τ 为裂纹表面的载荷；t 为其分布函数；τ_0 为载荷幅值，即广义力。

$$B = \frac{1}{2\pi ac}\int t(\rho,\varphi)h(\rho,\varphi)\mathrm{d}A \tag{8-112}$$

而在裂纹内部，令

$$h(\rho,\varphi) = [h_1(\rho,\varphi) + h_2(\rho,\varphi)]/2 \tag{8-113}$$

可得

$$B = \frac{1}{2\pi ac}\int t(\rho,\varphi)[h_1(\rho,\varphi) + h_2(\rho,\varphi)]\mathrm{d}A \tag{8-114}$$

由于虚裂纹扩展形式下的总位能差率一方面等于各无限薄法向切片总位能差率的积分，而另一方面等于外力势能的变化率，可得到一个关于 w_0 的微分方程

$$\frac{\partial w_0}{\partial g} + \left(2 + \frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial g}\right)w_0 = \left[\frac{E_1}{8\tau_0 B}\left(\frac{I^*}{a} + \frac{J^*}{c}\right) + \frac{\mu}{4\tau_0 B}\left(\frac{I^{**}}{a} + \frac{J^{**}}{c}\right)\right]w_0^2 \tag{8-115}$$

这样，便得到了关于 w_0 的伯努利方程。w_0 的解答为

$$\frac{1}{w_0} = \mathrm{e}^{2g}B\left[-\frac{1}{8\tau_0}\int_0^g \frac{1}{B^2}\left(\frac{E_1 I^* + 2\mu I^{**}}{a} + \frac{E_1 J^* + 2\mu J^{**}}{c}\right)\mathrm{e}^{-2g^*}\,\mathrm{d}g^* + \left(\frac{1}{w_0 B}\right)\bigg|_{g=0}\right] \tag{8-116}$$

8.4.3 基本方程的封闭解法

以下进一步简化 w_0 的封闭解答。令 a/t 与 c/b 不变，考虑两种极端情况（见图 8-11）。

(1) $\frac{a}{c}\to 0$，而 $\frac{a}{t}, \frac{c}{R^*}, \frac{R^*}{R_1}$ 保持不变，即 $c\to\infty$



$$\left(\frac{1}{w_0 B}\right)\bigg|_{a/c\to 0} = e^{2g}\left[-\frac{\mu}{4\tau_0}\int_0^g \left(\frac{I^{**}}{B^2}\right)\bigg|_{a/c\to 0}\frac{e^{-2g^*}}{a}dg^* + \left(\frac{1}{w_0 B}\right)\bigg|_{g=0,a/c\to 0}\right] \quad (8-117)$$

裂纹可看作沿环向的穿透裂纹。由 8.4.4 节可知

$$w_0\,|_{a/c\to 0} = \frac{\tau_0}{E} a F\left(\frac{a}{t}\right) \quad (8-118)$$

$$L_1 = \frac{1}{w_0}\frac{dw_0}{dg}\bigg|_{a/c\to 0} \quad (8-119)$$

则

$$w_0\,|_{a/c\to 0} = \frac{4\tau_0 a}{\mu I^{**}\,|_{a/c\to 0}}\left[(2+L_1)B + \frac{dB}{dg}\right] \quad (8-120)$$

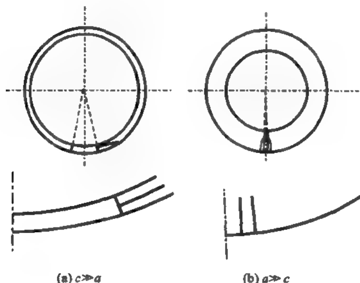


图 8-11 圆管孔边角裂纹的两种极端情况

(2) $\frac{c}{a}\to 0$，而$\frac{a}{t}$，$\frac{c}{R^*}$，$\frac{t}{R_1}$保持不变，即 $a\to\infty$

$$\left(\frac{1}{w_0 B}\right)\bigg|_{c/a\to 0} = e^{2g}\left[-\frac{E_1}{8\tau_0}\int_0^g \left(\frac{J^*}{B^2}\right)\bigg|_{c/a\to 0}\frac{e^{-2g^*}}{c}dg^* + \left(\frac{1}{w_0 B}\right)\bigg|_{g=0,c/a\to 0}\right] \quad (8-121)$$



裂纹可看作沿径向的穿透裂纹，由 7.4.4 节可知

$$w_0\big|_{c/a\to 0}=\frac{\tau_0}{E}cF\left(\frac{c}{R^*}\right) \tag{8-122}$$

$$L_2=\frac{1}{w_0}\frac{\mathrm{d}w_0}{\mathrm{d}g}\bigg|_{c/a\to 0} \tag{8-123}$$

则

$$w_0\big|_{c/a\to 0}=\frac{8\tau_0 c}{E_1J^*|_{c/a\to 0}}\left[(2+L_2)B+\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}g}\right] \tag{8-124}$$

然后对于任意 a/c 值，进行变量分离如下：

$$\left.\begin{aligned}\frac{E_1I^*+2\mu I^{**}}{B^2}&=m\left(\frac{a}{c},\frac{t}{R^*}\right)\left(\frac{2\mu I^{**}}{B^2}\right)\bigg|_{a/c\to 0}\\ \frac{E_1J^*+2\mu J^{**}}{B^2}&=n\left(\frac{c}{a},\frac{R^*}{t}\right)\left(\frac{E_1J^*}{B^2}\right)\bigg|_{c/a\to 0}\end{aligned}\right\} \tag{8-125}$$

即可确定 $m\left(\frac{a}{c},\frac{t}{R^*}\right)$ 与 $n\left(\frac{c}{a},\frac{R^*}{t}\right)$。

将式(8-125)代入式(8-116)，与式(8-117)、式(8-121)比较，并考虑到 w_0 为状态函数，与 g 无关，有

$$\frac{1}{w_0B}=\frac{m\left(\frac{a}{c},\frac{t}{R^*}\right)}{(w_0B)\big|_{a/c\to 0}}+\frac{n\left(\frac{c}{a},\frac{R^*}{t}\right)}{(w_0B)\big|_{c/a\to 0}} \tag{8-126}$$

将式(8-120) 与式(8-124)代入式(8-126)，可得

$$\frac{1}{w_0}=\frac{1}{8\tau_0}\frac{E_1I^*+2\mu I^*}{a\left[(2+L_1)B+\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}g}\right]}+\frac{1}{8\tau_0}\frac{E_1J^*+2\mu J^{**}}{c\left[(2+L_2)B+\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}g}\right]} \tag{8-127}$$

上式计算较简单。但若要求更高精度，也可以对任意 a/c 值按下式进行变量分离，即

$$\begin{aligned}&\frac{E_1I^*+2\mu I^{**}}{B^2}+\frac{a}{c}\frac{E_1J^*+2\mu J^{**}}{B^2}-\\&m\left(\frac{a}{c},\frac{t}{R^*}\right)\left(\frac{2\mu I^{**}}{B^2}\right)\bigg|_{a/c\to 0}+\\&\frac{a}{c}n\left(\frac{c}{a},\frac{R^*}{t}\right)\left(\frac{E_1J^*}{B^2}\right)\bigg|_{c/a\to 0}\end{aligned} \tag{8-128}$$



式中，$m\left(\frac{a}{c},\frac{t}{R^*}\right)$与$n\left(\frac{c}{a},\frac{R^*}{t}\right)$可由最小二乘方法确定。分别由式(8－118)与式(8－122)求出$w_0|_{a/c\to 0}$与$w_0|_{c/a\to 0}$，代入式(8－126)即可求出w_0。

8.4.4 裂纹表面位移模态

1. 含边沿裂纹的径向切片

为了构造三维裂纹表面位移模态，首先考虑二维裂纹剪切位移(见图8－12)。与8.2.4节第2条所述含边沿裂纹板类似，若已知应力强度因子

$$K_{\text{Ⅲ}}=\eta\left(\frac{a}{t}\right)\tau_0\sqrt{\pi a}$$

则裂纹反平面剪切位移可表示为如下形式：

$$w(x)=w_0h\left(\frac{a}{t},\frac{x}{a}\right)=w_0\left\{2\alpha_1\left(\frac{a}{t}\right)\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}+\left[1-2\alpha_1\left(\frac{a}{t}\right)\right]\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}\tag{8-129}$$

式中

$$\alpha_1\left(\frac{a}{t}\right)=\eta\left(\frac{a}{t}\right)\Big/F\left(\frac{a}{t}\right)\tag{8-130}$$

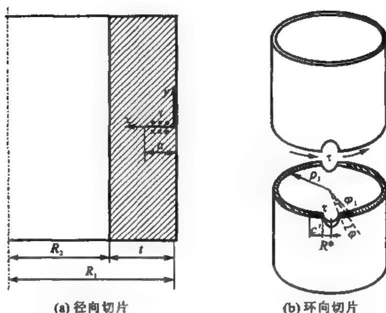
$$F\left(\frac{a}{t}\right)=\frac{\pi}{2m_3}\int_0^1\omega\eta^2\left(\frac{a}{t}\omega\right)\mathrm{d}\omega-\left(\frac{m_1}{m_3}-1\right)2\eta\left(\frac{a}{t}\right)\tag{8-131}$$

$$\left.\begin{aligned}m_1&=\frac{1}{2}\int_{-1}^1\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}t(x)\mathrm{d}\frac{x}{a}\\m_3&=\frac{1}{2}\int_{-1}^1\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}t(x)\mathrm{d}\frac{x}{a}\end{aligned}\right\}\tag{8-132}$$

且

$$w_0=\frac{\tau_0}{E}aF\left(\frac{a}{t}\right)\tag{8-133}$$





(a) 径向切片　　　　(b) 环向切片

图 8-12　含孔边角裂纹受扭圆管的径向与环向切片

$$\mathrm{d}w_0 = L\frac{w_0}{a}\mathrm{d}a \tag{8-134}$$

$$L - 1 + \left[\frac{F'\left(\frac{a}{t}\right)}{F\left(\frac{a}{t}\right)}\right]\frac{a}{t} \tag{8-135}$$

2. 含孔边裂纹的环向切片

根据圣维南原理，假设在环向切片上没有径向位移，且不同环向切片的层间切应力主要集中在裂纹表面上，则简化后的壳体基本微分方程与无体力的平面问题形式完全相同。于是，含孔边裂纹的环向切片可以看成含孔边裂纹平板。若已知应力强度因子

$$K_{\mathrm{II}} = \eta\left(\frac{c'}{R^*},\frac{2R^*}{\pi R_1}\right)\tau\sqrt{\pi c} \tag{8-136}$$

即可用能量差率方法确定裂纹剪切位移



$$w(\varphi)=w_0 h\left(\frac{c'}{R^*},\frac{2R^*}{\pi R_1},\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)=$$

$$w_0\left\{4a_2\left(\frac{c'}{R^*},\frac{2R^*}{\pi R_1}\right)\left(1-\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)^{\frac{1}{2}}+\right.$$

$$\left.\left[1-4a_2\left(\frac{c'}{R^*},\frac{2R^*}{\pi R_1}\right)\right]\left(1-\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)^{\frac{3}{2}}\right\} \quad (8-137)$$

式中

$$a_2\left(\frac{c'}{R^*},\frac{2R^*}{\pi R_1}\right)=\frac{\eta\left(\frac{c'}{R^*},\frac{2R^*}{\pi R_1}\right)}{F\left(\frac{c'}{R^*},\frac{2R^*}{\pi R_1}\right)} \quad (8-138)$$

$$w_0=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\tau_0}{E}c'F\left(\frac{c'}{R^*},\frac{2R^*}{\pi R_1}\right) \quad (8-139)$$

$$F\left(\frac{c'}{R^*},\frac{2R^*}{\pi R_1}\right)=\frac{\sqrt{2}\pi}{m_3}\int_0^1\omega\left[f^2\left(\frac{c'}{R^*}\omega,\frac{2R^*}{\pi R_1}\right)\right]d\omega-$$

$$4\left(\frac{m_1}{m_3}-1\right)f\left(\frac{c'}{R^*},\frac{2R^*}{\pi R_1}\right) \quad (8-140)$$

式中

$$m_1=\int_0^1\left(1-\frac{z}{c'}\right)^{\frac{1}{2}}t(z)\,d\frac{z}{c'},\qquad m_3=\int_0^1\left(1-\frac{z}{c'}\right)^{\frac{3}{2}}t(z)\,d\frac{z}{c'} \quad (8-141)$$

同理，含表面裂纹的环向切片可以看成含表面裂纹平板，见8.2.4节。

3. 三维裂纹张开位移模态

假设三维裂纹径向、环向截面的模态分别与具有相同几何形状和载荷分布的二维穿透裂纹的模态相同。根据以上假设，并使径向、环向裂纹表面位移及导数沿 x 轴、z 轴与裂纹前沿互相协调，经过任一点 $A(\rho_0,\varphi_0)$ 的径向、环向截面（见图7-16）裂纹表面位移分别为

$$w_1(\rho,\varphi_0)=w_0 h_1(\rho,\varphi_0),\qquad w_2(\rho_0,\varphi)=w_0 h_2(\rho_0,\varphi) \quad (8-142)$$



式中

$$h_1(\rho,\varphi_0)=\left\{2\alpha_1\left(\frac{a'}{t}\right)\left[1-\left(\frac{R_1-\rho}{R_1-\rho_1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}+\left[1-2\alpha_1\left(\frac{a'}{t}\right)\right]\left[1-\left(\frac{R_1-\rho}{R_1-\rho_1}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}\right\}\cdot\left\{4\alpha_2\left(\frac{c}{R^*},\frac{2R^*}{\pi R_1}\right)\left(1-\frac{\varphi_0}{\varphi_{10}}\right)^{\frac{1}{2}}+\left[1-4\alpha_2\left(\frac{c}{R^*},\frac{2R^*}{\pi R_1}\right)\right]\left(1-\frac{\varphi_0}{\varphi_{10}}\right)^{\frac{3}{2}}\right\} \tag{8-143}$$

$$h_2(\rho_0,\varphi)=\left\{2\alpha_1\left(\frac{a}{t}\right)\left[1-\left(\frac{R_1-\rho_0}{a}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}+\left[1-2\alpha_1\left(\frac{a}{t}\right)\right]\left[1-\left(\frac{R_1-\rho_0}{a}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}\right\}\cdot\left\{4\alpha_2\left(\frac{c'}{R^*},\frac{2R^*}{\pi R_1}\right)\left(1-\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)^{\frac{1}{2}}+\left[1-4\alpha_2\left(\frac{c'}{R^*},\frac{2R^*}{\pi R_1}\right)\right]\left(1-\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)^{\frac{3}{2}}\right\} \tag{8-144}$$

因此，在裂纹前沿邻域，由式(8－94)可知

$$H(\rho,\varphi)=h_1^2(\rho,\varphi_1)+h_2^2(\rho_1,\varphi) \tag{8-145}$$

且在裂纹内部，有

$$h(\rho,\varphi)=[h_1(\rho,\varphi)+h_2(\rho,\varphi)]/2 \tag{8-146}$$

继而由式(8－107)至式(8－110)与式(8－114)确定 I^*，I^{**}，J^*，J^{**}，B，并由式(8－126)或式(8－127)确定 w_0，再由式(8－97)、式(8－98)确定 K_{II}，K_{III}。

8.4.5 典型算例

应用以上所述原理，只需少量机时即可获得含孔边裂纹圆管



应力强度因子大量系统的结果。图 8-13 及图 8-14 给出了圆管受均匀载荷情况下的部分结果。虽然未找到其他结果进行对比验证，但本章方法可退化为平板孔边角裂纹情况，由 8.2.4 节可知，本章方法结果与交替法所得结果基本吻合。

(a) a/c=0.6

(b) a/c=1.0

图 8-13　圆管孔边角裂纹的应力强度因子(受远方均匀分布载荷)



本章所提供的三维剪切型应力强度因子能量差率闭合解法具有计算效率高、适用范围广的优点。本书作者已采用本方法获得了具有工程应用价值的系统方法与结果，由于篇幅所限，未能一一列举，可查阅相关的论文，如含偏轴裂纹的三维有限大体情况的剪切型应力强度因子能量差率法封闭解，可参见参考文献[8.2]。本方法所得部分结果已被应力强度因子手册[8.3]采用。

图 8－14　圆管表面裂纹受均匀剪力的应力强度因子



参考文献

[8.1] PARMERTER R R. Stress Intensity Factors for Three Dimensional Problems. AD A0250802, 1976.

[8.2] 王奇志,张行. 含偏轴裂纹的三维有限大体剪切型应力强度因子能量差率法封闭解. 北京航空航天大学学报,1997,23(4):456-460.

[8.3] 中国航空研究院主编. 应力强度因子手册. 增订版. 北京:科学出版社,1993.

[8.4] 张行. 断裂力学中应力强度因子的解法. 北京:国防工业出版社,1992.

[8.5] TADA H, PARIS P C, IRWIN G R. The Stress Analysis of Cracks Handbook. Del Research Corp., Hellertown, Pa., 1973.

[8.6] 王奇志,张行,何庆芝,等. 三维含裂纹有限大体剪切型应力强度因子能量释放率方法的封闭解. 固体力学学报,1991,12(2):114-123.

[8.7] WANG QIZHI, ZHANG XING, He Qingzhi, et al. A Closed Form Solution about Stress Intensity Factors of Shear Modes for 3 - D Finite Bodies with Cracks by Energy Release Rate Method, ACTA MECHANICA SOLIDA SINICA. English Edition. 1991,4(1).

[8.8] 王奇志,张行. 圆管孔边角裂纹剪切型应力强度因子的封闭解. 航空学报,1991,9(12):459-466.

[8.9] WANG QIZHI, ZHANG XING. A Closed Form Solution about Stress Intensity Factors of Shear Modes for 3 - D Finite Bodies with Eccentric Cracks by Energy Release Rate Method. Int. J Solids Structures, 1999, 36(7): 971-998.

第9章 宏观损伤力学本构理论简介

断裂力学从裂纹运动状态看可以分为两类:驻止裂纹断裂力学与扩展裂纹断裂力学。在驻止裂纹问题方面,力学模型已经基本定型,分析方法还可以进一步发展。在扩展裂纹问题方面,力学模型的建立尚处于研究与发展阶段。

扩展裂纹断裂力学从载荷施加情况看又可分为两类:单调加载下的扩展裂纹断裂力学与重复加载下的扩展裂纹断裂力学。在单调加载扩展裂纹问题方面,自20世纪70年代以来,国际与国内著名学者以弹塑性力学为基础进行了深入研究,并取得了显著进展。在重复加载扩展裂纹问题方面,过去只有以实验为基础的经验公式。从20世纪80年代中期以来,本书主编及其合作者们引入了宏观损伤力学,对疲劳裂纹的萌生与扩展进行了计算力学与分析力学的研究,为将这方面的工作从实验与经验的水平提升到理论高度,并推广用于单调加载情况,做了一定的工作。

本章旨在介绍宏观损伤力学本构关系的理论,为关于扩展裂纹的研究提供基础。

9.1 计及损伤耦合效应的本构关系

9.1.1 各向同性损伤情况

对于无损伤的各向同性材料而言,线弹性本构关系具有如下



形式：

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij}\lambda\delta_{kl}\varepsilon_{kl} + 2\mu\varepsilon_{ij} \tag{9-1}$$

式中，σ_{ij} 与 ε_{ij} 分别为应力与应变分量；λ 与 μ 为拉梅常数，并分别有

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \qquad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{9-2}$$

式中，E 为杨氏弹性模量；$\mu=G$ 为剪切模量，而 ν 为泊松比。

为了便于分析，对于各向同性材料，可以引入一个损伤变量 D，用以描述在加载历程中任意时刻的材料损伤。D 可被定义为

$$D = \frac{E - E_D}{E} \tag{9-3}$$

式中，E_D是材料含损伤时的杨氏弹性模量，它应在 $0 \leqslant E_D \leqslant E$ 范围内变化。显然，D 应该在 $0 \leqslant D \leqslant 1$ 范围内变化。D 亦可被称为损伤度。

由式(9-3)，有

$$E_D = (1-D)E \tag{9-4}$$

进一步，假定 ν 值与损伤度 D 无关，则由式(9-2)与式(9-4)可得材料含损伤时的拉梅常数 λ_D 与 μ_D 如下：

$$\lambda_D = (1-D)\lambda, \qquad \mu_D = (1-D)\mu \tag{9-5}$$

以式(9-5)中的 λ_D 与 μ_D 分别代替式(9-1)中的 λ 与 μ，则可得计及损伤耦合效应的本构关系

$$\sigma_{ij} = (1-D)(\delta_{ij}\lambda\delta_{kl}\varepsilon_{kl} + 2\mu\varepsilon_{ij}) \tag{9-6}$$

定义连续度 φ 如下：

$$\varphi = 1 - D \tag{9-7}$$

φ 亦应在 $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$ 范围内变化。由上式，可知式(9-4)、式(9-5)与式(9-6)分别变为

$$E_D = \varphi E \tag{9-8}$$

$$\lambda_D = \varphi\lambda, \qquad \mu_D = \varphi\mu \tag{9-9}$$

$$\sigma_{ij} = \varphi(\delta_{ij}\lambda\delta_{kl}\varepsilon_{kl} + 2\mu\varepsilon_{ij}) \tag{9-10}$$

式(9－6)与式(9－10)就是在单损伤变量前提下计及损伤耦合效应的本构关系。此时，材料的失效判据为 $D=1$ 与 $\varphi=0$。

进一步，将应力与应变均分成偏量与球量，即

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{ij} &= (\sigma_{ij}-\delta_{ij}\sigma_m)+\delta_{ij}\sigma_m = s_{ij}+\delta_{ij}\sigma_m \\ \varepsilon_{ij} &= (\varepsilon_{ij}-\delta_{ij}\varepsilon_m)+\delta_{ij}\varepsilon_m = e_{ij}+\delta_{ij}\varepsilon_m\end{aligned}\right\} \tag{9-11}$$

式中，s_{ij} 与 e_{ij} 分别为应力偏量与应变偏量；σ_m 与 ε_m 分别为平均正应力与平均正应变。

$$\left.\begin{aligned}\sigma_m &= \frac{1}{3}\delta_{ll}\sigma_{ll} = \frac{1}{3}\sigma_{kk} \\ \varepsilon_m &= \frac{1}{3}\delta_{ll}\varepsilon_{ll} = \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\end{aligned}\right\} \tag{9-12}$$

于是，由式(9－1)，可知

$$\left.\begin{aligned}s_{ij} &= 2\mu e_{ij} = 2Ge_{ij} \\ \sigma_m &= (3\lambda+2\mu)\varepsilon_m = 3K\varepsilon_m\end{aligned}\right\} \tag{9-13}$$

从而，当材料无损伤时，线弹性本构关系为

$$\sigma_{ij} = 2G(\varepsilon_{ij}-\delta_{ij}\varepsilon_m)+3K\delta_{ij}\varepsilon_m \tag{9-14}$$

当材料有损伤时，剪切模量与体变模量为

$$G_D = G(1-D_G),\qquad K_D = K(1-D_K) \tag{9-15}$$

这时，以式(9－15)中的 G_D 与 K_D 分别代替式(9－13)与式(9－14)中的 G 与 K，有

$$\left.\begin{aligned}s_{ij} &= 2G(1-D_G)e_{ij} \\ \sigma_m &= 3K(1-D_K)\varepsilon_m\end{aligned}\right\} \tag{9-16}$$

从而

$$\sigma_{ij} = 2G(1-D_G)(\varepsilon_{ij}-\delta_{ij}\varepsilon_m)+3K(1-D_K)\delta_{ij}\varepsilon_m \tag{9-17}$$

式(9－16)与式(9－17)即为在双损伤变量前提下计及损伤耦合效应的本构关系。引入连续度 $\varphi_G=1-D_G$ 与 $\varphi_K=1-D_K$，式(9－17)变成

$$\sigma_{ij} = 2G\varphi_G(\varepsilon_{ij}-\delta_{ij}\varepsilon_m)+3K\varphi_K\delta_{ij}\varepsilon_m \tag{9-18}$$



9.1.2　各向异性损伤情况

对于初始各向同性材料而言，由于体元在不同方向面元上会经历不同的应力史，同时在不同方向线元上会经历不同的应变史，故由此造成的损伤往往是各向异性的。目前，在这一方面，国内外研究工作者已经取得不少成果。为了工程应用的方便，本书作者提出一个杆系结构（即桁架）模型，用以模拟与替代实际的受损介质体元的力学功能，并由此而建立计及各向异性损伤耦合效应的本构关系。

对于图 9-1(a)所示边长为 $2l$ 的介质正方体元，可以采用图 9-1(b)所示的具有相同形状与尺寸的桁架代替它。该桁架包括两类杆件：棱边杆与面心对角杆。其计及损伤耦合效应的本构关系为

$$N_e = \overline{K}_e \varphi_e \Delta_e \tag{9-19}$$

$$N_d = \overline{K}_d \varphi_d \Delta_d \tag{9-20}$$

式中，N_e 与 N_d、$\overline{K}_e$ 与 $\overline{K}_d$、φ_e 与 φ_d 以及 Δ_e 与 Δ_d 均分别为棱边杆与对角杆的轴力、无损刚度、连续度以及伸长量。

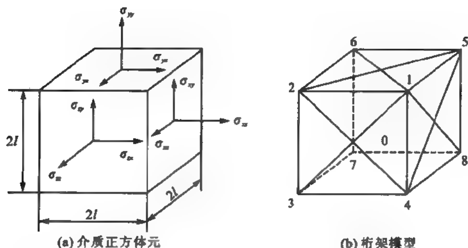
下面首先讨论桁架模型与介质正方体元之间的变形一致性。对于介质正方体元而言，位移分量 u_i 与应变分量 ε_{ij} 具有如下关系：

$$\begin{aligned} du_i &= \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j = \\ & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) dx_j + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) dx_j = \\ & \varepsilon_{ij} dx_j + \omega_{ij} dx_j \end{aligned} \tag{9-21}$$

在略去与变形无关的体元刚性转动后，即令 $\omega_{ij}=0$，式(9-21)变成

$$du_i = \varepsilon_{ij} dx_j \tag{9-22}$$

由于介质正方体元内应变场是均匀的，在略去体元体心位移，即略



(a) 介质正方体元　　(b) 桁架模型

图 9-1　介质正方体元及其桁架模型

去与变形无关的体元刚性移动后，积分式(9-22)，有

$$u_i = \varepsilon_{ij} x_j \tag{9-23}$$

根据桁架模型与介质正方体元变形一致性要求，由式(9-23)，可得桁架顶点位移分量与体元应变分量的关系如下：

$$\left.\begin{aligned}
u_i^{(1)} &= l(\varepsilon_{ix} + \varepsilon_{iy} + \varepsilon_{iz}) \\
u_i^{(2)} &= l(-\varepsilon_{ix} + \varepsilon_{iy} + \varepsilon_{iz}) \\
u_3^{(3)} &= l(-\varepsilon_{ix} - \varepsilon_{iy} + \varepsilon_{iz}) \\
u_i^{(4)} &= l(\varepsilon_{ix} - \varepsilon_{iy} - \varepsilon_{iz}) \\
u_i^{(5)} &= l(\varepsilon_{ix} + \varepsilon_{iy} - \varepsilon_{iz}) \\
u_i^{(6)} &= l(-\varepsilon_{ix} + \varepsilon_{iy} + \varepsilon_{iz}) \\
u_i^{(7)} &= l(-\varepsilon_{ix} - \varepsilon_{iy} - \varepsilon_{iz}) \\
u_i^{(8)} &= l(\varepsilon_{ix} - \varepsilon_{iy} - \varepsilon_{iz})
\end{aligned}\right\} \tag{9-24}$$

式中，下标 i 分别指 x，y 与 z 轴；上标为顶点编号。

下面给出桁架各杆伸长量与顶点位移分量的关系。连接顶点 α 与 β 的杆件伸长量 $\Delta_{\alpha\beta}$ 应为

$$\Delta_{\alpha\beta} = [u_x^{(\beta)} l_x + u_y^{(\beta)} l_y + u_z^{(\beta)} l_z] - [u_x^{(\alpha)} l_x + u_y^{(\alpha)} l_y + u_z^{(\alpha)} l_z] \tag{9-25}$$



式中，l_x，l_y 与 l_z 表示由点 α 指向点 β 的射线的方向余弦。利用式(9-24)与式(9-25)，可以分别得到棱边杆与对角杆的伸长量如下：

$$\left.\begin{aligned} \Delta_{12} = \Delta_{34} = \Delta_{56} = \Delta_{78} = 2l\varepsilon_{xx} \\ \Delta_{14} = \Delta_{23} = \Delta_{67} = \Delta_{58} = 2l\varepsilon_{yy} \\ \Delta_{15} = \Delta_{26} = \Delta_{37} = \Delta_{48} = 2l\varepsilon_{zz} \end{aligned}\right\} \tag{9-26}$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta_{13} = \Delta_{57} = \sqrt{2}l(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + 2\varepsilon_{xy}) \\ \Delta_{24} = \Delta_{68} = \sqrt{2}l(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} - 2\varepsilon_{xy}) \\ \Delta_{18} = \Delta_{27} = \sqrt{2}l(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} + 2\varepsilon_{yz}) \\ \Delta_{45} = \Delta_{36} = \sqrt{2}l(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} - 2\varepsilon_{yz}) \\ \Delta_{16} = \Delta_{47} = \sqrt{2}l(\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{xx} + 2\varepsilon_{zx}) \\ \Delta_{25} = \Delta_{38} = \sqrt{2}l(\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{xx} - 2\varepsilon_{zx}) \end{aligned}\right\} \tag{9-27}$$

然后，讨论桁架模型与介质正方体元静力一致性。桁架外力虚功应为

$$\begin{aligned} \delta W_e = & 8l^3(\sigma_{xx}\delta\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\delta\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}\delta\varepsilon_{zz}) + \\ & 16l^3(\sigma_{xy}\delta\varepsilon_{xy} + \sigma_{yz}\delta\varepsilon_{yz} + \sigma_{zx}\delta\varepsilon_{zx}) \end{aligned} \tag{9-28}$$

桁架内力虚功 δW_i 包括两个部分

$$\delta W_i = \delta W_{ie} + \delta W_{id} \tag{9-29}$$

式中，δW_{ie} 与 δW_{id} 分别是棱边杆与对角杆的内力虚功，并分别为

$$\delta W_{ie} = 4(N_{12}\delta\Delta_{12} + N_{14}\delta\Delta_{14} + N_{15}\delta\Delta_{15}) \tag{9-30}$$

$$\begin{aligned} \delta W_{id} = & 2(N_{13}\delta\Delta_{13} + N_{24}\delta\Delta_{24} + N_{18}\delta\Delta_{18} + \\ & N_{45}\delta\Delta_{45} + N_{16}\delta\Delta_{16} + N_{25}\delta\Delta_{25}) \end{aligned} \tag{9-31}$$

将式(9-26)与式(9-27)进行变分，并将所得的结果分别代入式(9-30)与式(9-31)，继而再将所得结果代入式(9-29)，有



$$
\begin{aligned}
\delta W_t = & [8N_{12} + 2\sqrt{2}(N_{13} + N_{24} + N_{16} + N_{25})]l\,\delta\varepsilon_{xx} + \\
& [8N_{14} + 2\sqrt{2}(N_{13} + N_{24} + N_{18} + N_{45})]l\,\delta\varepsilon_{yy} + \\
& [8N_{15} + 2\sqrt{2}(N_{18} + N_{45} + N_{16} + N_{25})]l\,\delta\varepsilon_{zz} + \\
& 4\sqrt{2}(N_{18} - N_{45})l\,\delta\varepsilon_{yz} + 4\sqrt{2}(N_{16} - N_{25})l\,\delta\varepsilon_{zx} + \\
& 4\sqrt{2}(N_{13} - N_{24})l\,\delta\varepsilon_{xy}
\end{aligned} \tag{9-32}
$$

进一步，由虚功原理，可知

$$
\delta W_e = \delta W_t \tag{9-33}
$$

将式(9-28)与式(9-32)代入式(9-33)，并考虑到应变变分，即虚应变 $\delta\varepsilon_{ij}$ 的独立性，可得

$$
\left.
\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \frac{1}{l^2}\left[N_{12} + \frac{\sqrt{2}}{4}(N_{13} + N_{24} + N_{16} + N_{25})\right] \\
\sigma_{yy} &= \frac{1}{l^2}\left[N_{14} + \frac{\sqrt{2}}{4}(N_{13} + N_{24} + N_{18} + N_{45})\right] \\
\sigma_{zz} &= \frac{1}{l^2}\left[N_{15} + \frac{\sqrt{2}}{4}(N_{18} + N_{45} + N_{16} + N_{25})\right] \\
\sigma_{yz} &= \frac{1}{l^2}\,\frac{\sqrt{2}}{4}(N_{18} - N_{45}) \\
\sigma_{zx} &= \frac{1}{l^2}\,\frac{\sqrt{2}}{4}(N_{16} - N_{25}) \\
\sigma_{xy} &= \frac{1}{l^2}\,\frac{\sqrt{2}}{4}(N_{13} - N_{24})
\end{aligned}
\right\} \tag{9-34}
$$

上式即为由虚功原理得到的桁架节点平衡方程。

将式(9-26)与式(9-27)分别代入式(9-19)与式(9-20)，并将所得结果代入式(9-34)，同时令

$$
K_e = \bar{K}_e / l^2
$$

$$
K_d = \bar{K}_d / l^2
$$

有



$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \left[2K_e\varphi_{12} + \frac{1}{2}K_d(\varphi_{13} + \varphi_{24} + \varphi_{16} + \varphi_{25})\right]\varepsilon_{xx} + \\
&\quad \frac{1}{2}K_d(\varphi_{13} + \varphi_{24})\varepsilon_{yy} + \frac{1}{2}K_d(\varphi_{16} + \varphi_{25})\varepsilon_{zz} + \\
&\quad K_d(\varphi_{16} - \varphi_{25})\varepsilon_{zx} + K_d(\varphi_{13} - \varphi_{24})\varepsilon_{xy} \\
\sigma_{yy} &= \left[2K_e\varphi_{14} + \frac{1}{2}K_d(\varphi_{13} + \varphi_{24} + \varphi_{18} + \varphi_{45})\right]\varepsilon_{yy} + \\
&\quad \frac{1}{2}K_d(\varphi_{18} + \varphi_{45})\varepsilon_{zz} + \frac{1}{2}K_d(\varphi_{13} + \varphi_{24})\varepsilon_{xx} + \\
&\quad K_d(\varphi_{13} - \varphi_{24})\varepsilon_{xy} + K_d(\varphi_{18} + \varphi_{45})\varepsilon_{yz} \\
\sigma_{zz} &= \left[2K_e\varphi_{15} + \frac{1}{2}K_d(\varphi_{18} + \varphi_{45} + \varphi_{16} + \varphi_{25})\right]\varepsilon_{zz} + \\
&\quad \frac{1}{2}K_d(\varphi_{16} + \varphi_{25})\varepsilon_{xx} + \frac{1}{2}K_d(\varphi_{18} + \varphi_{45})\varepsilon_{yy} + \\
&\quad K_d(\varphi_{18} - \varphi_{45})\varepsilon_{yz} + K_d(\varphi_{16} - \varphi_{25})\varepsilon_{zx} \\
\sigma_{yz} &= \frac{1}{2}K_d(\varphi_{18} - \varphi_{45})(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + K_d(\varphi_{18} + \varphi_{45})\varepsilon_{yz} \\
\sigma_{zx} &= \frac{1}{2}K_d(\varphi_{16} - \varphi_{25})(\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{xx}) + K_d(\varphi_{16} + \varphi_{25})\varepsilon_{zx} \\
\sigma_{xy} &= \frac{1}{2}K_d(\varphi_{13} - \varphi_{24})(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + K_d(\varphi_{13} + \varphi_{24})\varepsilon_{xy}
\end{aligned}\right\} \tag{9-35}
$$

然后，讨论桁架两类杆件刚度 K_e 与 K_d 取值问题。在无损伤时，式(9－35)应退化到以下经典的线弹性本构关系

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij}\lambda\delta_{rs}\varepsilon_{rs} + 2\mu\varepsilon_{ij} \tag{9-36}$$

另一方面，在无损伤时，桁架各杆连续度为

$$\varphi_{\alpha\beta} = 1$$

这时，式(9－35)具有如下形式：

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= (2K_e + K_d)\varepsilon_{xx} + K_d\theta \\
\sigma_{yy} &= (2K_e + K_d)\varepsilon_{yy} + K_d\theta \\
\sigma_{zz} &= (2K_e + K_d)\varepsilon_{zz} + K_d\theta \\
\sigma_{yz} &= 2K_d\varepsilon_{yz} \\
\sigma_{zx} &= 2K_d\varepsilon_{zx} \\
\sigma_{xy} &= 2K_d\varepsilon_{xy}
\end{aligned}\right\} \tag{9-37}
$$

式中，θ 为体积应变，并有

$$\theta = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} \tag{9-38}$$

对比式(9-36)与式(9-37)，有

$$2K_e + K_d = 2\mu \tag{9-39}$$

$$K_d = \lambda \tag{9-40}$$

$$K_d = \mu \tag{9-41}$$

进一步，考虑到

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \tag{9-42}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{9-43}$$

由式(9-39)、式(9-40)与式(9-41)，可得

$$\nu = \frac{1}{4} \tag{9-44}$$

$$K_e = \frac{1}{5}E \tag{9-45}$$

$$K_d = \frac{2}{5}E \tag{9-46}$$

以上分析表明：

① 在无损伤时，桁架模型可以模拟介质单元线弹性本构关系，并给出符合实际的泊松比；

② 在有损伤时，桁架模型可以体现介质单元计及各向异性损伤耦合效应的本构关系；

③ 对初始各向同性材料，桁架模型包含九个损伤度，其中三



个是属于棱边杆的，六个是属于对角杆的。

9.2　损伤热力学与损伤演化方程

9.2.1　损伤热力学

损伤热力学可以理解为含有损伤内变量的不可逆过程热力学。当介质运动速度足够小时，由热力学第一定律所得到的能量守恒方程为

$$\rho \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \sigma_{ij} \frac{\mathrm{d}\varepsilon_{ij}}{\mathrm{d}t} + \rho \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \tag{9-47}$$

式中，ρ 为介质质量密度；e 与 γ 分别为单位质量介质所包含的内能与所释放的热量；q_i 为单位时间内、单位面积上热通量的分量。为将式(9-47)转变成为全微分的形式，引入单位质量介质熵 s 的时间变化率，即

$$\rho \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{T}\left(\rho \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \sigma_{ij} \frac{\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{(p)}}{\mathrm{d}t} + Y_k \frac{\mathrm{d}D_k}{\mathrm{d}t}\right) \tag{9-48}$$

式中，T 为热力学温度；$\varepsilon_{ij}^{(p)}$ 为塑性应变分量；D_k为介质的第 k 个损伤分量；Y_k是当 $\mathrm{d}D_k/\mathrm{d}t=1$，而其他损伤分量对时间的演化率为零时在单位体积介质中所消耗的功率，即第 k 个损伤驱动力分量。考虑到式(9-48)，可将式(9-47)改写成为以下形式：

$$\rho \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \sigma_{ij} \frac{\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{(e)}}{\mathrm{d}t} + \rho T \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} - Y_k \frac{\mathrm{d}D_k}{\mathrm{d}t} \tag{9-49}$$

式中，$\varepsilon_{ij}^{(e)}$ 为弹性应变分量，并有

$$\varepsilon_{ij}^{(e)} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{(p)} \tag{9-50}$$

为将式(9-49)转变成全微分形式，引入单位质量介质自由能 f，即

$$f = e - Ts \tag{9-51}$$



于是

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}-T\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}s \tag{9-52}$$

考虑到式(9 52),可将式(9-49)写成以下形式:

$$\rho\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\sigma_{ij}\frac{\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{(e)}}{\mathrm{d}t}-\rho s\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}-Y_k\frac{\mathrm{d}D_k}{\mathrm{d}t} \tag{9-53}$$

式(9-53)就是全微分的形式。该式表明,自由能 f 应为状态变量 $\varepsilon_{ij}^{(e)}$ 与 T 以及内变量 D_k 的函数,即

$$f=f(\varepsilon_{ij}^{(e)},T,D_k) \tag{9-54}$$

从而

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f}{\partial\varepsilon_{ij}^{(e)}}\frac{\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{(e)}}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f}{\partial T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f}{\partial D_k}\frac{\mathrm{d}D_k}{\mathrm{d}t} \tag{9-55}$$

对比式(9-53)与式(9-55),有

$$\left(\rho\frac{\partial f}{\partial\varepsilon_{ij}^{(e)}}-\sigma_{ij}\right)\frac{\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{(e)}}{\mathrm{d}t}+\left(\rho\frac{\partial f}{\partial T}+s\right)\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}+\left(\rho\frac{\partial f}{\partial D_k}+Y_k\right)\frac{\mathrm{d}D_k}{\mathrm{d}t}=0 \tag{9-56}$$

考虑到 $\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{(e)}/\mathrm{d}t$,$\mathrm{d}T/\mathrm{d}t$ 与 $\mathrm{d}D_k/\mathrm{d}T$ 的任意性,由式(9-56)可知

$$\sigma_{ij}=\rho\frac{\partial f}{\partial\varepsilon_{ij}^{(e)}} \tag{9-57}$$

$$s=-\rho\frac{\partial f}{\partial T} \tag{9-58}$$

$$Y_k=-\rho\frac{\partial f}{\partial D_k} \tag{9-59}$$

进一步,热力学第二定律所表达的不等式的微分形式为

$$\rho T\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}-\rho\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial q_i}{\partial x}-\frac{1}{T}q_i\frac{\partial T}{\partial x_i}\geqslant 0 \tag{9-60}$$

将式(9-48)代入式(9-60),有

$$\sigma_{ij}\frac{\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{(p)}}{\mathrm{d}t}+Y_k\frac{\mathrm{d}D_k}{\mathrm{d}t}-\frac{1}{T}q_i\frac{\partial T}{\partial x_i}\geqslant 0 \tag{9-61}$$

式(9-61)是普遍成立的。因此,可知

$$\sigma_{ij}\frac{\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{(p)}}{\mathrm{d}t}\geqslant 0 \tag{9-62}$$



$$Y_k \frac{\mathrm{d}D_k}{\mathrm{d}t} \geqslant 0 \tag{9-63}$$

$$q_i \frac{\partial T_i}{\partial x} = \vec{q} \cdot \vec{\nabla} T = |\vec{q}||\vec{\nabla} T| \cos\alpha \leqslant 0 \tag{9-64}$$

式(9－62)与式(9－63)分别表明，塑性功耗散率与损伤功耗散率均为非负量。而式(9－64)则表明，热量总是由高温区流向低温区。

9.2.2　损伤驱动力

现在，只限于讨论等温过程。此时，单位体积自由能 ρf 等于单位体积应变能 W，即

$$\rho f = W = \int_0^M \sigma_{ij} \mathrm{d}\varepsilon_{ij} \tag{9-65}$$

在单损伤变量的情况下，可以将计及损伤耦合效应的本构关系写成一般形式：

$$\sigma_{ij} = (1-D) C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \tag{9-66}$$

式中，$C_{ijkl} = C_{klij}$。对于各向同性材料，有

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{9-67}$$

将式(9－66)代入式(9－65)，略去一次加载产生的损伤演化，经积分可得

$$W = \frac{1}{2}(1-D) C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij} \tag{9-68}$$

由式(9－59)与式(9－65)，可知

$$Y = -\frac{\partial W}{\partial D} \tag{9-69}$$

将式(9－68)代入式(9－69)，有

$$Y = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij} \tag{9-70}$$

上式表明，对于单损伤变量的情况，当以应变表示应变能时，损伤



驱动力 Y 等于不计损伤时的单位体积应变能。

由式(9－11)，可将单位体积应变能写为

$$W=\int_0^M \sigma_{ij}\mathrm{d}\varepsilon_{ij}=\int_0^M (s_{ij}+\delta_{ij}\sigma_m)\mathrm{d}(e_{ij}+\delta_{ij}\varepsilon_m)=$$

$$\int_0^M s_{ij}\mathrm{d}e_{ij}+3\int_0^M \sigma_m\mathrm{d}\varepsilon_m \tag{9－71}$$

在双损伤变量的情况下，由式(9－16)，计及损伤耦合的本构关系为

$$s_{ij}=(1-D_G)2Ge_{ij},\qquad \sigma_m=(1-D_K)3K\varepsilon_m \tag{9－72}$$

将式(9－72)代入式(9－71)，可得

$$W=(1-D_G)2G\int_0^M e_{ij}\mathrm{d}e_{ij}+(1-D_K)9K\int_0^M \varepsilon_m\mathrm{d}\varepsilon_m \tag{9－73}$$

引入等效应变 ε_e

$$\varepsilon_e=\sqrt{\frac{2}{3}e_{ij}e_{ij}} \tag{9－74}$$

可知

$$e_{ij}\mathrm{d}e_{ij}=\frac{3}{2}\varepsilon_e\mathrm{d}\varepsilon_e \tag{9－75}$$

将式(9－75)代入式(9－73)，经过积分，可得

$$W=(1-D_G)\frac{3}{2}G\varepsilon_e^2+(1-D_K)\frac{9}{2}K\varepsilon_m^2 \tag{9－76}$$

从而，由式(9－59)、式(9－65)与式(9－76)，有

$$Y_G=-\frac{\partial W}{\partial D_G}=\frac{3}{2}G\varepsilon_e^2 \tag{9－77}$$

$$Y_K=-\frac{\partial W}{\partial D_K}=\frac{9}{2}K\varepsilon_m^2 \tag{9－78}$$

引入等效应力 σ_e

$$\sigma_e=\sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}} \tag{9－79}$$

考虑到式(9－72)与式(9－74)，可得



$$\sigma_e = 3G(1-D_G)\varepsilon_e \tag{9-80}$$

另外，由式(9－72)，可知

$$\sigma_m = 3K(1-D_K)\varepsilon_m \tag{9-81}$$

于是，式(9－77)与式(9－78)可分别改写为

$$Y_G = \frac{1}{6G(1-D_G)^2}\sigma_e^2 \tag{9-82}$$

$$Y_K = \frac{1}{2K(1-D_K)^2}\sigma_m^2 \tag{9-83}$$

9.2.3 损伤演化准则

为了确定损伤演化率，不仅需要建立损伤驱动力的表达式，还需要建立损伤演化准则，包括损伤起始演化准则以及损伤后继演化准则。现以双损伤变量情况为例研究这一问题。

首先，建立损伤起始演化准则。以 Y_1 与 Y_2 分别表示 Y_G 与 Y_K，则损伤起始演化准则为

$$F(Y_{10},Y_{20}) = k_0 \tag{9-84}$$

式中，Y_{i0} 为损伤起始演化时损伤驱动力分量；k_0 为与 Y_{10} 和 Y_{20} 比值无关的材料常数。

$F(Y_1,Y_2)$ 可以称为损伤演化函数。而损伤起始演化准则，即式(9－84)，在 $Y_1 \sim Y_2$ 坐标系中表现为一条曲线，可称之为损伤起始演化曲线 C_0，如图 9－2 所示。

由损伤起始演化曲线与两个坐标轴 Y_1 及 Y_2 所形成的曲线三角形 OA_1A_2 以外的区域称为损伤演化的可行区。当点(Y_1,Y_2)位于该可行区内时，材料方开始出现损伤。

材料常数 k_0 可以理解为损伤起始演化的门槛值，它可由最方便的实验确定，如 $Y_2=0$ 的纯剪实验。于是，由式(9－84)可知

$$k_0 = F(Y_{1\text{th}0},0) = H(Y_{1\text{th}0}) \tag{9-85}$$

式中，$Y_{1\text{th}0}$ 为纯剪情况下损伤起始演化时 Y_1 的门槛值。



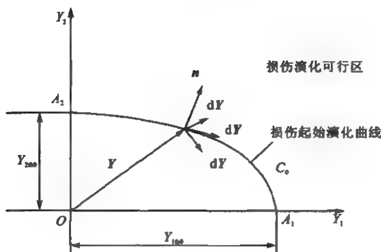


图 9-2 损伤起始演化曲线

为了进一步研究损伤后继演化问题，又需建立加载准则。为此，讨论如图 9-2 所示情况，即当损伤驱动力矢量 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{i}_1Y_1+\boldsymbol{i}_2Y_2$ 的终点在损伤初始演化曲线 C_0 上时，$\mathrm{d}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{i}_1\mathrm{d}Y_1+\boldsymbol{i}_2\mathrm{d}Y_2$ 的以下三种情况：

① $\mathrm{d}\boldsymbol{Y}$ 指向损伤演化的可行区内部；

② $\mathrm{d}\boldsymbol{Y}$ 指向损伤演化的可行区外部；

③ $\mathrm{d}\boldsymbol{Y}$ 指向损伤演化的可行区边界。

以上三种情况依次称为：加载、卸载以及中性变载。以 $\boldsymbol{n}$ 表示损伤起始演化曲线 C_0 上面指向可行区的法线方向单位矢量，则以上三种情况可表示为

$$\left.\begin{aligned}&① \ F(Y_1,Y_2)=K, \quad \boldsymbol{n}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{Y}>0\\&② \ F(Y_1,Y_2)=K, \quad \boldsymbol{n}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{Y}<0\\&③ \ F(Y_1,Y_2)=K, \quad \boldsymbol{n}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{Y}=0\end{aligned}\right\} \tag{9-86}$$

在中性变载的情况下，有

$$\mathrm{d}F=\frac{\partial F}{\partial Y_1}\mathrm{d}Y_1+\frac{\partial F}{\partial Y_2}\mathrm{d}Y_2-0 \tag{9-87}$$

引入 F 的梯度向量 ∇F，则式(9-87)变成



$$\nabla F \cdot d\boldsymbol{Y} = 0 \tag{9-88}$$

于是，对比式(9-86)的第三式与式(9-88)，可知

$$\nabla F = \zeta \boldsymbol{n} \tag{9-89}$$

考虑到式(9-89)，可将式(9-86)写成如下形式：

$$\left.\begin{array}{ll} ① \ F(Y_1,Y_2) = K, & \nabla F \cdot d\boldsymbol{Y} > 0 \\ ② \ F(Y_1,Y_2) = K, & \nabla F \cdot d\boldsymbol{Y} < 0 \\ ③ \ F(Y_1,Y_2) = K, & \nabla F \cdot d\boldsymbol{Y} = 0 \end{array}\right\} \tag{9-90}$$

然后，建立损伤后继演化准则。这个准则的数学形式可以假设为

$$F(Y_1,Y_2) = k(W_d) \tag{9-91}$$

式中，损伤演化函数 $F(Y_1,Y_2)$ 与损伤起始演化时相同，门槛值 k 则是与损伤功耗 W_d 有关，而与 Y_1 和 Y_2 的比值无关的材料函数。W_d 的定义为

$$W_d = \int_0^D (Y_1 dD_1 + Y_2 dD_2) \tag{9-92}$$

损伤后继演化准则，即式(9-91)，亦表现为在 $Y_1 \sim Y_2$ 坐标中的一条曲线或曲线族，可称之为损伤后继演化曲线族 C，如图9-3所示。

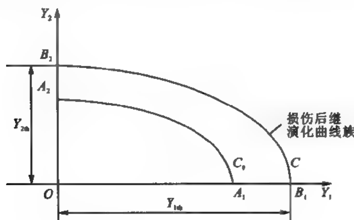


图9-3　损伤后继演化曲线

材料函数$k(W_d)$可以理解为损伤后继演化的门槛值，它可由最方便的实验确定，如纯剪实验。于是，由式(9-91)可知

$$k(W_d)=F(Y_{1\text{th}},0)=H(Y_{1\text{th}}) \tag{9-93}$$

进一步，在纯剪条件下，可以证明(参见9.2.4节)

$$Y_{1\text{th}}=Y_{1\text{th}0}\left[1+\left(\frac{W_d}{Y_{1\text{th}0}}\right)^2\right]=I(W_d) \tag{9-94}$$

将式(9-94)代入式(9-93)，可得

$$k(W_d)=H[I(W_d)] \tag{9-95}$$

9.2.4 损伤演化方程——时间型

对于多损伤变量情况，损伤演化率应该被视作矢量如下：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{D}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{i}_1\frac{\mathrm{d}D_1}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{i}_2\frac{\mathrm{d}D_2}{\mathrm{d}t} \tag{9-96}$$

首先，确定损伤演化率矢量的方向。根据热力学第二定律，可知

$$(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Y}_0)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{D}}{\mathrm{d}t}\geqslant 0 \tag{9-97}$$

式中，$\boldsymbol{Y}_0$是不随时间改变的矢量。此矢量端点位于损伤演化区外或损伤演化区边界上，如图9-4所示。由式(9-97)，利用归谬证法，可以断定：

① 损伤起始与后继演化曲线是凸曲线；

② 与损伤演化曲线上点(Y_1,Y_2)相对应的损伤演化率矢量指向该点外法线方向。

以上两项结论示于图9-4。根据结论②与式(9-89)，可知

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{D}}{\mathrm{d}t}=\xi\boldsymbol{n}=\eta\nabla F(Y_1,Y_2) \tag{9-98}$$

$$\frac{\mathrm{d}D_k}{\mathrm{d}t}=\eta\frac{\partial F}{\partial Y_k} \tag{9-99}$$

然后，确定损伤演化率矢量的大小。令



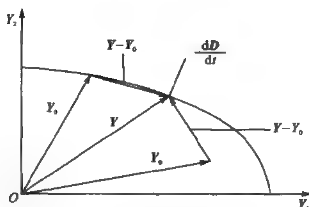


图 9-4 损伤演化率矢量的方向

$$\eta = h\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} \tag{9-100}$$

则式(9-99)可以写成

$$\frac{\mathrm{d}D_k}{\mathrm{d}t} = h\frac{\partial F}{\partial Y_k}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} \tag{9-101}$$

根据损伤后继演化准则式(9-91),采用求和约定,有

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = k'(W_D)\frac{\mathrm{d}W_D}{\mathrm{d}t} = k'(W_D)Y_l\frac{\mathrm{d}D_l}{\mathrm{d}t} \tag{9-102}$$

将式(9-102)代入式(9-101),可知

$$\frac{\mathrm{d}D_k}{\mathrm{d}t} = h\frac{\partial F}{\partial Y_k}k'(W_D)Y_l\frac{\mathrm{d}D_l}{\mathrm{d}t} \tag{9-103}$$

将上式两边乘以 Y_k,有

$$Y_k\frac{\mathrm{d}D_k}{\mathrm{d}t} = hk'(W_D)\frac{\partial F}{\partial Y_k}Y_k\left(Y_l\frac{\mathrm{d}D_l}{\mathrm{d}t}\right) \tag{9-104}$$

考虑到

$$\frac{\mathrm{d}W_D}{\mathrm{d}t} = Y_k\frac{\mathrm{d}D_k}{\mathrm{d}t} = Y_l\frac{\mathrm{d}D_l}{\mathrm{d}t} \tag{9-105}$$

式(9-104)变为

$$hk'(W_D)\frac{\partial F}{\partial Y_k}Y_k = 1 \tag{9-106}$$

从而，可以得到待定函数 h 如下：

$$h=\frac{1}{k'(W_D)\dfrac{\partial F}{\partial Y_k}Y_k} \tag{9-107}$$

将式(9－107)代回式(9－101)，即可确定损伤演化率分量的表达式

$$\frac{\mathrm{d}D_k}{\mathrm{d}t}=\frac{\dfrac{\partial F}{\partial Y_k}\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}}{k'(W_D)\dfrac{\partial F}{\partial Y_l}Y_l} \tag{9-108}$$

进一步，当 F 是 Y_1 与 Y_2 的 n 次齐次函数时，有

$$\frac{\partial F}{\partial Y_l}Y_l=nF \tag{9-109}$$

于是，式(9－108)可简化为

$$\frac{\mathrm{d}D_k}{\mathrm{d}t}=\frac{\dfrac{\partial F}{\partial Y_k}\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}}{nFk'(W_D)} \tag{9-110}$$

损伤演化函数可以表示成损伤驱动力 Y_1 与 Y_2 的如下齐次函数：

$$F(Y_1,Y_2)=\frac{p}{m+1}(Y_1^{m+1}+\kappa Y_2^{m+1}) \tag{9-111}$$

式中，p，m 与 κ 为待定的材料常数，并将由以下提到的实验方法确定。从而有

$$\frac{\partial F}{\partial Y_1}=pY_1^m,\qquad \frac{\partial F}{\partial Y_2}=p\kappa Y_2^m \tag{9-112}$$

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial F}{\partial Y_1}\frac{\mathrm{d}Y_1}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial F}{\partial Y_2}\frac{\mathrm{d}Y_2}{\mathrm{d}t}=p\left(Y_1^m\frac{\mathrm{d}Y_1}{\mathrm{d}t}+\kappa Y_2^m\frac{\mathrm{d}Y_2}{\mathrm{d}t}\right) \tag{9-113}$$

函数 $k(W_d)$ 代表材料力学行为，与 Y_1 和 Y_2 的比值无关，可由纯剪实验确定。在此情况下，有

$$W_d-\int_0^{D_1}Y_{1\mathrm{th}}\mathrm{d}D_1=\int_0^{D_G}Y_{G\mathrm{th}}\mathrm{d}D_G \tag{9-114}$$



式中，Y_{Gth} 为在纯剪情况下损伤后继演化时 Y_G 的门槛值。由式(9－82)，可知

$$Y_{Gth}=\frac{\sigma_{eth}^{2}}{6G}\left(\frac{1}{1-D_G}\right)^{2}=Y_{Gth0}\left(\frac{1}{1-D_G}\right)^{2} \quad (9-115)$$

式中，σ_{eth} 为在纯剪情况下材料等效应力门槛值；Y_{Gth0} 则是在纯剪情况下损伤起始演化时 Y_G 的门槛值。显然，有

$$Y_{Gth0}=\frac{\sigma_{eth}^{2}}{6G} \quad (9-116)$$

将式(9－115)代入式(9－114)，可得

$$W_d=Y_{Gth0}\left(\frac{1}{1-D_G}-1\right) \quad (9-117)$$

由式(9－115)与式(9－117)消去$(1-D_G)$，有

$$Y_{Gth}=Y_{Gth0}\left[1+\left(\frac{W_d}{Y_{Gth0}}\right)^{2}\right] \quad (9-118)$$

由式(9－93)与式(9－111)，可知

$$k(W_d)=\left(\frac{p}{m+1}\right)Y_{Gth}^{m+1} \quad (9-119)$$

将式(9－118)代入式(9－119)，函数 $k(W_d)$ 具有如下形式：

$$k(W_d)=\left(\frac{p}{m+1}\right)Y_{Gth0}^{m+1}\left[1+\left(\frac{W_d}{Y_{Gth0}}\right)^{2}\right]^{m+1} \quad (9-120)$$

由于 $k(W_d)$ 代表材料力学行为，式(9－120)可用于非纯剪的一般情况。这时

$$W_d=\int_0^{D_1}Y_1\mathrm{d}D_1+\int_0^{D_2}Y_2\mathrm{d}D_2=\int_0^{D_G}Y_G\mathrm{d}D_G+\int_0^{D_K}Y_K\mathrm{d}D_K \quad (9-121)$$

以 Y_{G0} 与 Y_{K0} 表示损伤起始演化曲线上点的坐标，它们应该满足式(9－84)，即

$$F(Y_{G0},Y_{K0})=k_0 \quad (9-122)$$

考虑到式(9－111)，上式变为

$$\frac{p}{m+1}\left(Y_{G0}^{m+1}+\kappa Y_{K0}^{m+1}\right)=k_0 \quad (9-123)$$

式中

$$Y_{G0} = \frac{\sigma_{e0}^2}{6G} \tag{9-124}$$

$$Y_{K0} = \frac{\sigma_{m0}^2}{2K} \tag{9-125}$$

这里，σ_{e0}与σ_{m0}分别为非纯剪情况下损伤起始演化的等效与平均应力，即门槛值。由式(9－123)可知，σ_{e0}与σ_{m0}的大小与它们的比值有关。

将式(9－121)代入式(9－120)，可以肯定，$k(W_d)$是损伤变量的函数。

9.2.5　损伤演化方程——循环型

上面得到了在单调加载情况下材料损伤度对时间t的演化率表达式。下面将建立在重复加载情况下材料损伤度对载荷循环次数N的演化率。一个载荷循环包括加载与卸载两个阶段。只有在加载阶段材料才会产生损伤演化。在一个载荷循环内加载阶段的损伤演化可以通过损伤度对时间演化率的积分得到。积分变量为时间，积分下限与上限分别为最小载荷与最大载荷作用的时间，如图9－5所示。

应当指出，对于多个损伤内变量的情况，一般而言，不能得到上述积分的解析形式。为此，引入比例加载条件，而这一条件在多数工程问题中都是客观存在的。进一步，对多次使用的结构材料而言，损伤演化是一个缓慢的过程。因此，在进行每一循环中的时间积分时，可将被积函数中的损伤度视为常数。

对比例加载情况，可将等效应力σ_e与平均应力σ_m写成如下形式：

$$\sigma_e = \bar{\sigma}_e\omega(t), \qquad \sigma_m = \bar{\sigma}_m\omega(t) \tag{9-126}$$

于是，式(9－82)与式(9－83)变为



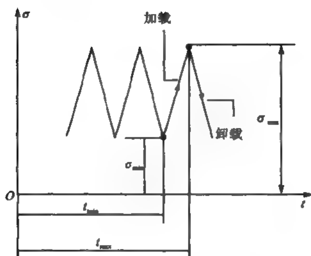


图 9-5　重复加载中的损伤演化

$$Y_G = \bar{Y}_G(D_G)\Omega(t), \qquad Y_K = \bar{Y}_K(D_K)\Omega(t) \tag{9-127}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} \bar{Y}_G(D_G) &= \frac{\bar{\sigma}_e}{6G(1-D_G)^2} \\ \bar{Y}_K(D_K) &= \frac{\bar{\sigma}_e}{2G(1-D_K)^2} \end{aligned}\right\} \tag{9-128}$$

$$\Omega(t) = \omega^2(t) \tag{9-129}$$

在此基础上，令

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_1 = \sigma_e, \quad \bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_e, \quad \sigma_2 = \sigma_m, \quad \bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}_m \\ &Y_1 = Y_G, \quad \bar{Y}_1 = \bar{Y}_G, \quad Y_2 = Y_K, \quad \bar{Y}_2 = \bar{Y}_K \\ &D_1 = D_G, \quad D_2 = D_K \end{aligned}\right\} \tag{9-130}$$

则式(9-111)、式(9-112)与式(9-113)分别变成

$$F(Y_1, Y_2) = \frac{p}{m+1}(\bar{Y}_1^{m+1} + \kappa\bar{Y}_2^{m+1})\Omega^{m+1}(t) \tag{9-131}$$

$$\frac{\partial F}{\partial Y_1} = p\bar{Y}_1^m\Omega^m(t), \qquad \frac{\partial F}{\partial Y_2} = p\kappa\bar{Y}_2^m\Omega^m(t) \tag{9-132}$$

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}=\dot{p}(Y_1^{m+1}+\kappa Y_2^{m+1})\Omega^m(t)\Omega'(t) \qquad (9-133)$$

式中，Y_1 与 $\bar{Y}_2$ 分别为 D_1 与 D_2 的已知函数。

将式(9－131)、式(9－132)与式(9－133)代入式(9－110)，可得损伤度对时间的演化率如下：

$$\frac{\mathrm{d}D_1}{\mathrm{d}t}=\frac{p}{k'(W_d)}\bar{Y}_1^m\Omega^{m-1}(t)\Omega'(t) \qquad (9-134)$$

$$\frac{\mathrm{d}D_2}{\mathrm{d}t}=\frac{p}{k'(W_d)}\kappa\bar{Y}_2^m\Omega^{m-1}(t)\Omega'(t) \qquad (9-135)$$

下面在式(9－134)与式(9－135)的基础上，研究在重复载荷作用下损伤度对载荷循环次数的变化率。为此，需要比较 $\omega(t)$ 与 $\Omega(t)$ 彼此间的共同点与不同点。如图 9－6 所示，由式(9－129)可知：

① 当 $\omega(t)$ 在一个加载周期内不变号时，则 $\omega(t)$ 的一个加载周期 T 对应 $\Omega(t)$ 的一个加载周期 T，如图 9－6(a)所示；

② 当 $\omega(t)$ 在一个加载周期内变号时，则 $\omega(t)$ 的一个加载周期 T 将对应 $\Omega(t)$ 的两个加载周期 T_1 与 T_2，如图 9－6(b)所示。

首先研究情况①。

如果循环中的最小应力大于门槛值，即

$$\sigma_{i\min}=\bar{\sigma}_i\omega(t_{\min})>\sigma_{i0} \qquad (i=1,2)$$

则由式(9－134)与式(9－135)，可知

$$\frac{\mathrm{d}D_i}{\mathrm{d}N}=\int_{t_{\min}}^{t_{\max}}\frac{\mathrm{d}D_i}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\frac{\kappa_i}{k'(W_d)}\frac{p}{m}\bar{Y}_i^m[\Omega^m(t_{\max})-\Omega^m(t_{\min})]=$$

$$\frac{\kappa_i}{k'(W_d)}\frac{p}{m}[Y_{i\max}^m-Y_{i\min}^m] \qquad (9-136)$$

式中，$t_{\min}$，$t_{\max}$ 分别对应 $\sigma_{i\min}$，$Y_{i\min}$ 与 $\sigma_{i\max}$，$Y_{i\max}$。同时，$\kappa_1=1$，$\kappa_2=\kappa$，并不对 i 求和。

如果循环中的最小应力小于门槛值，即

$$\sigma_{i\min}=\bar{\sigma}_i\omega(t_{\min})<\sigma_{i0} \qquad (i=1,2)$$

则



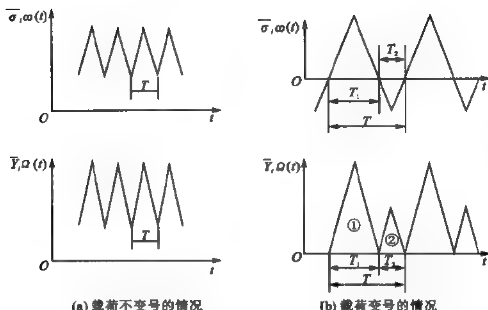


图 9-6　损伤驱动力的作用周期

$$\frac{dD_i}{dN}=\int_{t_0}^{t_{max}}\frac{dD_i}{dt}dt=\frac{\kappa_i}{k'(W_d)}\frac{p}{m}\overline{Y}_i^m[\Omega^m(t_{max})-\Omega^m(t_0)]=$$

$$\frac{\kappa_i}{k'(W_d)}\frac{p}{m}\{Y_{imax}^m-Y_{i0}^m\} \tag{9-137}$$

式中，t_0 对应 σ_{i0} 与 Y_{i0}，即 t_0 为 σ_i 与 Y_i 分别到达 σ_{i0} 与 Y_{i0} 的时间，而 σ_{i0} 为 σ_i 的门槛值，Y_{i0} 为损伤后继演化时 Y_i 的门槛值。

然后研究情况②。

如果循环中最小应力的绝对值大于门槛值，即

$$|\sigma_{imin}|=\bar{\sigma}_i|\omega(t_{min})|>\sigma_{i0}\qquad(i=1,2)$$

则

$$\frac{dD_i}{dN}=\int_{t_{01}}^{t_{max}}\frac{dD_i}{dt}dt+\int_{t_{02}}^{t_{min}}\frac{dD_i}{dt}dt=$$

$$\frac{\kappa_i}{k'(w_d)}\frac{p}{m}[(Y_{imax}^m-Y_{i0}^m)+(Y_{imin}^m-Y_{i0}^m)] \tag{9-138}$$

式中，t_{01} 与 t_{02} 分别为在子循环①与②中应力到达门槛值的时间。

如果循环中最小应力的绝对值小于门槛值，即

$$|\sigma_{i\min}| = \bar{\sigma}_i |\omega(t_{\min})| < \sigma_{i0} \qquad (i = 1,2)$$

则

$$\frac{\mathrm{d}D_i}{\mathrm{d}N} = \frac{\kappa_i}{k'(W_d)} \frac{p}{m}(Y_{i\max}^m - Y_{i0}^m) \tag{9-139}$$

应当指出，在双损伤变量的情况下，损伤演化方程中的材料常数可以通过纯剪以及单轴拉伸两种疲劳实验结果确定。

9.2.6 疲劳寿命预估与材质参数确定

为了确定损伤演化方程中的参数，现考虑两种情况：纯剪与单轴拉伸。

首先，考虑纯剪状态。由式(9-82)与式(9-83)，可知

$$\left.\begin{aligned} Y_{1\max} = Y_{G\max} = \left(\frac{1}{1-D_G}\right)^2 \frac{\sigma_{e\max}^2}{6G} \\ Y_{1\mathrm{th}} = Y_{G\mathrm{th}} = \left(\frac{1}{1-D_G}\right)^2 \frac{\sigma_{e\mathrm{th}}^2}{6G} \end{aligned}\right\} \tag{9-140}$$

$$Y_{2\max} = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}D_2}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{9-141}$$

将式(9-140)代入式(9-137)，并考虑到式(9-79)，可得纯剪时的损伤演化率如下：

$$\frac{\mathrm{d}D_G}{\mathrm{d}N} = \left(\frac{1}{4G}\right)^m \frac{1}{k'} \frac{p}{m}\left(\frac{1}{1-D_G}\right)^{2m}(\tau_{\max}^{2m} - \tau_{\min}^{2m}) \tag{9-142}$$

式中，$\tau_{\max}$与τ_{th}分别为纯切应力最大值与门槛值，$k'=k'(W_d)$是取决于式(9-120)与式(9-121)的D_G的已知函数。对式(9-142)做分离变量积分，可知

$$\left(\frac{1}{4G}\right)^m \frac{p}{m}(\tau_{\max}^{2m} - \tau_{\mathrm{th}}^{2m})N_{\mathrm{r}} = \int_{D_0}^{1} k'(W_d)(1-D_G)^{2m}\mathrm{d}D_G \tag{9-143}$$

式中，N_{r}为$D_G=1$时的载荷循环次数，即纯剪受力状态下的疲劳



寿命。D_0 为初始损伤。

式(9-144)包含三个材质参数 τ_{th},m 与 p。τ_{th}可以直接根据疲劳实验(升降法)确定。m 与 p 则可以根据疲劳实验(成组法),由最小二乘方法得到。

然后,研究单轴拉伸状态。根据式(9-12)与式(9-79),可知

$$\sigma_1 = \sigma_e = \sigma, \qquad \sigma_2 = \sigma_m = \frac{1}{3}\sigma \tag{9-144}$$

式中,σ 为单轴拉伸应力。由式(9-144)与式(9-123),有

$$\frac{p}{m+1}\left[1+\kappa\left(\frac{G}{3K}\right)^{m+1}\right]\left(\frac{1}{6G}\sigma_{th}^2\right)^{m+1} = k_0 \tag{9-145}$$

这里,$\sigma_{th}=\sigma_{e0}$即为单轴拉伸应力门槛值。另外,在纯剪状态下,有

$$\frac{p}{m+1}\left(\frac{1}{4G}\tau_{th}^2\right)^{m+1} = k_0 \tag{9-146}$$

式中,τ_{th}是纯切应力门槛值。

在由纯剪与单轴拉伸疲劳实验求得 p,m,τ_{th} 与 σ_{th}后,即可根据式(9-145)与式(9-146)确定 κ 与 k_0。在此基础上,由式(9-123),可得到确定三向等拉应力门槛值 σ_{mth} 的方程如下:

$$\frac{p}{m+1}\kappa\left(\frac{1}{2k}\sigma_{mth}^2\right)^{m+1} = k_0 \tag{9-147}$$

至此,损伤演化方程中所有材质参数均可确定。

9.2.7　损伤力学基本方程与边界条件

(1) 变形几何方程

在小变形的前提下,此类方程与经典固体力学方程相同,即

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{9-148}$$

式中,u_i 与 ε_{ij} 分别为位移与应变分量。

(2) 本构关系

与经典固体力学不同,损伤力学本构关系应当计及损伤耦合



效应。在双损伤变量情况下，由式(9－17)，应力分量σ_{ij}可表示为

$$\sigma_{ij} = 2G(1-D_G)\left(\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\frac{1}{3}\delta_{kl}\delta_{kl}\right) + K(1-D_K)\delta_{ij}\delta_{kl}\varepsilon_{kl} \tag{9-149}$$

式中，D_G与D_K分别为剪切弹性模量G以及体变弹性模量K的损伤度。

(3) 平衡方程

在小变形的前提下，此类方程与经典固体力学方程相同，即

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + B_i = 0 \tag{9-150}$$

式中，B_i为体力分量。

(4) 位移边界条件

$$u_i = \bar{u}_i \qquad (\text{在 } S_u \text{ 上}) \tag{9-151}$$

式中，$\bar{u}_i$是在边界S_u上给定的位移分量。

(5) 静力边界条件

$$\sigma_{ij} l_j = T_i \qquad (\text{在 } S_T \text{ 上}) \tag{9-152}$$

式中，T_i为在边界S_T上给定的面力分量；l_j为S_T外法线上的方向余弦。

应当指出，由于在损伤力学中引入损伤场量，例如D_G与D_K，还需建立补充方程，这就是损伤演化方程。

(6) 损伤演化方程

以循环中最小应力小于门槛值的情况为例，有

$$\frac{\mathrm{d}D_i}{\mathrm{d}N} = \frac{\kappa_i}{k'(W_d)}\frac{p}{m}(Y_{i\max}^m - Y_{i0}^m) \tag{9-153}$$

式中，$\kappa_1=1$，$\kappa_2=\zeta$，并不对i求和。同时，有

$$Y_{1\max} = \frac{1}{6G}\left(\frac{1}{1-D_G}\right)^2\sigma_{e\max}^2 \tag{9-154}$$

$$Y_{2\max} = \frac{1}{2K}\left(\frac{1}{1-D_K}\right)^2\sigma_{m\max}^2 \tag{9-155}$$

$$Y_{10} = \frac{1}{6G}\left(\frac{1}{1-D_G}\right)^2\sigma_{e0}^2 \tag{9-156}$$



$$Y_{20} = \frac{1}{2K}\left(\frac{1}{1-D_K}\right)^2 \sigma_{eq0}^2 \qquad (9-157)$$

以上内容属于宏观损伤力学理论的范畴，可以用于解决工程实际问题。至于细观损伤力学的问题，可参见以下所列的有关参考文献。

参考文献

[9.1] LEMAITRE J. A Course on Damage Mechanics. New York: Spring-Verlag, 1992.

[9.2] KRAJCINOVIC D, LEMATRE J. Continuum Damage Mechanics-Theory and Application. New York: Spring-Wien, 1987.

[9.3] 黄克智. 损伤与断裂. 见:王仁,等. 塑性力学进展. 北京:中国铁道出版社,1985:31-65.

[9.4] 吴鸿遥. 损伤力学. 北京:国防工业出版社,1990.

[9.5] 余天庆,钱济成. 损伤理论及其应用. 北京:国防工业出版社,1993.

[9.6] 余寿文,冯西桥. 损伤力学. 北京:清华大学出版社,1997.

[9.7] 高玉臣,朱葳. 含微裂纹的损伤理论. 力学学报, 1987,19(6):541-549.

[9.8] 沈为. 弹脆性材料的损伤本构关系及应用. 力学学报,1990,23(3):374-377.

[9.9] 杨卫. 细观力学和细观损伤力学. 力学进展,1992,22(1):1-9.

[9.10] 张行,赵军. 金属构件应用疲劳损伤力学. 北京:国防工业出版社,1998.

[9.11] 庄茁,蒋持平. 工程断裂与损伤. 北京:机械工业出版社,2004.

第10章 疲劳裂纹尖端场的弹性损伤渐近分析

在传统疲劳分析体系中，裂纹形成和裂纹扩展是被当作两个独立的材料劣化过程处理的。但是随着连续介质损伤力学(continuum damage mechanics)的诞生和发展[10.1,10.2]，对疲劳失效的这两类现象的描述则可望被纳入同一个物理框架之内进行。这一工作的开展不仅将疲劳分析由经验分析提升到连续介质力学的范畴，而且在疲劳和断裂研究方面表现出高度的理论价值，同时更由于它提供了裂纹形成实验和裂纹扩展实验之间数据共享的依据，而体现出了可观的应用价值，即从裂纹形成的 $S\sim N$ 曲线所获得的信息可以用来确定裂纹扩展过程的控制参数，反之亦然。

由于疲劳裂纹扩展的控制区具有局部性，因此在建构这一体系时，对疲劳裂纹尖端场的损伤分析就成为必不可少的关键环节。与静力问题[10.3,10.4]不同，本章主要讨论非定常的线弹性疲劳扩展裂纹，当然这在本构关系和边界条件上也有别于塑性或蠕变条件下的扩展裂纹[10.5~10.7]。

在本章，建立了平面问题Ⅰ型裂纹裂尖渐近场的控制方程和边界条件，其中用到了损伤耦合的线弹性应力-应变关系和损伤演化方程。针对若干典型参数计算了裂尖应力场、应变场和损伤场的渐近阶次，以及各场的角分布模态，过程区的形状也由损伤演化的门槛条件所确定。分析表明考虑损伤的裂尖场在奇异性、边界条件等方面均与传统的 K 控制场有较大差别。基于上述分析，初步导出了一个 Paris 型的裂纹扩展速率公式。



10.1　线弹性损伤本构关系

10.1.1　计及损伤耦合效应的应力-应变关系

与传统固体力学相比，连续介质损伤力学的特点在于它将损伤机制引入了材料本构关系。假设材料保持线弹性，在发生损伤后刚度下降，则其应力-应变关系可写为

$$\sigma_{ij} = S_{ijkl}(1-D)\varepsilon_{ij} \tag{10-1}$$

式中，σ_{ij}，ε_{ij} 和 S_{ijkl} 分别为应力、应变（对于循环变化的疲劳载荷，σ_{ij}，ε_{ij} 可分别理解为应力和应变的幅值或最大值）和弹性张量。标量 $D(0\leqslant D\leqslant 1)$ 为损伤变量或损伤度，表示材料刚度下降的比例。为便于后文表示渐近形式，引入连续变量或连续度 $\varphi=1-D(0\leqslant\varphi\leqslant 1)$，从而式(10-1)可改写为

$$\sigma_{ij} = \varphi S_{ijkl}\varepsilon_{ij} \tag{10-2}$$

10.1.2　损伤演化方程

对于一个材料单元，其连续度的演化规律设为

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}N} = \begin{cases} -\tilde{c}\left(\dfrac{\sigma_e}{\varphi}\right)^m \dfrac{1}{\varphi^{n-m}} & (\sigma_e \geqslant \sigma_{th}\varphi^{\gamma}) \\ 0 & (\sigma_e < \sigma_{th}\varphi^{\gamma}) \end{cases} \tag{10-3}$$

式中，N 为疲劳载荷循环周数，$\tilde{c}$，m，$n(n>m)$，γ 和 σ_{th} 均为正值材料参数，而等效应力

$$\sigma_e = \left(\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}\right)^{1/2} \tag{10-4}$$

其中的偏应力张量

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{mm} \tag{10-5}$$

从式(10-3)可以看出，在损伤演化方程中引入了与 φ 有关的门槛条件。如果将 φ 理解为材料受损后的有效承载面积和名义承载面积之比，则可取 $\gamma=1$。

10.2 渐近场基本方程

10.2.1 变形相容方程

由于将疲劳破损过程纳入了连续介质损伤的范畴，因此常规裂纹的概念，会被由那些完全损伤点($D=1$ 或 $\varphi=0$)所形成的细长完全损伤带的中心线所代替(见图 10-1，图中点的密度代表损伤程度)；相应地，在建立控制方程和提出边界条件时也会有别于通常的裂纹问题.

损伤区的最前沿是损伤过程区，即指损伤仍在演化发展的区域，是本章的研究重点。建立坐标系如图 10-2 所示，坐标原点置于完全损伤带中心线的端点(相当于裂纹尖端)，x 轴指向损伤带扩展的方向。对于小范围损伤的渐近分析，采用极坐标系并将有关函数均设为分离变量的形式。对于平面问题，设 Airy 应力函数为

$$A = \alpha r^{\lambda+2}\overline{A}(\theta) \tag{10-6}$$

则应力分量为

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2}, \qquad \sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 A}{\partial r^2}, \qquad \sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial \theta}\right) \tag{10-7}$$



将式(10-6)代入式(10-7)得

$$\sigma_{rr}=\alpha r^{\lambda}\bar{\sigma}_{rr}(\theta),\qquad \sigma_{\theta\theta}=\alpha r^{\lambda}\bar{\sigma}_{\theta\theta}(\theta),\qquad \sigma_{r\theta}=\alpha r^{\lambda}\bar{\sigma}_{r\theta}(\theta) \tag{10-8}$$

$$\left.\begin{aligned}\bar{\sigma}_{rr}&=(\lambda+2)\bar{A}+\bar{A}''\\ \bar{\sigma}_{\theta\theta}&=(\lambda+2)(\lambda+1)\bar{A}\\ \bar{\sigma}_{r\theta}&=-(\lambda+1)\bar{A}'\end{aligned}\right\} \tag{10-9}$$

式中,()′表示 d()/dθ。

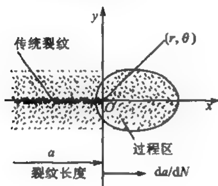


图 10-1 损伤过程区示意图

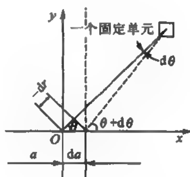


图 10-2 裂纹扩展时的几何关系

过程区的损伤场用连续度表示,也设为如下分离变量的形式:

$$\varphi=\beta r^{\mu}\bar{\varphi}(\theta) \tag{10-10}$$

设 $\mu>0$,则在裂纹尖端 $r=0$,而 $\varphi=0$,同时在任一方向 θ 上 φ 应随 r 增大而增大,这是符合事实的。

对于平面问题,利用式(10-1)与式(10-2)可得应变为

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_{rr}=\frac{1}{E_1\varphi}(\sigma_{rr}-\nu_1\sigma_{\theta\theta}),\qquad \varepsilon_{\theta\theta}=\frac{1}{E_1\varphi}(\sigma_{\theta\theta}-\nu_1\sigma_{rr})\\ &\varepsilon_{r\theta}=\frac{1+\nu_1}{E_1\varphi}\sigma_{r\theta}\end{aligned}\right\} \tag{10-11}$$

设杨氏弹性模量和泊松比分别为 E 和 ν,则上式中对于平面应力问题,$E_1=E$,而 $\nu_1=\nu$;对于平面应变问题,$E_1=E/(1-\nu^2)$,而 $\nu_1=\nu/(1-\nu)$。将式(10-8)、式(10-9)及式(10-10)代入式(10-11)得

$$\varepsilon_{rr}=\frac{\alpha}{\beta E_1}r^{\lambda-\mu}\bar{\varepsilon}_{rr}(\theta),\qquad \varepsilon_{\theta\theta}=\frac{\alpha}{\beta E_1}r^{\lambda-\mu}\bar{\varepsilon}_{\theta\theta}(\theta),\quad \varepsilon_{r\theta}=\frac{\alpha}{\beta E_1}r^{\lambda-\mu}\bar{\varepsilon}_{r\theta}(\theta)\tag{10-12}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}&\bar{\varepsilon}_{rr}(\theta)=\bar{\varphi}^{-1}(e_1\bar{A}+\bar{A}''),\qquad e_1=(\lambda+2)(1-\nu_1\lambda-\nu_1)\\&\bar{\varepsilon}_{\theta\theta}(\theta)=\bar{\varphi}^{-1}(e_2\bar{A}-\nu_1\bar{A}''),\qquad e_2=(\lambda+2)(\lambda-\nu_1+1)\\&\bar{\varepsilon}_{r\theta}(\theta)=\bar{\varphi}^{-1}e_3\bar{A}',\qquad e_3=-(\lambda+1)(1+\nu_1)\end{aligned}\right\}\tag{10-13}$$

将式(10-12)和式(10-13)代入下列变形相容方程

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2\varepsilon_{rr}}{\partial\theta^2}-\frac{\partial\varepsilon_{rr}}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varepsilon_{\theta\theta})-\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varepsilon_{r\theta}}{\partial\theta}\right)=0\tag{10-14}$$

得到

$$\bar{A}''''-2\,\overline{EA}'''+(b_1+\bar{G})\bar{A}''-b_2\,\overline{EA}'+(b_3+e_1\bar{G})\bar{A}=0\tag{10-15}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}&\bar{E}=\bar{\varphi}'/\bar{\varphi},\qquad \bar{G}=2\bar{E}^2-(\bar{\varphi}''/\bar{\varphi})\\&b_1=e_1+c_2-c_3\nu_1+c_1e_3,\qquad b_2=2e_1+c_1e_3\\&b_3=c_2e_1+c_3e_2\\&c_1=-2(\lambda-\mu+1),\qquad c_2=\mu-\lambda\\&c_3=(\lambda-\mu)(\lambda-\mu+1)\end{aligned}\right\}\tag{10-16}$$

10.2.2 损伤演化协调条件

过程区渐近场除了要满足代表变形相容条件的式(10-15)、式(10-16)之外,还要满足损伤演化协调条件,即对同一个质点,由损伤演化方程所导出的损伤演化速率与通过对损伤场求物质导数所得到的损伤演化速率应当一致。



首先考虑前者。将式(10-8)至式(10-10)代入式(10-3)至式(10-5)可得

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}N}=-\bar{c}\alpha^{m}\beta^{-n}r^{m\lambda-\mu n}\bar{\sigma}_{e}^{m}\bar{\varphi}^{-n} \tag{10-17}$$

式中

$$\bar{\sigma}_{e}=(\bar{\sigma}_{rr}^{2}-\bar{\sigma}_{rr}\bar{\sigma}_{\theta\theta}+\bar{\sigma}_{\theta\theta}^{2}+3\bar{\sigma}_{r\theta}^{2})^{1/2} \tag{10-18}$$

需要注意的是,式(10-17)的适用区(也即损伤过程区)由门槛条件式(10-3)限定如下:

$$\alpha r^{\lambda}\bar{\sigma}_{e}\geqslant\sigma_{\mathrm{th}}\beta r^{\mu}\bar{\varphi}\qquad(\gamma=1) \tag{10-19}$$

或写为

$$q(r,\theta)\geqslant 1 \tag{10-20}$$

而 $q(r,\theta)$ 的渐近形式为

$$q(r,\theta)=\frac{\alpha}{\beta\sigma_{\mathrm{th}}}r^{\lambda-\mu}\frac{\bar{\sigma}_{e}}{\bar{\varphi}} \tag{10-21}$$

这里假定 $\lambda-\mu<0$(这与后面的结果自洽),从而当 $r\to0$ 时,在裂尖邻域总存在一个满足式(10-20)的区域。

另由链式求导法可知

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}N}=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}a}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}N} \tag{10-22}$$

式中,a 表示裂纹长度(见图 10-2);$\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}a$ 表示以 a 为广义时间所计算的连续度变化率。由式(10-10)可得

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}a}=\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}a}+\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}a}+\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}a} \tag{10-23}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}a}=r^{\mu}\varphi\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}a}+\mu\beta r^{\mu-1}\varphi\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}a}+\beta r^{\mu}\bar{\varphi}'\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}a} \tag{10-24}$$

观察图 10-2 中的几何关系可得

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}a}=-\cos\theta,\qquad\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}a}=\frac{1}{r}\sin\theta \tag{10 25}$$

将式(10-25)代入式(10-24)得到



$$\frac{d\varphi}{da}=r^{\mu}\bar{\varphi}\frac{d\beta}{da}+\beta r^{\mu-1}(-\mu\bar{\varphi}\cos\theta+\bar{\varphi}'\sin\theta) \quad (10-26)$$

无论对于定常或非定常扩展，在 $r\to 0$ 时，上式中的第一项相对第二项总为高阶小量。将第一项忽略并将式(10-26)代入式(10-22)得

$$\frac{d\varphi}{dN}=\beta\frac{da}{dN}r^{\mu-1}(\bar{\varphi}'\sin\theta-\mu\bar{\varphi}\cos\theta) \quad (10-27)$$

对比式(10-17)和式(10-27)，可得到一系列可以称为损伤演化协调条件的方程

$$\frac{da}{dN}=\bar{c}a^{m}\beta^{-(n+1)} \quad (10-28)$$

$$m\lambda-\mu n=\mu-1 \quad (10-29)$$

$$\bar{\varphi}'\sin\theta-\mu\bar{\varphi}\cos\theta=-\bar{\sigma}_e^{m}\bar{\varphi}^{-n} \quad (10-30)$$

由式(10-29)可见，λ 与 μ 彼此不独立，可将前者作为后者的导出量，从而式(10-15)和式(10-30)可以视为一组关于特征值 μ 的特征方程。

10.3 边界条件和解法

10.3.1 边界条件

考虑到应力场和损伤场关于裂纹的对称性可得

$$\bar{A}'(0)=\bar{A}'''(0)=0,\qquad \bar{\varphi}'(0)=0 \quad (10-31)$$

又因式(10-15)关于 $\bar{A}$ 是齐次的，所以可令

$$\bar{A}(0)=1 \quad (10-32)$$

利用式(10-9)、式(10-18)、式(10-31)和式(10-32)，并对式(10-15)、式(10-30)求极限可得



$$\left.\begin{aligned}\bar{\varphi}(0) &= [\bar{\sigma}_e^m(0)/\mu]^{1/(n+1)} \\ \bar{\varphi}''(0) &= f[\mu,\bar{A}''(0)]\end{aligned}\right\} \tag{10-33}$$

式中 f 的具体形式见附录 B。由式 (10－33)可见，$\bar{\varphi}(0)$和 $\bar{\varphi}''(0)$均取决于 μ 和$\bar{A}''(0)$，而它们可以通过下述边界条件定出。

计算表明，传统的裂纹表面为自由表面的条件，以及引入损失机制后视裂纹表面达到完全损伤的条件，也即

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{\theta\theta}(r,\pi) = \sigma_{r\theta}(r,\pi) = 0 \\ \varphi(r,\pi) = 0\end{aligned}\right\} \tag{10-34}$$

对于当前问题并得不到解。考虑到在本模型框架下，裂纹已经被损伤带所代替，因此用 V 形缺口的边界条件会更加合理，也即采用

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{\theta\theta}(r,\theta_d) = \sigma_{r\theta}(r,\theta_d) = 0 \\ \varphi(r,\theta_d) = 0\end{aligned}\qquad (0<\theta_d\leqslant\pi)\right\} \tag{10-35}$$

显然，式(10－34)只是式 (10－35)的特殊情况。将式(10－8)、式(10－9)和式(10－10)代入式(10－35)得

$$\left.\begin{aligned}\bar{A}(\theta_d) = \bar{A}'(\theta_d) = 0 \\ \bar{\varphi}(\theta_d) = 0\end{aligned}\qquad (0<\theta_d\leqslant\pi)\right\} \tag{10-36}$$

以下讨论由式(10－36)求解 μ 和$\bar{A}''(0)$的方法。

10.3.2 求解方法

鉴于任给 μ 和$\bar{A}''(0)$，利用式(10－29)、式(10－31)至式(10－33)，积分式(10－15)和式(10－30)可以得到一个 θ^*，并满足

$$\varphi(\theta^*) = 0 \tag{10-37}$$

因此 θ^* 可以视为 μ 和$\bar{A}''(0)$的一个函数，进而$\bar{A}(\theta^*)$和$\bar{A}'(\theta^*)$也可分别视为 μ 和$\bar{A}''(0)$的函数，并表示为

$$\bar{A}(\theta^*) = \bar{A}\{\theta^*[\mu,\bar{A}''(0)]\},\qquad \bar{A}'(\theta^*) = \bar{A}'\{\theta^*[\mu,\bar{A}''(0)]\} \tag{10-38}$$

显然任给 μ 和$\bar{A}''(0)$并不能满足$\bar{A}(\theta^*)=\bar{A}'(\theta^*)=0$，所以确定真实的 μ 和$\bar{A}''(0)$的条件即



$$\overline{A}\{\theta^{*}[\mu,A''(0)]\} = 0, \qquad \overline{A}'\{\theta^{*}[\mu,\overline{A}''(0)]\} = 0 \tag{10-39}$$

而满足上式的 θ^{*} 也就是 θ_{d}。

总之，问题归结为利用式(10－29)和边界条件式(10－31)至式(10－33)，通过积分式(10－15)和式(10－30)，找到满足式(10－39)的 μ 和 $\overline{A}''(0)$，同时也就得到了各场量的渐近解。

10.4 参数研究

10.4.1 奇异性阶次

针对损伤演化方程式(10－3)中参数 m，n 的一系列典型取值进行了数值计算，取泊松比 $\nu_1=0.3$，采用了自适应变步长的四阶 Runge-Kutta 法对式(10－15)和式(10－30)进行积分，特征值 μ 和初值 $\overline{A}''(0)$通过解非线性方程组式(10－39)确定。主要计算结果见表 10－1 和图 10－3、图 10－4。子图号(1)至(6)的意义也同时表示于表 10－1 中。其中应力和连续度的角分布函数都做了无量纲化处理，即

$$\tilde{\sigma}_{ij}(\theta) = \hat{\sigma}_{ij}(\theta)/\bar{\sigma}_{\theta\theta}(0), \qquad \tilde{\varphi}(\theta) = \bar{\varphi}(\theta)/\bar{\varphi}(0) \tag{10-40}$$

表 10－1 渐近阶次及角分布参数

m	n	μ	λ	$\lambda-\mu$	$\theta_d/(°)$	子图号
2	2	0.321 6	−0.010 8	−0.336 9	131.2	(1)
2	4	0.333 3	0.333 2	−0.000 1	90.0	(2)
2	7	0.166 6	0.166 4	−0.000 2	90.0	(3)
4	4	0.283 4	0.104 3	−0.179 1	115.0	(4)
4	7	0.169 8	0.089 5	−0.080 2	95.9	(5)
7	7	0.185 7	0.069 3	−0.116 3	111.2	(6)



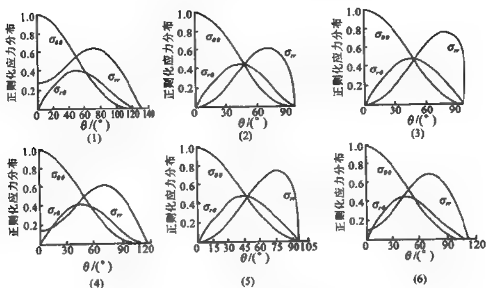


图 10-3　无量纲化的应力分布

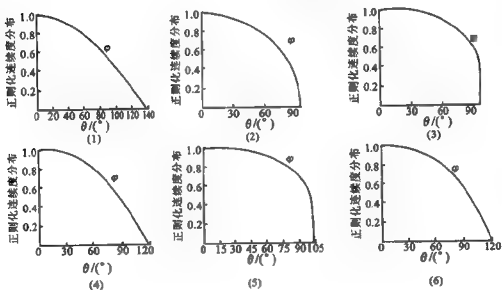


图 10-4　无量纲化的连续度分布



10.4.2 过程区形状

图 10－5 则表示无量纲化的过程区形状，其中

$$\tilde{r}_d(\theta) = r_d(\theta)/\omega, \qquad \omega = r_d(0) \tag{10-41}$$

而

$$q(r_d,\theta) = 1, \qquad q(\omega,0) = 1 \tag{10-42}$$

式中，$q(r,\theta)$由式(10－21)确定。

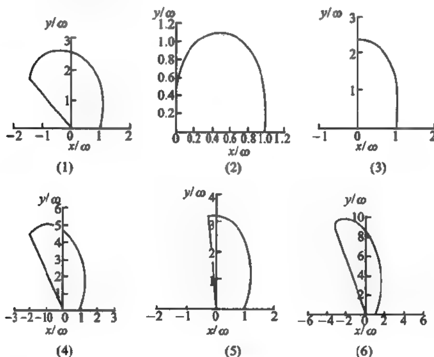


图 10－5　过程区形状

从以上结果中可以看出：① 在裂纹尖端应力场(渐近阶次为 λ)大部分无奇异性，除个别情况有弱奇异性；② 在裂纹尖端应变场(渐近阶次为 $\lambda-\mu$)的奇异性较传统的 K 控制场的奇异性($-1/2$)大为降低；③ 在裂纹上半平面内 θ_d 的范围均在 $\pi/2$ 和 π 之间；④ 在裂纹上半平面内 $0\leqslant\theta\leqslant\theta_d$ 的区域为损伤活动区($\varphi>0, \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}N<0$)，而 $\theta_d\leqslant$



$\theta \leqslant \pi$ 的区域为损伤驻止区($\varphi=0, \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}N=0$)。

10.5 疲劳裂纹扩展

10.5.1 区间连续条件

从式(10－28)可知，当 α 和 β 一旦确定，则裂纹扩展速率也就随之而定。为此假定在小范围损伤下过程区周边近场的构成情况为：在最外围仍存在传统的 K_{I} 控制场，而在损伤过程区与 K_{I} 控制场之间应存在一个线弹性无损过渡区(见图 10－6)。设过渡区应力场为

$$\sigma_{ij}^{\mathrm{tr}}(r,\theta)=\widetilde{K}_{\mathrm{I}}r^{-1/p}\tilde{\sigma}_{ij}^{\mathrm{tr}}(\theta) \tag{10-43}$$

式中，$\widetilde{K}_{\mathrm{I}}$($\widetilde{K}_{\mathrm{I}} \propto K_{\mathrm{I}}$)是过渡区的应力强度因子，又考虑到损伤带的影响，在某种程度上过渡区的性质应类似一个 V 形缺口的渐近场，因而应有 $p>2$[10.8]。

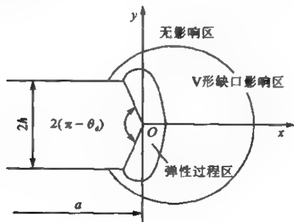


图 10－6　裂尖场分区示意图

作为初步分析，仅考虑过程区与过渡区在 $\theta=0$ 和 $r=\omega$ 处的

界面条件,包括应力连续、损伤连续和门槛条件,即

$$\sigma_{rr}(\omega,0)=\sigma_{rr}^{t}(\omega,0) \tag{10-44}$$

$$\varphi(\omega,0)=1 \tag{10-45}$$

$$q(\omega,0)=1 \tag{10-46}$$

10.5.2 裂纹扩展速率

利用式(10-8)、式(10-9)、式(10-10)、式(10-21)和式(10-43)联立求解式(10-44)、式(10-45)和式(10-46)三个方程得到

$$\omega=\left[\frac{\widetilde{K}_{\mathrm{I}}\bar{\sigma}_{e}(0)\bar{\sigma}_{rr}^{t}(0)}{\sigma_{\mathrm{th}}\bar{\sigma}_{rr}(0)}\right]^{p} \tag{10-47}$$

$$\alpha=\left[\frac{\bar{\sigma}_{rr}(0)}{\widetilde{K}_{\mathrm{I}}\bar{\sigma}_{rr}^{t}(0)}\right]^{p\lambda}\left[\frac{\sigma_{\mathrm{th}}}{\bar{\sigma}_{e}(0)}\right]^{p\lambda+1} \tag{10-48}$$

$$\beta=\frac{1}{\bar{\varphi}(0)}\left[\frac{\sigma_{\mathrm{th}}\bar{\sigma}_{rr}(0)}{\widetilde{K}_{\mathrm{I}}\bar{\sigma}_{rr}^{t}(0)\bar{\sigma}_{e}(0)}\right]^{pm} \tag{10-49}$$

将式(10-48)和式(10-49)代入式(10-28)并利用式(10-29)得到

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}N}=c\widetilde{K}_{\mathrm{I}}^{p} \tag{10-50}$$

$$c=\bar{c}[\bar{\varphi}(0)]^{n+1}\left[\frac{\sigma_{\mathrm{th}}}{\bar{\sigma}_{e}(0)}\right]^{m-p}\left[\frac{\bar{\sigma}_{rr}^{t}(0)}{\bar{\sigma}_{rr}(0)}\right]^{p} \tag{10-51}$$

显然,式(10-50)是一个 Paris 型的裂纹扩展速率公式。特别当过渡区就是通常的 K 控制场,则 $\widetilde{K}_{\mathrm{I}}=K_{\mathrm{I}}$,$p=2$,这时

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}N}=cK_{\mathrm{I}}^{2} \tag{10-52}$$

这在参考文献[10.9]中曾经提到。

10.6 结 论

根据以上分析结果可以得到下列结论:



① 在损伤力学框架下，传统的疲劳裂纹可用一个不断扩展的损伤带替代；

② 考虑损伤后裂尖渐近场在奇异性和角分布模态等方面与传统的 K 控制场有很大差别；

③ 裂纹扩展速率公式可以由理论导出，这意味着疲劳裂纹形成和裂纹扩展可以在损伤力学框架下统一起来。

参考文献

[10.1] CHABOCHE J L. Continuum Damage Mechanics. J. Appl. Mech., 1988, 55:59-72.

[10.2] KRAJCINOVIC D, LEMAITRE J. Continuum Damage Mechanics-Theory and Applications. Springer, New York, 1987.

[10.3] HUTCHINSON J W. Singular Behavior at the End of a Tensile Crack in Hardening Materials. J. Mech. Phys. Solids, 1968, 16:13-31.

[10.4] WANG J, CHOW C L. HRR Fields for Damaged Materials. Int. J. Fracture, 1992, 54:165-183.

[10.5] KANNINEN M F, POPELAR C H. Advanced Fracture Mechanics. Oxford University Press, New York/Clarendon Press, Oxford, 1985.

[10.6] HUI C Y, RIEDEL H. The Asymptotic Stress and Strain Field near the tip of a Growing Crack under Creep Conditions. Int. J. Fracture, 1981, 17:409-425.

[10.7] RIEDEL H. Creep Crack Growth Under Small-Scale Creep Conditions. Int. J. Fracture, 1990, 42:138-173.

[10.8] WU S F, ZHANG X, HE Q Z. A New Conservative Integral with Arbitrary Singularity and Its Application. Int. J. Fracture, 1989, 40:221-233.

[10.9] LIU H W. A Review of Crack Growth Analysis. Theo. Appl. Fracture Mechanics, 1991, 16:91-108.

[10.10] ZHAO JUN, ZHANG XING. The Asymptotic Study of Fatigue Crack Growth Based on Damage Mechanics Engineering. Fracture Mechanics, 1995, 50(1):131-141.

第 11 章　疲劳裂纹尖端场的弹塑性损伤渐近分析

由疲劳裂纹尖端场弹性损伤渐近分析的结果可知，裂尖应变场仍具有奇异性。根据 Lemaitre 的应变等效性原理[11.1]，应变场阶次与真应力(等效应力)场阶次相等。这说明真应力场也具有奇异性，因而在裂尖邻域一定存在弹塑性过程区。本章即对平面问题Ⅰ型疲劳裂尖场进行弹塑性损伤渐近分析。针对若干典型参数计算了裂尖应力场、应变场和损伤场的渐近阶次，以及各场的角分布模态；过程区的形状则由屈服条件确定。基于上述分析导出了一个 Paris 型的裂纹扩展速率公式。

11.1　弹塑性损伤本构关系

11.1.1　计及损伤耦合效应的应力-应变关系

对于一个长寿命的构件而言，在一个加载循环内疲劳裂纹的扩展量远远小于裂纹长度，由此产生的非简单加载区远小于周围的简单加载区，所以在裂尖附近距裂尖稍远的区域仍以简单加载(或称比例加载)为主。故根据全量理论和应变等效性原理，可以得到弹塑性疲劳损伤本构关系为



$$\left.\begin{aligned}&\tilde{e}_{ij}=\frac{3\tilde{\varepsilon}_e}{2\tilde{\sigma}_e^*}\tilde{s}_{ij}^*,\qquad \tilde{\varepsilon}_{kk}=\frac{E}{1-2\nu}\tilde{\sigma}_{kk}^*,\qquad \tilde{s}_{ij}^*=\frac{\tilde{s}_{ij}}{\varphi}\\&\tilde{\sigma}_{kk}^*=\frac{\tilde{\sigma}_{kk}}{\varphi},\qquad \tilde{\sigma}_e^*=\frac{\tilde{\sigma}_e}{\varphi}\\&\tilde{\sigma}_e=\sqrt{3\tilde{s}_{ij}\tilde{s}_{ij}/2},\qquad \tilde{\varepsilon}_e=\sqrt{2\tilde{e}_{ij}\tilde{e}_{ij}/3}\\&\tilde{s}_{ij}=\tilde{\sigma}_{ij}-\delta_{ij}\tilde{\sigma}_{kk}/3,\qquad \tilde{e}_{ij}=\tilde{\varepsilon}_{ij}-\delta_{ij}\tilde{\varepsilon}_{kk}/3\end{aligned}\right\}\quad(11-1)$$

式中，E 和 ν 分别为弹性模量和泊松比；$\tilde{\sigma}_{ij}$ 和 $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ 分别为应力 σ_{ij} 和应变 ε_{ij} 在一个加载循环内的变程(其他带"～"的量也都表示相应量的变程)，$\varphi(0\leqslant\varphi\leqslant1)$ 表示连续度，反映受损材料的剩余有效承载面积与初始完好材料的承载面积之比。为得到上述应力和应变变程之间的具体关系式，先引入单调加载的三参数弹塑性本构模型

$$\varepsilon_e=\frac{\sigma_e}{E}+b\left(\frac{\sigma_e}{E}\right)^n \qquad (11-2)$$

式中，b 和 n 为材料常数。利用 Maisng 原理[11,2]及上式可得循环加载如下：

$$\frac{\tilde{\varepsilon}_e}{\kappa_1}=\frac{\tilde{\sigma}_e}{\kappa_1 E}+b\left(\frac{\tilde{\sigma}_e}{\kappa_1 E}\right)^n \qquad (11-3)$$

式中，对于运动硬化模型，$\zeta_1=2$。进一步，根据应变等效性原理有

$$\frac{\tilde{\varepsilon}_e}{\kappa_1}=\frac{\tilde{\sigma}_e^*}{\kappa_1 E}+b\left(\frac{\tilde{\sigma}_e^*}{\kappa_1 E}\right)^n \qquad (11-4)$$

在当前问题中，设 σ_{ij}^* 在裂尖具有奇异性(这一假定与后面结果自洽)并考虑到 $n>1$，则式(11-4)中的主项即是其中的非线性项，从而在裂尖邻域式(11-4)退化为

$$\frac{\tilde{\varepsilon}_e}{\kappa_1}=b\left(\frac{\tilde{\sigma}_e^*}{\kappa_1 E}\right)^n \qquad (11-5)$$

利用式(11-1)和式(11-5)，并忽略弹性体积应变的影响，最终得到

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}=\kappa\tilde{\sigma}_e^{n-1}\tilde{s}_{ij}\varphi^{-n},\qquad \kappa=3b\kappa_1/2(\kappa_1 E)^n \qquad (11-6)$$



11.1.2 损伤演化方程

损伤演化方程用一个加载循环内的连续度下降量表示[11.3]，即

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}N}=\begin{cases}-C(R)\tilde{Y}^{p+1} & (\tilde{Y}>\tilde{Y}_{\mathrm{th}})\\ 0 & (\tilde{Y}\leqslant\tilde{Y}_{\mathrm{th}})\end{cases}\tag{11-7}$$

式中，$C(R)$为应力循环比 R 的函数；p 为材料常数；$\tilde{Y}$ 为损伤驱动力，其表达式为

$$\tilde{Y}=\frac{1}{2}C_{ijkl}\varphi^{-2}\tilde{\sigma}_{ij}\tilde{\sigma}_{kl}=\frac{1}{2}C_{ijkl}\bar{\sigma}_{ij}^{*}\bar{\sigma}_{kl}^{*}\tag{11-8}$$

式中，C_{ijkl}为无损材料的柔度张量。

11.2 渐近场基本方程

11.2.1 变形相容方程

现在考虑图 11-1 所示的Ⅰ型疲劳裂纹的应力、应变的变程场和损伤场。设 Airy 应力函数为

$$\tilde{A}=\tilde{\alpha}r^{\lambda+2}\bar{A}(\theta)\tag{11-9}$$

则应力为

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{rr}&=\tilde{\alpha}r^{\lambda}\bar{\sigma}_{rr}(\theta)\\ \tilde{\sigma}_{\theta\theta}&=\tilde{\alpha}r^{\lambda}\bar{\sigma}_{\theta\theta}(\theta)\\ \tilde{\sigma}_{r\theta}&=\tilde{\alpha}r^{\lambda}\bar{\sigma}_{r\theta}(\theta)\end{aligned}\right\}\tag{11-10}$$

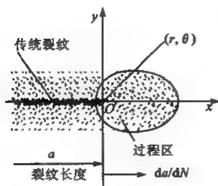


图 11-1 损伤过程区示意图



式中

$$\left.\begin{aligned}&\bar{\sigma}_{rr}=(\lambda+2)\bar{A}+\bar{A}'',\qquad \bar{\sigma}_{\theta\theta}=(\lambda+2)(\lambda+1)\bar{A}\\&\bar{\sigma}_{r\theta}=-(\lambda+1)\bar{A}'\end{aligned}\right\}\tag{11-11}$$

而$()'=\mathrm{d}()/\mathrm{d}\theta$。利用式(11-1)和式(11-10)可得

$$\tilde{s}_{rr}=\tilde{\alpha}r^{\lambda}\bar{s}_{rr}(\theta),\qquad \tilde{s}_{\theta\theta}=\tilde{\alpha}r^{\lambda}\bar{s}_{\theta\theta}(\theta),\qquad \tilde{s}^{r\theta}=\tilde{\alpha}r^{\lambda}\bar{s}_{r\theta}(\theta)\tag{11-12}$$

$$\bar{s}_{rr}=z_1\bar{\sigma}_{rr}-z_2\bar{\sigma}_{\theta\theta},\qquad \bar{s}_{\theta\theta}=z_1\bar{\sigma}_{\theta\theta}-z_2\bar{\sigma}_{rr},\qquad \bar{s}_{r\theta}=\bar{\sigma}_{r\theta}\tag{11-13}$$

式中,对于平面应力状态,$z_1=2/3$,$z_2=1/3$;对于平面应变状态,$z_1=z_2=1/2$。

将式(11-12)代入式(11-1)得到

$$\sigma_e=\tilde{\alpha}r^{\lambda}\bar{\sigma}_e(\theta)\tag{11-14}$$

式中

$$\sigma_e=\begin{cases}(\bar{\sigma}_{rr}^2+\bar{\sigma}_{\theta\theta}^2-\bar{\sigma}_{rr}\bar{\sigma}_{\theta\theta}+3\bar{\sigma}_{r\theta}^2)^{1/2} & (\text{平面应力})\\ [3(\bar{\sigma}_{rr}-\bar{\sigma}_{\theta\theta})^2+3\bar{\sigma}_{r\theta}^2]^{1/2} & (\text{平面应变})\end{cases}\tag{11-15}$$

对于损伤场,考虑到裂尖应完全损伤,其连续度为零,且连续度随距裂尖距离递增,故可设

$$\varphi=\beta r^{\mu}\bar{\varphi}(\theta)\tag{11-16}$$

利用式(11-6)、式(11-12)、式(11-14)和式(11-16),可得应变场为

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{\varepsilon}_{rr}=\zeta\left(\frac{\tilde{\alpha}}{\beta}\right)^n r^{n(\lambda-\mu)}\bar{\varepsilon}_{rr}(\theta),\qquad \tilde{\varepsilon}_{\theta\theta}=\zeta\left(\frac{\tilde{\alpha}}{\beta}\right)^n r^{n(\lambda-\mu)}\bar{\varepsilon}_{\theta\theta}(\theta)\\&\tilde{\varepsilon}_{r\theta}=\zeta\left(\frac{\tilde{\alpha}}{\beta}\right)^n r^{n(\lambda-\mu)}\bar{\varepsilon}_{r\theta}(\theta)\end{aligned}\right\}\tag{11-17}$$

$$\bar{\varepsilon}_{rr}=\bar{\varphi}^{-n}\bar{\sigma}_e^{n-1}\bar{s}_{rr},\qquad \bar{\varepsilon}_{\theta\theta}=\bar{\varphi}^{-n}\bar{\sigma}_e^{n-1}\bar{s}_{\theta\theta},\qquad \bar{\varepsilon}_{r\theta}=\bar{\varphi}^{-n}\bar{\sigma}_e^{n-1}\bar{s}_{r\theta}\tag{11-18}$$

把式(11－17)代入如下相容方程：

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2\bar{\varepsilon}_{rr}}{\partial\theta^2}-\frac{\partial\bar{\varepsilon}_{rr}}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\bar{\varepsilon}_{\theta\theta})-\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\bar{\varepsilon}_{r\theta}}{\partial\theta}\right)=0 \tag{11-19}$$

可得

$$\bar{\varepsilon}''_{rr}+e_1\bar{\varepsilon}'_{r\theta}+e_2\bar{\varepsilon}_{rr}+e_3\bar{\varepsilon}_{\theta\theta}=0 \tag{11-20}$$

$$\left.\begin{aligned}e_1&=-2(e+1), & e_2&=-e\\ e_3&=e(e+1), & e&=n(\lambda-\mu)\end{aligned}\right\} \tag{11-21}$$

式(11－20)成为一个关于$\bar{A}$和φ且含有特征值λ和μ的四阶常微分方程。

11.2.2 损伤演化协调条件

现在讨论损伤演化方程的渐近形式。由式(11－8)、式(11－10)和式(11－16)得到

$$\tilde{Y}=\frac{1}{E}\left(\frac{\tilde{\alpha}}{\beta}\right)^2 r^{2(\lambda-\mu)}\bar{Y}(\theta),\qquad \bar{Y}(\theta)=\frac{1}{2}EC_{ijkl}\bar{\varphi}^{-2}\bar{\sigma}_{ij}\bar{\sigma}_{kl} \tag{11-22}$$

将式(11－22)代入式(11－7)，并考虑到当$r\to0$及$\lambda-\mu<0$时总有$\tilde{Y}>\tilde{Y}_{th}$，从而得到

$$\frac{d\varphi}{dN}=-\frac{C}{E^{p+1}}\left(\frac{\tilde{\alpha}}{\beta}\right)^{2p+2}r^{2(p+1)(\lambda-\mu)}\bar{Y}^{p+1} \tag{11-23}$$

另一方面，利用图11－2中的几何关系有$dr/da=-\cos\theta$和$d\theta/da=r^{-1}\sin\theta$，从而由式(11－16)得

$$\frac{d\varphi}{dN}=\frac{d\varphi}{da}\frac{da}{dN}=\left[\frac{d\beta}{da}r^{\mu}\bar{\varphi}+\beta r^{\mu-1}(\bar{\varphi}'\sin\theta-\mu\bar{\varphi}\cos\theta)\right]\frac{da}{dN} \tag{11-24}$$

当$\mu<1$时，保留式(11－24)的主项得到

$$\frac{d\varphi}{dN}=\beta r^{\mu-1}(\bar{\varphi}'\sin\theta-\mu\bar{\varphi}\cos\theta)\frac{da}{dN} \tag{11-25}$$



对比式(11-23)和式(11-25)可以得到一组损伤演化协调条件

$$\bar{\varphi}'\sin\theta-\mu\bar{\varphi}\cos\theta=-\bar{Y}^{p+1} \tag{11-26}$$

$$2(p+1)(\lambda-\mu)=\mu-1 \tag{11-27}$$

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}N}=\frac{C}{E^{p+1}\beta}\left(\frac{\tilde{a}}{\beta}\right)^{2p+1} \tag{11-28}$$

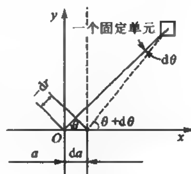


图11-2 裂纹扩展时的几何关系

其中式(11-27)表明 λ 和 μ 并不独立，因此式(11-17)与式(11-26)构成关于特征函数 $\bar{A}$ 和 $\bar{\varphi}$ 以及特征值 μ 的求解问题。式(11-28)将用于确定裂纹扩展速率。

11.3 边界条件和解法

11.3.1 边界条件

按常规裂纹场分析来看，方程式(11-20)和式(11-26)的求解是关于 $\bar{A}$ 和 $\bar{\varphi}$ 的两点边值问题(分别在 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$)。由于Ⅰ型裂纹场具有对称性，所以

$$\bar{A}'(0)=\bar{A}'''(0)=\bar{\varphi}'(0)=0 \tag{11-29}$$

又因 $\bar{A}(\theta)$ 主要反映 Ariy 应力函数的角分布模态，故不失一般性可设

$$\bar{A}(0)=1 \tag{11-30}$$

利用式(11-20)和式(11-26)经过复杂的极限运算可以导出

$$\varphi(0)=f_1(\mu,A_0''),\qquad \varphi''(0)=f_2(\mu,A_0'') \tag{11-31}$$



式中 $\overline{A}''_0$ 表示 $\overline{A}''(0)$。为节约篇幅，式(11-31)的具体形式不再列出。

在裂纹表面要满足表面自由和完全损伤的要求，即

$$\tilde{\sigma}_{\theta\theta}(r,\pi)=\tilde{\sigma}_{r\theta}(r,\pi)=0,\qquad \varphi(r,\pi)=0 \quad (11-32)$$

然而，连续度 φ 可能在某一角度 $\theta_d\in(0,\pi]$ 已降为零。因此一种更合理的提法是

$$\tilde{\sigma}_{\theta\theta}(r,\theta_d)=\tilde{\sigma}_{r\theta}(r,\theta_d)=0,\qquad \varphi(r,\theta_d)=0 \qquad (11-33)$$

考虑到式(11-10)、式(11-16)，由上式得

$$\bar{\sigma}_{\theta\theta}(\theta_d)=\bar{\sigma}_{r\theta}(\theta_d)=0,\qquad \bar{\varphi}(\theta_d)=0 \qquad (11-34)$$

而在 $\theta_d\in[\theta_d,\pi]$ 的区域材料已完全损伤，不能承担任何应力。所以在该区域内

$$\tilde{\sigma}_{\theta\theta}(r,\theta)=\tilde{\sigma}_{r\theta}(r,\theta)=0,\qquad \varphi(r,\theta)=0 \qquad (\theta_d\leqslant\theta\leqslant\pi) \qquad (11-35)$$

至此，问题归结为如何找到在 $0\leqslant\theta\leqslant\theta_d$ 内满足方程式(11-20)和式(11-26)，在其边界上满足式(11-29)、式(11-30)、式(11-31)及式(11-34)的函数 $\overline{A}$，$\bar{\varphi}$ 和参数 μ，$\overline{A}''_0$，θ_d。

11.3.2 求解方法

求解可按下述思路进行：

① 鉴于任给 $\mu(\mu>0)$和 $\overline{A}''_0$，利用式(11-29)、式(11-30)和式(11-31)，积分式(11-20)和式(11-26)（可采用四阶变步长 Runge-Kutta 法）可以得到一个 $\theta^*\in[0,\pi]$，且满足

$$\bar{\varphi}(\theta^*)=0 \qquad (11-36)$$

因此可将 θ^* 视为 μ 和 $\overline{A}''_0$ 的一个函数。

② 由于 $\overline{A}(\theta^*)$和 $\overline{A}'(\theta^*)$在求解 θ^* 时被同时确定，因此它们也可分别视为 μ 和 $\overline{A}''_0$ 的函数，并表示为

$$\overline{A}(\theta^*)=\overline{A}[\theta^*(\mu,\overline{A}''_0)],\qquad \overline{A}'(\theta^*)=\overline{A}'[\theta^*(\mu,\overline{A}''_0)] \qquad (11-37)$$

显然，对任意 μ 和 $\overline{A}''_0$，$\overline{A}(\theta)^*$ 和 $\overline{A}'(\theta^*)$一般并不等于零。



③ 求解下列非线性方程组

$$\overline{A}[\theta^*(\mu,\overline{A}''_0)] = 0, \qquad \overline{A}'[\theta^*(\mu,\overline{A}''_0)] = 0 \tag{11-38}$$

即得到所求的 μ 和 A''_0。而对应的 θ^* 也正是 θ_d，同时也就得到了各场的角分布函数。

11.4 参数研究

11.4.1 奇异性阶次

针对典型参数进行计算。表 11－1 列出了各场渐近阶次，其中损伤场、应力场和应变场的渐近阶次分别为 μ,λ 和 $\lambda(n-\mu)$，而损伤活动区和完全损伤区的分界角为 θ_d。图 11－3 至图 11－5 分别表示了无量纲化的应力、应变和连续度角分布模态。子图号(1)到(6)的意义也同时表示于表 11－1 中。

表 11－1 渐近阶次和分界角为 θ_d (ν=0.3)

状　态	p	n	μ	λ	$n(\lambda-\mu)$	$\theta_d/(°)$	子图号
平面应力	0.5	3.0	0.584 0	0.445 3	−0.416 1	119.3	(1)
平面应力	0.5	9.0	0.806 2	0.736 8	−0.592 2	116.5	(2)
平面应力	2.0	3.0	0.322 8	0.209 9	−0.338 7	125.6	(3)
平面应力	1.5	9.0	0.659 9	0.591 8	−0.612 0	127.5	(4)
平面应变	0.5	3.0	0.991 2	0.989 8	−0.008 4	90.4	(5)
平面应变	0 5	9.0	0.909 2	0.878 9	0.272 7	98.8	(6)



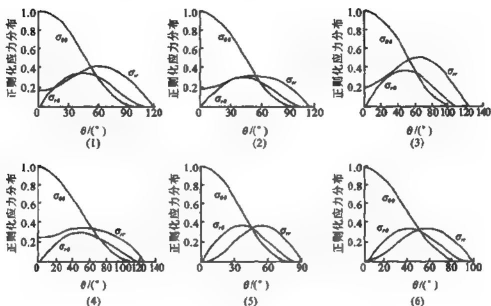


图 11－3　无量纲化的应力分布

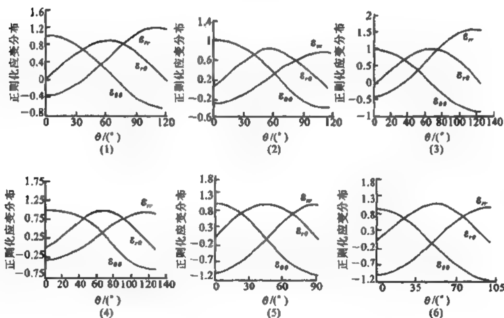


图 11－4　无量纲化的应变分布



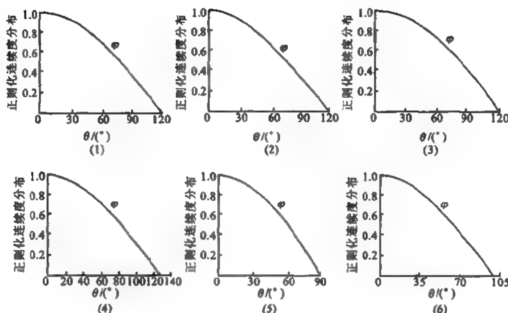


图 11-5 无量纲化的连续度分布

11.4.2 过程区形状

由式(11-41)所确定的塑性过程区形状(其中 $\omega=r_p(0)$)如图 11-6 所示。

塑性过程区形状按后继屈服准则确定。根据应变等效性原理、Mises 准则及 Masing 原理得到塑性过程区边界方程为

$$\frac{\tilde{\sigma}_e}{\kappa_1 \varphi} = \sigma_s \tag{11-39}$$

式中,σ_s 表示屈服应力。将式(11-14)、式(11-16) 代入式(11-39)得出塑性过程区边界为

$$r_p(\theta) = \left[\kappa_1 \sigma_s \frac{\beta \bar{\varphi}(\theta)}{\tilde{\alpha} \tilde{\sigma}_e(\theta)}\right]^{1/(\lambda-\mu)} \tag{11-40}$$

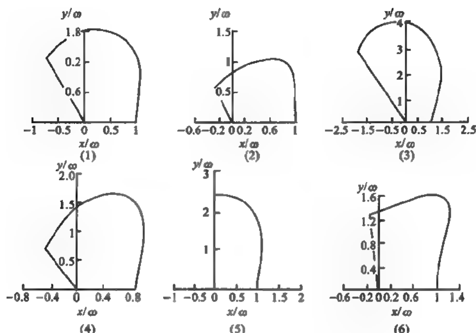


图 11-6 过程区形状

11.5 裂纹扩展速率

11.5.1 区间连续条件

从式(11-28)可见,只要 $\tilde{\alpha}$ 和 β 确定,则裂纹扩展速率也就随之确定。为此先讨论裂纹尖端过程区外围场分区情况。在小范围屈服的前提下,可认为自裂尖向外依次为塑性损伤过程区、弹性损伤过程区和无损弹性影响区(见图 11-7)。根据式(11-10)和式(11-17),塑性损伤过程区内,有

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{\alpha} r^{\lambda} \bar{\sigma}_{ij}(\theta), \qquad \tilde{\varepsilon}_{ij} = \zeta(\tilde{\alpha}/\beta)^{n} r^{n(\lambda-\mu)} \bar{\varepsilon}_{ij}(\theta) \tag{11-41}$$

线弹性损伤过程区内的应力场、损伤场和应变场分别设为



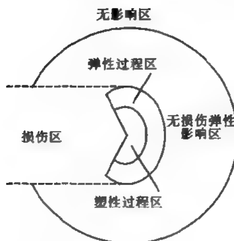


图 11-7 裂尖场分区示意图

$$\tilde{\sigma}_{ij}^{e} = \tilde{\alpha}^{e} r^{\xi} \tilde{\sigma}_{ij}^{e}(\theta), \qquad \varphi^{e} = \beta^{e} r^{\eta} \bar{\varphi}^{e}(\theta), \qquad \tilde{\varepsilon}_{ij} = \zeta^{e}(\tilde{\alpha}/\beta^{e}) r^{\xi-\eta} \tilde{\varepsilon}_{ij}^{e}(\theta) \tag{11-42}$$

作为初步探讨仅考虑塑性过程区与弹性过程区在 $\theta=0$ 处的界面条件。为此，二区在 $\theta=0$ 处交界点的极径 $\omega_p = r_p(0)$ 可由式(11-40)给出，即

$$\omega_p = r_p(0) = \left(\frac{\zeta_1 \beta \bar{\varphi}_0 \sigma_s}{\tilde{\alpha} \tilde{\sigma}_{e0}} \right)^{1/(\lambda-\mu)} \tag{11-43}$$

上式及后文中的下标 0 表示在 $\theta=0$ 取值。于是塑性与弹性过程区在 $\theta=0$ 处的界面条件为

$$\tilde{\sigma}_{rr0} = \tilde{\sigma}_{rr0}^{e}, \qquad \tilde{\varepsilon}_{\theta\theta0} = \tilde{\varepsilon}_{\theta\theta0}^{e} \qquad (\theta = 0, r = \omega_p) \tag{11-44}$$

考虑到损伤区对远场的影响类似一个 V 形缺口场(见图 11-7)，故设无损弹性影响区的应力、应变场为

$$\tilde{\sigma}_{ij}^{v} = \widetilde{K}_v r^{-1/q} \sigma_{ij}^{v}(\theta), \qquad \tilde{\varepsilon}_{ij}^{v} = E^{-1} \widetilde{K}_v r^{-1/q} \tilde{\varepsilon}_{ij}^{v}(\theta) \qquad (q \geqslant 2) \tag{11-45}$$

式中，$\widetilde{K}_v$ 为一个应力强度控制因子[11.4,11.5]。

弹性损伤过程区与无损弹性影响区在 $\theta=0$ 处交界点的极径 ω_e 可由损伤门槛条件确定。为此将式(11-42)代入式(11-7)和



式(11-8)解得

$$\omega_e = \left[2\left(\frac{\beta^e\bar{\varphi}_0^e}{\bar{\alpha}^e}\right)\frac{\widetilde{Y}_{th}}{C_{ijkl}\bar{\sigma}_{ij0}^e\bar{\sigma}_{kl0}^e}\right]^{1/2(\xi-\eta)} \tag{11-46}$$

弹性损伤过程区与无损弹性影响区的界面条件可表示为

$$\bar{\sigma}_{r\theta0}^e = \bar{\sigma}_{r\theta0}^v,\qquad \bar{\varepsilon}_{\theta\theta0}^e = \bar{\varepsilon}_{\theta\theta0}^v\qquad (\theta = 0, r = \omega_e) \tag{11-47}$$

11.5.2 裂纹扩展速率

联立求解式(11-41)至式(11-47)可以解出 $\bar{a}$ 和β,将其代入式(11-28)可得形如

$$\frac{da}{dN} = \bar{c}\widetilde{K}_v^q \tag{11-48}$$

的裂纹扩展速率公式。

特别是当无损弹性影响区仍为通常的应力强度因子控制区时,有

$$\widetilde{K}_v = \Delta K_{\mathrm{I}},\qquad q = 2 \tag{11-49}$$

于是式(11-48)成为

$$\frac{da}{dN} = \bar{c}(\Delta K_{\mathrm{I}})^2 \tag{11-50}$$

参考文献[11.6]中曾经提到,从某些试验所得到的裂纹扩展速率就是正比于应力强度因子的平方。

11.6 结　论

对于弹塑性疲劳裂纹,基于以上分析可以得到下列结论:

① 过程区应力场没有奇异性而应变场有弱奇异性;

② 过程区可以分为损伤活动区和完全损伤区(损伤驻止区),而整个过程区可以被视为一个带损伤的 V 形缺口场;



③ 利用损伤力学可以导出 Paris 型的裂纹扩展速率公式。

参考文献

[11.1] LEMAITRE J. A Course on Damage Mechanics. Springer, Berlin, 1992.

[11.2] Moskvigin B. Plasticity for Variable Loading. Publishing House of Moscow University, Moscow, 1965.

[11.3] 赵军. 金属构件疲劳失效问题的损伤力学研究:[博士学位论文]. 北京:北京航空航天大学,1995.

[11.4] WILLIAMS M L. Stress Singularities Resulting from Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates in Extension. Trans. ASME, 1952, 74:526-528.

[11.5] WU S F, ZHANG X, HE Q Z. A New Conservative Integral with Arbitrary Singularity and its Application. Int. J. Fracture, 1989, 40:221-233.

[11.6] LIU H W. A Review of Crack Growth Analysis. Theo. App. Fracture Mech., 1991, 16:91-108.

[11.7] ZHAO J, ZHANG X. Plastic Damage Analysis for the Process Zone of a Fatigue Crack. Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures 1998, 21:1403-1414.

第 12 章 单调加载下扩展裂纹弹塑性损伤渐近分析

与传统的由应力强度因子或守恒积分控制的静止裂纹场相比，单调加载下的弹塑性扩展裂纹场具有众多不同的特性。导致这些差别的主要原因在于：① 后者存在损伤演化机制；② 后者的渐近场存在定常或非定常条件。关于单调加载下的弹塑性扩展裂纹已有一些学者做过研究[12.1~12.7]，但其并未引入损伤的概念，而且对于渐近场的分区过于复杂(最多达五个分区)。

本章引入幂硬化弹塑性损伤本构关系，对单调加载下Ⅰ型扩展裂纹场进行渐近分析，提出并验证了两个分区的方案，得到了典型参数下的渐近场解答，确定了过程区的形状，并导出了裂纹扩展速率公式的理论形式。

12.1 弹塑性损伤本构关系

12.1.1 计及损伤耦合效应的应力-应变关系

参考文献[12.7]指出，单调加载下在裂尖附近距裂尖稍远的区域仍以比例加载为主，因此在那里仍可使用塑性力学全量理论。据此并运用 Lemaitre 的应变等效性原理[12.8]，可以得到计及损伤效应的 Ramberg-Osgood 弹塑性本构关系

$$\epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} s_{ij}^{*} + \frac{1-2\nu}{3E} \sigma_{kk}^{*} \delta_{ij} + b\left(\frac{\sigma_e^{*}}{E}\right)^{n-1} \frac{s_{ij}^{*}}{E} \quad (12-1)$$



式中，E 和 ν 分别为弹性模量和泊松比；b 和 n 为材料常数；δ_{ij} 为 Kronecker 符号，而

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_{ij}^{*} = \sigma_{ij}/\varphi, \qquad s_{ij}^{*} = s_{ij}/\varphi, \qquad \sigma_{e}^{*} = \sigma_{e}/\varphi \\ &s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_{kk}/3, \qquad \sigma_{e} = \sqrt{3s_{ij}s_{ij}/2} \end{aligned}\right\} \tag{12-2}$$

式中，σ_{ij} 和 ε_{ij} 分别为应力和应变，$\varphi(0\leqslant\varphi\leqslant1)$ 为连续度，反映受损材料的剩余有效承载面积与初始完好材料的承载面积之比。

在当前问题中，设 σ_{ij}^{*} 在裂尖具有奇异性（这一假定与后面结果自洽）并考虑到 $n>1$，于是式(12-1)中的主项即是其中的非线性项，从而在裂尖邻域式(12-1)可改写为

$$\varepsilon_{ij} = b_1\sigma_e^{n-1}s_{ij}\varphi^{-n}, \qquad b_1 = bE^{-n} \tag{12-3}$$

12.1.2 损伤演化方程

损伤演化方程采用下列形式[12.9]

$$\dot{\varphi} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = -cY^{p}\dot{Y} \qquad \left(\dot{Y} = \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} > 0\right) \tag{12-4}$$

式中，c 和 p 为材料常数；而 Y 为损伤驱动力，定义为

$$Y = \frac{1}{2}C_{ijkl}\varphi^{-2}\sigma_{ij}\sigma_{kl} = \frac{1}{2}C_{ijkl}\sigma_{ij}^{*}\sigma_{kl}^{*} \tag{12-5}$$

式中，C_{ijkl} 为无损材料的柔度张量。

12.2 渐近场基本方程

12.2.1 变形相容方程

现在考虑图 12-1 所示的单调加载下的 Ⅰ 型扩展裂纹（图中加点的区域表示损伤）渐近场。设 Airy 应力函数为



$$A = \alpha r^{\lambda+2}\bar{A}(\theta) \tag{12-6}$$

从而应力可表示为

$$\sigma_{rr} = \alpha r^{\lambda}\bar{\sigma}_{rr}(\theta), \quad \sigma_{\theta\theta} = \alpha r^{\lambda}\bar{\sigma}_{\theta\theta}(\theta), \quad \sigma_{r\theta} = \alpha r^{\lambda}\bar{\sigma}_{r\theta}(\theta) \tag{12-7}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \bar{\sigma}_{rr} = (\lambda+2)\bar{A} + \bar{A}'', & \bar{\sigma}_{\theta\theta} = (\lambda+2)(\lambda+1)\bar{A} \\ \bar{\sigma}_{r\theta} = -(\lambda+1)\bar{A}' & \end{array}\right\} \tag{12-8}$$

式中，$(\ )' = \mathrm{d}(\ )/\mathrm{d}\theta$。进一步，利用式(12－2)、式(12－7)和式(12－8)可得偏应力

$$s_{rr} = \alpha r^{\lambda}\bar{s}_{rr}(\theta), \quad s_{\theta\theta} = \alpha r^{\lambda}\bar{s}_{\theta\theta}(\theta), \quad s_{r\theta} = \alpha r^{\lambda}\bar{s}_{r\theta}(\theta) \tag{12-9}$$

$$\bar{s}_{rr} = z_1\bar{\sigma}_{rr} - z_2\bar{\sigma}_{\theta\theta}, \quad \bar{s}_{\theta\theta} = z_1\bar{\sigma}_{\theta\theta} - z_2\bar{\sigma}_{rr}, \quad \bar{s}_{r\theta} = \bar{\sigma}_{r\theta} \tag{12-10}$$

式中，$z_1 = 2/3$，$z_2 = 1/3$ 适于平面应力状态；$z_1 = z_2 = 1/2$ 适于平面应变状态。

将式(12－9)和式(12－10)代入式(12－2)得到

$$\sigma_e = \alpha r^{\lambda}\bar{\sigma}_e(\theta) \tag{12-11}$$

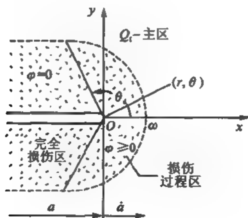


图 12－1　损伤过程区示意图

式中



$$\bar{\sigma}_e = \begin{cases} (\bar{\sigma}_{rr}^2 + \bar{\sigma}_{\theta\theta}^2 - \bar{\sigma}_{rr}\bar{\sigma}_{\theta\theta} + 3\bar{\sigma}_{r\theta}^2)^{1/2} & \text{(平面应力)} \\ [3(\bar{\sigma}_{rr} - \bar{\sigma}_{\theta\theta})^2 + 3\bar{\sigma}_{r\theta}^2]^{1/2} & \text{(平面应变)} \end{cases} \tag{12-12}$$

对于损伤场,考虑到裂尖应完全损伤,其连续度为零,而距裂尖越远,损伤越小,而连续度越大,故设

$$\varphi = \beta r^{\mu} \bar{\varphi}(\theta) \tag{12-13}$$

式中,$\mu>0$。

利用式(12-3)、式(12-9)、式(12-11)和式(12-13),可得应变场为

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_{rr} = b_1 \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n r^{n(\lambda-\mu)} \bar{\varepsilon}_{rr}(\theta), \qquad \varepsilon_{\theta\theta} = b_1 \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n r^{n(\lambda-\mu)} \bar{\varepsilon}_{\theta\theta}(\theta) \\ &\varepsilon_{r\theta} = b_1 \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n r^{n(\lambda-\mu)} \bar{\varepsilon}_{r\theta}(\theta) \end{aligned}\right\} \tag{12-14}$$

$$\bar{\varepsilon}_{rr} = \bar{\varphi}^{-n}\bar{\sigma}_e^{n-1}\bar{s}_{rr}, \qquad \bar{\varepsilon}_{\theta\theta} = \bar{\varphi}^{-n}\bar{\sigma}_e^{n-1}\bar{s}_{\theta\theta}, \qquad \bar{\varepsilon}_{r\theta} = \bar{\varphi}^{-n}\bar{\sigma}_e^{n-1}\bar{s}_{r\theta} \tag{12-15}$$

进一步把式(12-14)代入相容方程

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \theta^2} - \frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varepsilon_{\theta\theta}) - \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial \theta}\right) = 0 \tag{12-16}$$

可得

$$\bar{\varepsilon}_{rr}'' + e_1\bar{\varepsilon}_{r\theta}' + e_2\bar{\varepsilon}_{rr} + e_3\bar{\varepsilon}_{\theta\theta} = 0 \tag{12-17}$$

$$\left.\begin{aligned} &e_1 = -2(e+1), \qquad e_2 = -e \\ &e_3 = e(e+1), \qquad e = n(\lambda-\mu) \end{aligned}\right\} \tag{12-18}$$

式(12-17)成为一个关于$\bar{A}$和$\bar{\varphi}$且含有特征值λ和μ的四阶常微分方程。

12.2.2 损伤演化协调条件

现在讨论损伤演化方程的渐近形式。由式(12-5)、



式(12-7)和式(12-13)得到

$$Y=\frac{1}{E}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{2}r^{2(\lambda-\mu)}\bar{Y}(\theta),\qquad \bar{Y}(\theta)=\frac{1}{2}EC_{ijkl}\bar{\varphi}^{-2}\bar{\sigma}_{ij}\bar{\sigma}_{kl}\tag{12-19}$$

注意到图12-2中的几何关系，有

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}a}=-\cos\theta,\qquad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}a}=\frac{1}{r}\sin\theta\qquad (r\gg \mathrm{d}a)\tag{12-20}$$

同时考虑到式(12-19)，得到

$$\dot{Y}=\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{E}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{2}r^{2(\lambda-\mu)}\bar{Y}\right]=$$
$$\frac{1}{E}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{2}r^{2(\lambda-\mu)}\left\{\bar{Y}\frac{\mathrm{d}(\alpha/\beta)^{2}}{(\alpha/\beta)^{2}}+\right.$$
$$\left.[\bar{Y}'\sin\theta-2(\lambda-\mu)\bar{Y}\cos\theta]\frac{\mathrm{d}a}{r}\right\}\frac{1}{\mathrm{d}t}\tag{12-21}$$

当$[\mathrm{d}(\alpha/\beta)^{2}]/(\alpha/\beta)^{2}\gg(\mathrm{d}a)/r$，也即在裂尖附近距裂尖稍远的区域仍以比例加载为主(见附录C)，则取式(12-21)主项可得

$$\dot{Y}=\frac{1}{E}r^{2(\lambda-\mu)}\bar{Y}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{2}\tag{12-22}$$

将式(12-19)和式(12-22)代入式(12-4)，得到

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=-\frac{c}{E^{p+1}}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{2p}r^{2(p+1)(\lambda-\mu)}\bar{Y}^{p+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{2}\qquad\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{2}>0\right]\tag{12-23}$$

利用图12-2中的几何关系及式(12-13)，可得

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}a}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=\left[\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}a}r^{\mu}\bar{\varphi}+\beta r^{\mu-1}(\bar{\varphi}'\sin\theta-\mu\bar{\varphi}\cos\theta)\right]\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\tag{12-24}$$

鉴于越靠近裂尖的点其损伤越大或连续度越低，而其损伤演化速率也越高，这一特性要求保留式(12-24)中的第二项，即

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\beta r^{\mu-1}(\bar{\varphi}'\sin\theta-\mu\bar{\varphi}\cos\theta)\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\tag{12-25}$$

它体现出$\dot{\varphi}$在$r\to0$和$\mu<1$时具有奇异性。



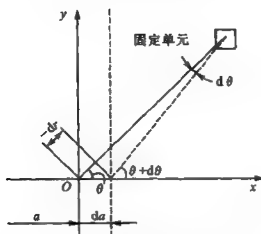


图 12-2 裂纹扩展时的几何关系

对比式(12-23)和式(12-25)可以得到一组损伤演化协调条件

$$\bar{\varphi}'\sin\theta-\mu\bar{\varphi}\cos\theta=-\bar{Y}^{p+1} \tag{12-26}$$

$$2(p+1)(\lambda-\mu)=\mu-1 \tag{12-27}$$

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}(\alpha/\beta)}=\frac{2c}{E^{p+1}\beta}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{2p+1} \tag{12-28}$$

其中式(12-27)表明 λ 和 μ 并不独立，因此式(12-17)与式(12-26)构成关于特征函数 $\bar{A}$ 和 $\bar{\varphi}$ 以及特征值 μ 的求解问题。式(12-28)将用于确定裂纹扩展速率。

12.3 边界条件及解法

12.3.1 边界条件

式(12-17)和式(12-26)的求解属于两点边值问题(分别在 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$)。由于 I 型裂纹场具有对称性，所以



$$\overline{A}'(0)=\overline{A}'''(0)=\overline{\varphi}'(0)=0 \tag{12-29}$$

又因 Ariy 应力函数的角分布函数 $\overline{A}(\theta)$ 主要反映角分布模态，故可设

$$\overline{A}(0)=1 \tag{12-30}$$

利用式(12-17)和式(12-26)可以导出

$$\bar{\varphi}(0)=f_1(\mu,\overline{A}''_0),\qquad \bar{\varphi}''(0)=f_2(\mu,\overline{A}''_0) \tag{12-31}$$

其中 $\overline{A}''_0$ 表示 $\overline{A}''(0)$。为节约篇幅，式(12-31)的具体形式不再列出。

在裂纹表面要求

$$\bar{\sigma}_{\theta\theta}(\pi)=\bar{\sigma}_{r\theta}(\pi)=0 \tag{12-32}$$

$$\bar{\varphi}(\pi)=0 \tag{12-33}$$

由于 $\bar{\varphi}(0)>0$，并且认为 $\bar{\varphi}$ 在从 $\theta=0$ 到 $\theta=\pi$ 的范围内逐渐减小，因此可以假定 $\bar{\varphi}$ 在某一角度 $\theta_d\in(0,\pi]$ 已降为零。如果这种情况出现，就意味着把 $[0,\pi]$ 分成两个区：其中 $[0,\theta_d)$ 称为损伤发展区或损伤活动区，$[\theta_d,\pi]$ 称为完全损伤区或损伤驻止区(见图 12-1)，分别满足 $\bar{\varphi}\geqslant 0$ 和 $\bar{\varphi}\equiv 0$。

因为完全损伤的介质不能承担任何应力，所以在完全损伤区内恒有

$$\left.\begin{aligned}&\bar{\varphi}(\theta)\equiv 0\\&\bar{\sigma}_{rr}(\theta)=\bar{\sigma}_{\theta\theta}(\theta)=\bar{\sigma}_{r\theta}(\theta)\equiv 0\end{aligned}\quad(\theta_d\leqslant\theta\leqslant\pi)\right\} \tag{12-34}$$

显然式(12-32)和式(12-33)同时得到满足。下面主要讨论损伤活动区的情况。

根据 θ_d 的定义以及式(12-34)，可得 $\theta=\theta_d$ 两侧的界面条件为

$$\left.\begin{aligned}&\bar{\varphi}(\theta_d^-)=\bar{\varphi}(\theta_d)=0\\&\bar{\sigma}_{\theta\theta}(\theta_d^-)=\bar{\sigma}_{\theta\theta}(\theta_d)=0,\qquad \bar{\sigma}_{r\theta}(\theta_d^-)=\bar{\sigma}_{r\theta}(\theta_d)\doteq 0\end{aligned}\right\} \tag{12-35}$$

利用式(12-8)并求极限，则上式成为



$$\left.\begin{aligned}\bar{\varphi}(\theta_d)&=0\\A(\theta_d)=\bar{A}'(\theta_d)&=0\end{aligned}\right\}\qquad(12-36)$$

由于完全损伤区内变形不定(任意),故不必再在界面条件中加入变形协调条件。

总之,完全损伤区性质已定,如式(12-34);损伤活动区的控制方程为式(12-17)和式(12-26);待定函数为 $\bar{A}$ 和 $\bar{\varphi}$;待定参数为 μ, $\bar{A}''(0)$ 和 θ_d;边界条件为式(12-29)、式(12-30)、式(12-31)和式(12-36)。

12.3.2 求解方法

求解步骤按下述方式进行。

① 鉴于任给 $\mu(\mu>0)$和 $\bar{A}''_0$,利用式(12-29)、式(12-30)和式(12-31)积分式(12-17)和式(12-26)(可采用四阶变步长Runge-Kutta法)可以得到一个 $\theta^* \in[0,\pi]$,且满足

$$\varphi(\theta^*)=0\qquad(12-37)$$

因此可将 θ^* 视为 μ 和 $\bar{A}''_0$的一个函数。

② 由于 $\bar{A}(\theta^*)$和 $\bar{A}'(\theta^*)$在求解 θ^* 时被同时确定,因此它们也可视为 μ 和 $\bar{A}''_0$的函数,并表示为

$$\left.\begin{aligned}\bar{A}(\theta^*)&=\bar{A}[\theta^*(\mu,\bar{A}''_0)]\\\bar{A}'(\theta^*)&=\bar{A}'[\theta^*(\mu,\bar{A}''_0)]\end{aligned}\right\}\qquad(12-38)$$

显然,对任意 μ 和 $\bar{A}''_0$, $\bar{A}(\theta^*)$和 $\bar{A}'(\theta^*)$一般并不等于零。

③ 求解下列非线性方程组:

$$\left.\begin{aligned}\bar{A}[\theta^*(\mu,\bar{A}''_0)]&=0\\\bar{A}'[\theta^*(\mu,\bar{A}''_0)]&=0\end{aligned}\right\}\qquad(12-39)$$

即得到所求的 μ 和 $\bar{A}''_0$,而对应的 θ^* 也正是 θ_d,同时也就得到了各场的角分布函数。



12.4 参数研究

12.4.1 奇异性阶次

针对典型参数进行计算。表 12-1 列出了各场渐近阶次，其中损伤场、应力场和应变场的渐近阶次分别为 μ,λ 和 $\lambda(n-\mu)$，而损伤活动区和完全损伤区的分界角为 θ_d。图 12-3 至图 12-5 分别表示了无量纲化的应力和连续度角分布模态以及由式(12-41)所确定的塑性过程区形状(其中 $\omega=r_p(0)$)。子图号(1)到(6)的意义表示于表 12-1 中。

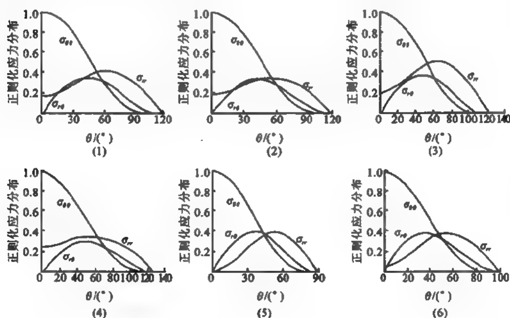


图 12-3 无量纲化的应力分布



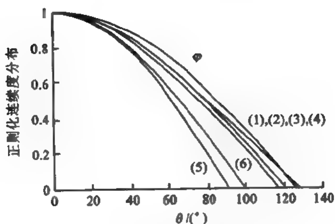


图 12-4 无量纲化的连续度分布

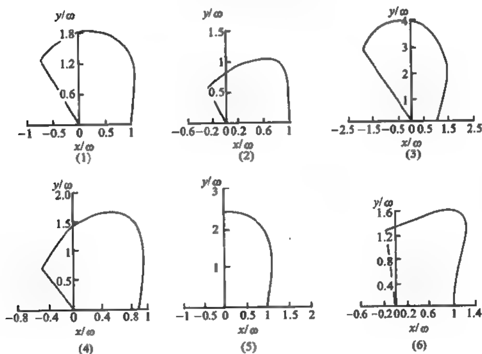


图 12-5 过程区形状

表 12-1 渐近阶次和分界角为 θ_d (ν=0.3)

状 态	p	n	μ	λ	$n(\lambda-\mu)$	$\theta_d/(^\circ)$	子图号
平面应力	0.5	3.0	0.584 0	0.445 3	−0.416 1	119.3	(1)
平面应力	0.5	9.0	0.806 2	0.736 8	−0.592 2	116.5	(2)
平面应力	2.0	3.0	0.322 8	0.209 9	−0.338 7	125.6	(3)
平面应力	1.5	9.0	0.659 9	0.591 8	−0.612 0	127.5	(4)
平面应变	0.5	3.0	0.991 2	0.989 8	−0.008 4	90.4	(5)
平面应变	0.5	9.0	0.909 2	0.878 9	−0.272 7	98.8	(6)

12.4.2 过程区形状

过程区形状可由经过应变等效性原理修正的 Mises 准则确定，即

$$\sigma_e/\varphi = \sigma_s \tag{12-40}$$

式中，σ_s 为屈服应力。将式(12-11)、式(12-13)代入式(12-40)给出塑性过程区边界为

$$r_p(\theta) = \left[\frac{\beta\bar{\varphi}(\theta)}{\alpha\,\sigma_e(\theta)}\sigma_s\right]^{1/(\lambda-\mu)} \tag{12-41}$$

12.5 裂纹扩展规律

12.5.1 区间连续条件

从式(12-28)可见，只要 α 和 β 确定，则裂纹扩展速率也就随之确定。为此需要探讨裂纹尖端过程区外围场的性质。在小范围屈服的前提下，设直接包围塑性过程区的是一线弹性区，其应力和



应变场可表示为

$$\sigma_{ij}^{\cdot} = Q_{\mathrm{I}}\, r^{-1/q}\bar{\sigma}_{ij}^{\cdot}(\theta), \qquad \epsilon_{ij}^{\cdot} = E^{-1} Q_{\mathrm{I}}\, r^{-1/q}\bar{\epsilon}_{ij}^{\cdot}(\theta) \tag{12-42}$$

式中，Q_{I} 为一个控制因子。而考虑到损伤区对远场的影响类似一个 V 形缺口场(见图 12-1)，故 $q \geqslant 2$[12.10]。

作为初步探讨仅考虑过程区与 Q_{I} 控制区在 $\theta=0$ 处的界面条件，也即

$$\sigma_{rr} = \sigma_{rr}^{\cdot}, \qquad \epsilon_{\theta\theta} = \epsilon_{\theta\theta}^{\cdot} \qquad (\theta = 0, \quad r = \omega = r_p(0)) \tag{12-43}$$

将式(12 - 7)、式(12 - 14)、式(12 - 41)和式(12 - 42)代人式(12-43)得

$$\left.\begin{aligned} &\alpha\omega^{\lambda}\bar{\sigma}_{rr0} = Q_{\mathrm{I}}\,\omega^{-1/q}\bar{\sigma}_{rr0}^{\cdot}, \qquad b_1\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n}\omega^{n(\lambda-\mu)}\bar{\epsilon}_{\theta\theta0} = \frac{Q_{\mathrm{I}}}{E}\omega^{-1/q}\bar{\epsilon}_{\theta\theta0}^{\cdot} \\ &\omega = \left\{\frac{\beta\bar{\varphi}_0}{\alpha\bar{\sigma}_{e0}}\sigma_s\right\}^{1/(\lambda-\mu)} \end{aligned}\right\} \tag{12-44}$$

上式中的下标 0 表示在 $\theta=0$ 取值。求解式(12-44)可得

$$\alpha = R_3^{-\lambda-(1/q)} R_4 \sigma_s^{n(q\lambda+1)} (Eb_1)^{q\lambda+1} Q_{\mathrm{I}}^{-q\lambda} \tag{12-45}$$

$$\beta = R_5 \sigma_s^{n(1+q\mu)-1} (Eb_1)^{q\mu+1} Q_{\mathrm{I}}^{-q\mu} \tag{12-46}$$

$$\omega = R_3 \sigma_s^{-nq} (Eb_1)^{-q} Q_{\mathrm{I}}^{q} \tag{12-47}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} &R_1 = \left(\frac{\bar{\varphi}_0}{\bar{\sigma}_{e0}}\right)^{\frac{1}{\lambda-\mu}}, \qquad R_2 = \frac{\bar{\epsilon}_{\theta\theta0}^{\cdot}}{\bar{\epsilon}_{\theta\theta0}}, \qquad R_3 = \frac{R_2^{q}}{R_1^{nq(\lambda-\mu)}} \\ &R_4 = \frac{\bar{\sigma}_{rr0}^{\cdot}}{\bar{\sigma}_{rr0}}, \qquad R_5 = \frac{R_2^{q(\lambda-\mu)} R_4}{R_1^{(\lambda-\mu)[qn(\lambda-\mu)+1]} R_3^{\lambda+(1/q)}} \end{aligned}\right\} \tag{12-48}$$

12.5.2 裂纹扩展速率

将式(12-45)和式(12 46)代入式(12-28)得到

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}Q_{\mathrm{I}}} = \tilde{c}Q_{\mathrm{I}}^{q-1} \tag{12-49}$$

$$\tilde{c} = \frac{2cR_6^{2(p+1)}\sigma_s^{3+2p-n(1+q)}}{E^{p+1}R_5(Eb_1)^{1+q}}, \qquad R_6 = \left[R_1^{mq(\lambda-\mu)+1}R_2^{-q}\right]^{\lambda-\mu} \tag{12-50}$$

上式即裂纹扩展速率表达式。

由于假设 Q_{I} 控制场是线弹性的，所以可设

$$Q_{\mathrm{I}} = \eta(a;L_1,L_2,\cdots,L_m)K_{\mathrm{I}} \tag{12-51}$$

式中，η 为关于裂纹长度 a 以及结构几何参数 $L_1,L_2,\cdots,L_m$ 的函数；K_{I} 为按照裂纹长度为 a 所算出的应力强度因子（当然 K_{I} 控制区可能并不存在）。若将式(12－51)代入式(12－49)可得

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}K_{\mathrm{I}}} = \frac{\tilde{c}\eta(\eta K_{\mathrm{I}})^{q-1}}{1-\tilde{c}(\eta K_{\mathrm{I}})^{q-1}(\mathrm{d}\eta/\mathrm{d}a)} \tag{12-52}$$

特别地，如果包围过程区的就是 K_{I} 控制场，则

$$Q_{\mathrm{I}} = K_{\mathrm{I}}, \qquad q = 2, \qquad \eta = 1 \tag{12-53}$$

从而由式(12－49)或式(12－52)可得

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}K_{\mathrm{I}}} = \tilde{c}K_{\mathrm{I}} \tag{12-54}$$

式(12－49)、式(12－52)和式(12－54)对于从理论上确定裂纹单调扩展阻力曲线具有明确的参考价值。分别积分这三个方程得到

$$Q_{\mathrm{IR}} = \left(\frac{\tilde{c}}{q}\Delta a + Q_{\mathrm{IRth}}^{q}\right)^{1/q} \tag{12-55}$$

$$K_{\mathrm{IR}} = \eta^{-1}(a_0+\Delta a;L_1,\cdots,L_m)\Big(\frac{\tilde{c}}{q}\Delta a + \eta^{q}(a_0;L_1,\cdots,L_m)K_{\mathrm{IRth}}^{q}\Big)^{1/q} \tag{12-56}$$

$$K_{\mathrm{IR}} = \left(\frac{\tilde{c}}{2}\Delta a + K_{\mathrm{IRth}}^{2}\right)^{1/2} \tag{12-57}$$

式中，Q_{IR} 和 K_{IR} 分别为对应于 Q_{I} 和 K_{I} 的断裂阻力；Q_{IRth} 和 K_{IRth} 分别为对应于 Q_{IR} 和 K_{IR} 的门槛值；a_0 与 Δa 分别为初始裂纹尺寸和裂纹扩展量。式(12－55)和式(12－56)表明，如果过程



区围场由 Q_{I} 控制，则 Q_{I} 阻力曲线与 a_0 无关，而由其等效变换出来的 K_{I} 阻力曲线与 a_0 有关；式(12-57)则表明如果过程区围场由 K_{I} 控制，则 K_{I} 阻力曲线与 a_0 无关。

12.6 结 论

对于单调弹塑性扩展裂纹，基于以上分析可以得到下列结论：

① 过程区应力场没有奇异性而应变场有奇异性；

② 过程区可以分为损伤活动区和完全损伤区（损伤驻止区），而整个过程区可以被视为一个带损伤的 V 形缺口场；

③ 裂纹扩展规律以及阻力曲线可以借用损伤机制导出。

参考文献

[12.1] AMAZIGO J C, HUTCHINSON J W. Crack Tip Fields in Steady Crack Growth with Linear Strain Hardening. Journal of Mechanics and Physics of Solids, 1977, 25:81-97.

[12.2] CHITALEY A D, MCCLINTOCK F A. Elastic-Plastic Mechanics of Steady Crack Growth under Anti-Plane Shear. Journal of Mechanics and Physics of Solids, 1971, 19:147-163.

[12.3] DRUGAN W J, RICE J R, SHAM T L. Asymptotic Analysis of Growing Plane Strain Tensile Crack in Elastic Ideally Plastic Solids. Journal of Mechanics and Physics of Solids, 1982, 30: 447-473.

[12.4] Gao Y C. The Influence of Compressibility on the Elastic-Plastic Field of a Growing Crack. ASTM STP 803, 1983. 176-190.

[12.5] HHTCHINSON J W. Singular Behavior at the End of a Tensile Crack in a Hardening Material. Journal of Mechanics and Physics of Solids, 1968, 16:13-31.

[12.6] HUTCHINSON J W, Paris P C. The Theory of Stability Analysis of J-Controlled Crack Growth . ASTM STP 668, 1979. 37-64.



[12.7] 黄克智,余寿文. 弹塑性断裂力学.北京:清华大学出版社, 1985.

[12.8] LEMAITRE J. A Course on Damage Mechanics. Springer, Berlin, 1992.

[12.9] 赵军.金属构件疲劳失效问题的损伤力学研究[D].北京:北京航空航天大学,1995.

[12.10] WU S F, ZHANG X, HE Q Z. A New Conservative Integral with Arbitrary Singularity and Its Application. Int. J. Fracture, 1989, 40: 221-233.

[12.11] ZHAO J, ZHANG X. On the Process Zone of Quasi-Static Growing Tensile Crack with Power-Law Elastic-Plastic Damage. Int. J . Fracture,2001,108:383-395.

第13章 材料抗断裂性能厚度效应的半工程-半理论研究

13.1 材料断裂韧度与试样厚度关系

13.1.1 引 言

在断裂力学中，构件裂纹起始扩展时的临界应力强度因子即断裂韧度，可以用来预示含裂纹结构的剩余强度，它的大小取决于试样厚度、裂纹取向、试验温度和加载速率等，其中对断裂韧度起决定性作用的因素是试样的厚度。目前针对断裂韧度与厚度关系进行了较多的研究[13.1~13.3]。但是，由于断裂韧度与试样厚度关系的复杂性，现在还没有对这种关系进行比较恰当的、真正能够适用于工程应用的数学描述，目前只有一些关于使用标准主曲线来确定断裂韧度下界的研究[13.4,13.5]。

显然，如果能够使用特定的数学公式描述断裂韧度与试样厚度的关系，那么就可以通过少量的试验或者直接根据已有的试验数据来获得所需材料厚度的断裂韧度，大大节省试验的开支与缩短研究的周期。本节将在此方面进行有意义的尝试。

13.1.2 材料断裂韧度与试样厚度关系的定性描述

当试样厚度较小时，试样裂尖附近处于平面应力状态。随着

试样厚度的增加,平面应力状态向平面应变状态过渡。在试样厚度超过一定数值以后,材料将完全处于平面应变状态。而试验结果表明,在一定的范围内,较薄的试样具有较大的断裂韧度,随着试样厚度的增加,材料的断裂韧度值将逐渐减小,最终趋于一个恒定的较低极限值。断裂韧度随试样厚度的变化关系如图 13-1 所示。根据以上研究结果发现,充分厚的试样在完全处于平面应变状态的条件下,材料的断裂韧度将不再随着厚度变化,而是表现为一个恒定的常数。这个常数就是材料的平面应变断裂韧度,它代表着材料断裂韧度的下限。平面应变断裂韧度是材料的一种性能。

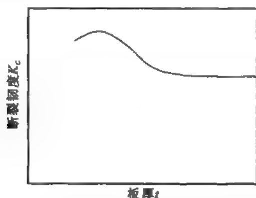


图 13-1　断裂韧度与试样厚度关系的定性描述

13.1.3　材料断裂韧度与试样厚度关系的定量分析

根据格利菲斯(Griffith)表面能理论,张开型裂纹的断裂判据为

$$G = 2S \tag{13-1}$$

式中,S 为表面能;G 为能量释放率。对于张开型裂纹有

$$G = \frac{1}{E_1}K_{\mathrm{I}}^2 \tag{13-2}$$



式中，K_1 为张开型裂纹应力强度因子；E_1 为广义弹性模量，其大小为

$$E_1 = E \qquad (\text{平面应力情况})$$

$$E_1 = \frac{E}{1-\nu^2} \qquad (\text{平面应变情况})$$

式中，E 为弹性模量；ν 为泊松比。

对于处在平面应变状态的材料而言，由式(13－1)与式(13－2)，可得张开型断裂韧度 K_{1C} 如下：

$$K_{1C} = \sqrt{2E_1 S} \tag{13-3}$$

进一步，根据巴林布拉特(Barenblatt)吸附力理论

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\delta^*} p(\delta)\mathrm{d}\delta \tag{13-4}$$

式中，δ 为裂尖附近吸附区内裂纹张开位移；$p(\delta)$ 为吸附区内裂纹上、下两岸吸附力集度，而 δ^* 则为裂纹张开位移的极限值。当 $\delta \geqslant \delta^*$ 时，吸附力消失，$p=0$。吸附区内 p 与 δ 的分布以及 p 与 δ 的关系示于图 13－2。

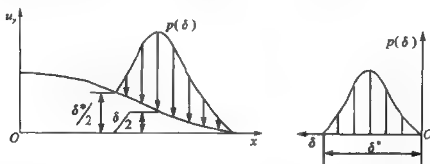


图 13－2　裂纹尖端吸附区内吸附力的分布及吸附力与张开位移的关系

对于处在平面应力状态的延展性材料而言，根据达格代尔(Dugdale)理论，裂尖附近的塑性区可简化为沿裂纹延长线上的一段狭长条带。因此，塑性区可视为吸附区，而塑性区中的应力 σ 可视为吸附力 p。从而，平面应力状态的断裂韧度可藉助式(13－3)与式(13－4)表示如下：



$$K_C = \sqrt{E\int_0^{\delta^*} \sigma(\delta)\mathrm{d}\delta} \tag{13-5}$$

由于塑性区滑移面与板平面成45°角(如图13－3所示),故塑性区内裂纹张开位移δ等于塑性区正应变ε与板厚t的乘积,即$\delta = t\varepsilon$。于是式(13－5)变为

$$K_C = \sqrt{Et\int_0^{\varepsilon^*} \sigma(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon} \tag{13-6}$$

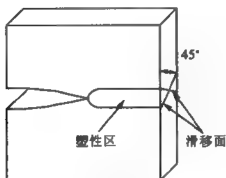


图13－3　平面应力情况下塑性区滑移面与板平面的关系示意图

塑性区内σ与δ的分布以及σ与ε的关系示于图13－4。

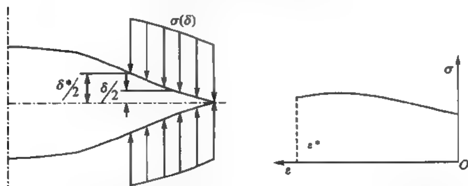


图13－4　裂纹尖端塑性区内正应力的分布及应力与塑性应变的关系



根据以上分析，可知

当$t\to0$时，材料完全处于平面应力状态，断裂韧度K_C与板厚t的平方根成正比，即

$$K_C=\xi t^{\frac{1}{2}} \tag{13-7}$$

当$t\to\infty$时，材料完全处于平面应变状态，断裂韧度K_C将不再随板厚t而变化，而表现为一个恒定的常数，即

$$K_C=K_{1C} \tag{13-8}$$

当t为任意厚度时，采用如下表达式来描述一般情况下断裂韧度K_C与板厚t的变化关系：

$$K_C=\xi t^{\frac{1}{2}}e^{-\kappa t}+K_{1C}(1-e^{-\kappa t}) \tag{13-9}$$

式中，ξ与κ是材料常数。

对于式(13-9)，采取如下两种极限分析：

当$t\to0$时，$e^{-\kappa t}\to1$，$(1-e^{-\kappa t})\to0$，则$K_C\to\xi t^{\frac{1}{2}}$；

当$t\to\infty$时，$e^{-\kappa t}\to0$，$(1-e^{-\kappa t})\to1$，则$K_C\to K_{1C}$。

由此可见，式(13-9)完全能够描述材料在各种状态下的断裂韧度与试样厚度的关系。由式(13-9)所表示的理论曲线见图13-5。

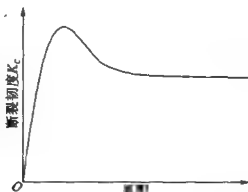


图13-5 断裂韧度与试样厚度关系的理论曲线图

13.1.4 材料常数 ξ 与 κ 的确定

对于不同的材料而言，式(13－9)中的材料常数 ξ 与 κ 具有不同的值。确定 ξ 与 κ 的具体过程如下所述：

首先，在相同的试验条件下，对于所研究的材料选取若干种试样厚度分别进行试验，获取它们所对应的断裂韧度。

然后，根据获得的相应厚度下的断裂韧度值，使用式(13－9)进行最小二乘法拟合，以获取材料常数 ξ 与 κ 以及平面断裂韧度 K_{1C}。

在具体的最小二乘法拟合过程中，假定式(13－9)中 κ 为已知常数，拟合 ξ 与 K_{1C}。令

$$\varphi(\xi, K_{1C}) = \sum_{i=1}^{N}(K_{Ci} - K_{Ci}^{*})^2 = \sum_{i=1}^{N}\left[K_{Ci} - \xi t_i^{\frac{1}{2}} e^{-\kappa t_i} - K_{1C}(1 - e^{-\kappa t_i})\right]^2 \quad (13-10)$$

式中，K_{Ci} 为根据试验所获得的某些厚度所对应的断裂韧度值；K_{C}^{*} 为通过理论公式(13－9)计算的该厚度下的断裂韧度值；$\varphi(\xi, K_{1C})$ 即为全体试验获得断裂韧度值与计算所得断裂韧度值之间误差的平方和。要使 $\varphi(\xi, K_{1C})$ 达到极小，只需将式(13－10)分别对 ξ 与 K_{IC} 求偏微分，并令其等于零。有

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} &= -2\sum_{i=1}^{N}\left[K_{Ci} - \xi t_i^{\frac{1}{2}} e^{-\kappa t_i} - K_{IC}(1 - e^{-\kappa t_i})\right] t_i^{\frac{1}{2}} e^{-\kappa t_i} = 0 \\
\frac{\partial\varphi}{\partial K_{IC}} &= -2\sum_{i=1}^{N}\left[K_{Ci} - \xi t_i^{\frac{1}{2}} e^{-\kappa t_i} - K_{IC}(1 - e^{-\kappa t_i})\right](1 - e^{-\kappa t_i}) = 0
\end{aligned}\right\} \quad (13-11)$$

化简整理后得到求解 ξ 与 K_{IC} 的线性方程组，即



$$
\left.\begin{aligned}
\xi\sum_{i=1}^{N} t_i e^{-2\kappa t_i} + K_{IC}\sum_{i=1}^{N}(1-e^{-\kappa t_i})t_i^{\frac{1}{2}} e^{-\kappa t_i} &= \sum_{i=1}^{N} K_{C_i} t_i^{\frac{1}{2}} e^{-\kappa t_i} \\
\xi\sum_{i=1}^{N} t_i^{\frac{1}{2}} e^{-\kappa t_i}(1-e^{-\kappa t_i}) + K_{IC}\sum_{i=1}^{N}(1-e^{-\kappa t_i})^2 &= \sum_{i=1}^{N} K_{C_i}(1-e^{-\kappa t_i})
\end{aligned}\right\}
\tag{13-12}
$$

解方程组就可以得到断裂韧度方程中的 ξ 与 K_{1C}。必须指出，在上述公式的推导过程中，假设 κ 是已知常数，随着 κ 值的不同，拟合所得到的 ξ 与 K_{IC}值是不同的，拟合误差 $\varphi(\xi,K_{1C})$的大小也会有所不同。

因此，还需要选取不同的 κ 值分别进行拟合，以拟合误差 $\varphi(\xi,K_{1C})$为优化目标，对 κ 值进行优化，最终优化所得到的 κ 值以及在此 κ 值下通过最小二乘法获得的 ξ 与 K_{1C}即为所求。

这样就得到了具体材料的断裂韧度 K_C 与厚度 t 的变化曲线。

13.1.5 理论曲线与试验验证

在进行试验验证时，选取了本章参考文献[13.6]中的两种材料 TC4(L－T)与 LY12CZ(L－T)作为验证对象。

1. 钛合金 TC4

对于 TC4(L－T)板材，参考文献[13.6]提供了四种厚度，分别是2 mm，5 mm，10 mm 和 15 mm。具体的实验条件是：试验环境是实验室空气，试样类型是紧凑拉伸 C(T)，取样方向为 L－T。通过试验可以获得四种厚度下的材料断裂韧度。进一步采用式(13－9)对上述试验数据进行最小二乘法拟合，通过式(13－12)计算得到具体的 K_{1C}，ξ 与 κ 值。这样，断裂韧度 K_C 与厚度 t 的变化曲线即可得到。

(1) 第一种拟合方法

在进行最小二乘法拟合时，首先使用三个试验数据点进行拟

合。表 13－1 列出了不同 κ 值所对应的拟合误差，拟合误差 $\varphi(\xi,K_{IC})$ 与 κ 的变化关系如图 13－6 所示。

表 13－1 TC4(L－T)三点拟合误差

κ	φ	κ	φ	κ	φ
0.20	5.628 5	0.27	2.398 9	0.34	0.502 8
0.21	5.166 6	0.28	1.954 1	0.35	0.869 7
0.22	4.701 8	0.29	1.517 7	0.36	1.223 0
0.23	4.235 9	0.30	1.091 0	0.37	1.562 7
0.24	3.771 0	0.31	0.674 8	0.38	1.888 4
0.25	3.308 8	0.32	0.269 9	0.39	2.200 2
0.26	2.850 9	0.33	0.122 8	0.40	2.498 2

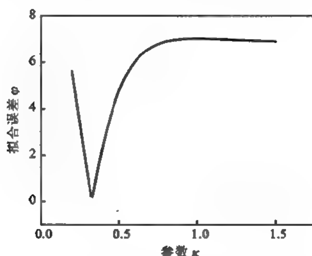
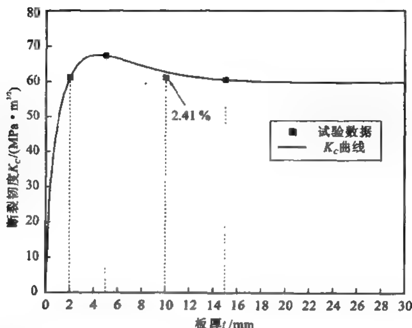


图 13－6 拟合误差 $\varphi(\xi,K_{IC})$与 κ 的变化关系

所拟合的断裂韧度与厚度变化曲线如图 13－7 所示。从图中可以看出，与拟合过程中未使用的 10 mm 厚度试验数据点相比，拟合曲线上 10 mm 对应的数据点差别不大(其相对误差见图 13－7)。考虑在具体的试验过程中其他因素的影响，可以认为该点也满足所拟合 $K_C \sim t$ 方程。





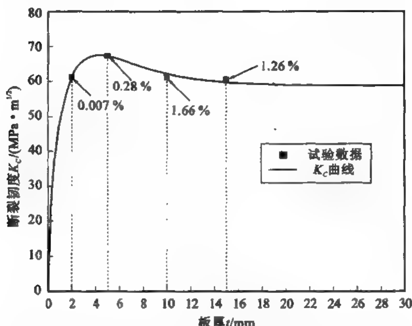
注：使用三个试验数据点拟合，κ=0.33，ξ=44.220 1，K_{IC}=59.690 3。
图中所标百分比为理论数据点与试验数据之间的相对误差，以下各图同。

图 13-7 TC4 板材(L-T)断裂韧度与板厚的变化曲线及试验验证

(2) 第二种拟合方法

进一步，使用四个试验数据点拟合 K_C～t 方程。表 13-2 列出了不同 κ 值所对应的拟合误差。拟合曲线的具体结果如图 13-8所示。与采用三个试验数据点拟合的 K_C～t 曲线相比，图 13-8 中的曲线与整体试验结果更为接近(各数据点的相对误差见图 13-8)。因此，完全可以认为，如果能够获得更多的试验数据点，将可以拟合出确切符合材料性质的 K_C～t 曲线方程。但是，由于试验条件与人力、物力的限制，不可能得到大量的试验数据点，只能通过少数的试验来获得材料的性质。这也正是本文研究的主要目的。





注：使用四个试验数据点拟合，$\kappa=0.32$，$\xi=44.752\ 6$，$K_{IC}=58.815\ 6$。

图 13-8 TC4 板材(L-T)断裂韧度与板厚的变化曲线及试验验证

表 13-2 TC4(L-T)四点拟合误差

κ	φ	κ	φ	κ	φ
0.20	9.273 2	0.27	4.346 5	0.34	2.156 4
0.21	8.505 5	0.28	3.739 6	0.35	2.246 5
0.22	7.756 2	0.29	3.159 1	0.36	2.337 1
0.23	7.027 3	0.30	2.604 9	0.37	2.427 6
0.24	6.320 6	0.31	2.153 2	0.38	2.517 5
0.25	5.637 6	0.32	1.999 3	0.39	2.786 6
0.26	4.979 3	0.33	2.067 4	0.40	3.086 9

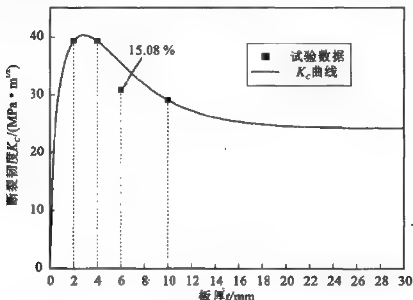
2. 铝合金 LY12CZ

对于 LY12CZ(L-T)板材，参考文献[13.6]也提供了四种厚度，分别是 2 mm，4 mm，6 mm 和 10 mm。具体的实验条件是：试验环境是实验室空气，试样类型是紧凑拉伸 C(T)，取样方向为



L-T。通过试验可以获得四种厚度下的材料断裂韧度,具体大小可以参看图 13-9。

对于 LY12CZ(L-T)板材,同样分别计算采用三个试验数据点与采用四个试验数据点所拟合的结果,如图 13-9 与图 13-10 所示。对应于不同的 κ 值,其拟合误差分别见表 13-3 与表 13-4。



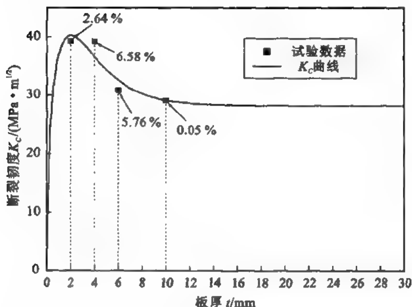
注:使用三个试验数据点拟合,κ=0.29,ξ=36.232 1,K_{IC}=24.220 8。

图 13-9 LY12CZ 板材(L-T)断裂韧度与板厚的变化曲线及试验验证

表 13-3 LY12CZ(L-T)三点拟合误差

κ	φ	κ	φ	κ	φ
0.20	2.160 7	0.27	0.507 0	0.34	1.211 3
0.21	1.934 8	0.28	0.261 8	0.35	1.453 6
0.22	1.704 5	0.29	0.015 9	0.36	1.694 1
0.23	1.470 4	0.30	0.230 4	0.37	1.932 5
0.24	1.233 1	0.31	0.476 7	0.38	2.168 4
0.25	0.993 1	0.32	0.722 5	0.39	2.401 7
0.26	0.750 9	0.33	0.967 5	0.40	2.632 0





注：使用四个试验数据点拟合，$\kappa=0.47$，$\xi=41.939\ 7$，$K_{IC}=28.226\ 3$。

图 13-10　LY12CZ 板材(L-T)断裂韧度与板厚的变化曲线及试验验证

表 13-4　LY12CZ(L-T)四点拟合误差

κ	φ	κ	φ	κ	φ
0.30	6.297 1	0.37	5.476 6	0.44	5.409 1
0.31	6.056 7	0.38	5.467 7	0.45	5.399 1
0.32	5.824 9	0.39	5.458 4	0.46	5.388 9
0.33	5.601 9	0.40	5.449 0	0.47	5.378 6
0.34	5.501 1	0.41	5.439 3	0.48	5.525 0
0.35	5.493 3	0.42	5.429 4	0.49	5.700 2
0.36	5.485 1	0.43	5.419 4	0.50	5.872 8

比较图 13-9 与图 13-10 中理论数据与试验数据之间的相对误差，同样可以发现，与采用三个试验数据点情况相比较，在采用四个试验数据点的情况下，数据的相对误差较小，拟合的理论曲线优于采用三个试验数据点拟合的结果。



13.1.6　断裂韧度与试样厚度关系的进一步研究

通过上述试验研究发现，TC4(L－T)板材的理论曲线与试验吻合较好，而LY12CZ(L－T)板材的理论曲线与试验数据相对误差偏大一些。针对这种情况，可以通过调节式(13－9)指数函数$e^{-\kappa t}$中厚度t的幂次以提高理论曲线的精度。

将理论曲线式(13－9)写成如下更为一般的形式：

$$K_C = \xi t^{\frac{1}{2}} e^{-\kappa t^m} + K_{1C}(1 - e^{-\kappa t^m}) \tag{13-13}$$

幂次m可以根据试验数据通过最小二乘方法进行拟合得到。

以LY12CZ(L－T)为例，取$m=2$，将式(13－13)写成

$$K_C = \xi t^{\frac{1}{2}} e^{-\kappa t^2} + K_{1C}(1 - e^{-\kappa t^2}) \tag{13-14}$$

根据三个试验数据点($t=2$ mm，4 mm，10 mm)进行拟合得到具体的K_{1C}，ξ与κ值，然后以$t=6$ mm的试验数据进行验证，其结果如图13－11所示。结果表明，$t=6$ mm时理论结果与试验数据的相对误差为5.89 %。由此可见，理论曲线的精度已有明显提高。

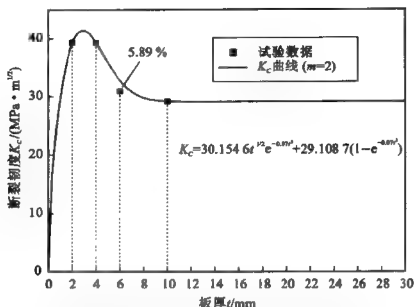
为了进一步提高理论曲线的精度，取$m=3$，可得理论曲线如下：

$$K_C = \xi t^{\frac{1}{2}} e^{-\kappa t^3} + K_{1C}(1 - e^{-\kappa t^3}) \tag{13-15}$$

拟合结果如图13－12所示。从图中可以看出，$t=6$ mm时理论结果与试验数据的相对误差已降为1.44 %。

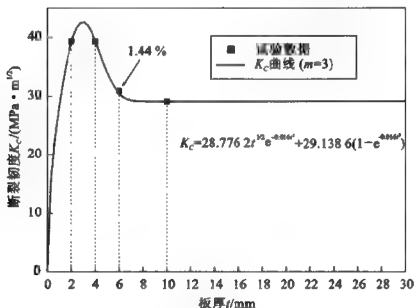
比较图13－9、图13－11与图13－12，可以发现$t=6$ mm处理论曲线与试验数据间的相对误差大幅下降；对于LY12CZ，理论公式(13－15)的拟合结果完全符合工程应用的要求。

因此，如果理论曲线式(13－9)与试验数据间相对误差偏大，可以通过调节$e^{-\kappa t}$项中关于t的幂次，达到进一步提高理论曲线精度的目的。



注：使用三个试验数据点拟合，κ=0.07，ξ=30.154 6，K_{IC}=29.108 7。

图 13－11 采用理论曲线式(13－14)的拟合结果及试验验证



注：使用三个试验数据点拟合，κ=0.016，ξ=28.776 2，K_{IC}=29.138 6。

图 13－12 采用理论曲线式(13－15)的拟合结果及试验验证



13.1.7 等效平面应变区与等效平面应力区概念

综合以上分析，可以提出等效平面应变区与等效平面应力区的概念，即含裂纹板沿厚度方向可以划分成为等效平面应变区与等效平面应力区。等效平面应变区厚度 t^* 与板厚 t 之比可用下式表示，即

$$f(t)=\frac{t^*}{t}=1-e^{-\kappa t^m} \tag{13-16}$$

从而，式(13-13)可简化为

$$K_C=\xi t^{\frac{1}{2}}[1-f(t)]+K_{IC}f(t) \tag{13-17}$$

其示意图如图 13-13 所示。

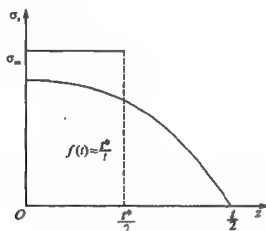


图 13-13 等效厚度模型示意图

13.1.8 结 论

通过上述两种材料的试验验证，可以发现，采用式(13-9)或式(13-13)描述材料断裂韧度与试样厚度的关系是非常适合的。这样，就可以通过同一材料的少数几种厚度试样的试验结果拟合

该材料的断裂韧度与厚度关系曲线。利用这一曲线能够获得其他厚度对应的断裂韧度，从而达到减少试验数量的目的。另外，通过对材料的断裂韧度与厚度关系的研究，也可进一步为获取材料的阻力曲线提供一定的理论基础。更为重要的是，本节建立了等效平面应变区百分比厚度模型（简称等效厚度模型），该力学模型为进一步的研究工作奠定了基础。

13.2 裂纹扩展阻力曲线与剩余强度关系的理论研究

13.2.1 引　言

有关裂纹扩展阻力曲线的研究是断裂力学中一个非常重要的课题。构件裂纹扩展时，具体过程并非完全类似。对于处在纯平面应变情况下的高强度材料而言，起裂后不需增加载荷就能使裂纹扩展，从而起裂载荷即可以使构件丧失承载能力；但其他情况却并非如此。裂纹起始扩展后，如欲增长裂纹，必须增大载荷。此时的裂纹扩展是稳定的，构件并未丧失承载能力。因此，就后者而言，起裂并不意味着结构的失效。对这些裂纹扩展行为的预测，可以通过研究裂纹扩展阻力曲线来完成。

但是，目前裂纹扩展阻力曲线是通过试验获得的[13.7~13.9]，没有从断裂力学角度出发对阻力曲线进行数学表达。因此，对于阻抗应力强度因子只与裂纹扩展量有关，而与初始裂纹长度无关的结论仅仅体现在试验现象的描述上，没有达到理论证明的高度。

起裂后结构的承载能力即结构剩余强度，可以通过裂纹扩展阻力曲线求得。但目前剩余强度图的做法是根据几何作图法通过阻力曲线与动力曲线进行确定，没有具体的解析表达式。这就导致结果不精确，而且做法也极为不便。



本节将对裂纹扩展阻力曲线进行具体的理论公式推导，并通过试验进行验证，进一步利用理论阻力曲线给出结构的剩余强度图。

13.2.2 裂纹扩展阻力曲线理论公式的推导

裂纹扩展时，阻抗应力强度因子增大，裂纹尺寸增加。裂纹扩展速率可以使用下式[13.10]描述，即

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}T}=\alpha K_R^{m-1}\frac{\mathrm{d}K_R}{\mathrm{d}T} \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}K_R}=\alpha K_R^{m-1} \tag{13-18}$$

式中，a 为实时裂纹尺寸；T 为时间；K_R 为阻抗应力强度因子；m 和 α 为材料常数。

由式(13-18)可得

$$\mathrm{d}a=\alpha K_R^{m-1}\mathrm{d}K_R \tag{13-19}$$

对式(13-19)进行积分，则

$$a-a_0=\frac{\alpha}{m}(K_R^m-K_C^m) \tag{13-20}$$

式中，a_0 为初始裂纹长度；K_C 为材料的断裂韧度；可以通过试验获取或者使用公式[13.11]计算得到。

进一步整理，可以得到所求理论阻抗应力强度因子公式

$$K_R=\left[K_C^m+\frac{m}{\alpha}(a-a_0)\right]^{\frac{1}{m}} \tag{13-21}$$

显然，在裂纹扩展阻力曲线公式(13-21)中，K_R 只是裂纹扩展量 $\Delta a=a-a_0$ 的函数，与初始裂纹长度 a_0 无关。这就从理论上证实了以前由试验所得到的结论。

13.2.3 材料常数 m 和 α 的确定

对于不同的材料和板厚而言，式(13-21)中的材料常数 m 和 α 具有不同的值。它们需要通过试验数据拟合获得。下面讨论拟



合过程。

首先，假定式(13-21)中 m 为已知常数，通过最小二乘方法拟合 α。令

$$\varphi(m,\alpha)=\sum_{i=1}^{N}\left[K_{Ri}^{m}-(K_{Ri}^{*})^{m}\right]^{2}=$$

$$\sum_{i=1}^{N}\left[K_{Ri}^{m}-K_{C}^{m}-\frac{m}{\alpha}(a_i-a_0)\right]^{2}\quad(13-22)$$

式中，K_{Ri} 为根据试验所获得的阻抗应力强度因子值；K_{Ri}^{*} 为通过理论公式(13-21)计算的阻抗应力强度因子值；$\varphi(m,\alpha)$ 为以上二者之间误差的平方和；N 代表试验数据组数。要使 $\varphi(m,\alpha)$ 达到极小，只需将式(13-22)对 $1/\alpha$ 求偏微分，并令其等于零。于是，有

$$\sum_{i=1}^{N}\left[K_{Ri}^{m}-K_{C}^{m}-\frac{m}{\alpha}(a_i-a_0)\right](a_i-a_0)=0\quad(13-23)$$

进一步，可得到

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{\sum_{i=1}^{N}K_{Ri}^{m}(a_i-a_0)-K_{C}^{m}\sum_{i=1}^{N}(a_i-a_0)}{m\sum_{i=1}^{N}(a_i-a_0)^{2}}\quad(13-24)$$

必须指出，在上述公式的推导过程中，假设 m 是已知常数。随着 m 值的不同，拟合所得到的 α 值也是不同的，拟合误差 $\varphi(m,\alpha)$ 的大小也会有所不同。

然后，将式(13-24)代入式(13-22)，可知

$$\varphi(m)=\sum_{i=1}^{N}\left[K_{Ri}^{m}-K_{C}^{m}-\frac{\sum_{i=1}^{N}K_{Ri}^{m}(a_i-a_0)-K_{C}^{m}\sum_{i=1}^{N}(a_i-a_0)}{\sum_{i=1}^{N}(a_i-a_0)^{2}}(a_i-a_0)\right]^{2}$$

$$(13-25)$$



这样，拟合误差 $\varphi(m)$将随着 m 值的变化而改变。因此，如果以拟合误差 $\varphi(m)$最小为优化目标，对 m 值进行优化，就可以得到使拟合误差 $\varphi(m)$ 最小的 m 值。在 m 值已知的情况下，通过式(13-24)可获取 α。

下面以 LY12CZ 铝合金板材和 TC4 钛合金板材[13.6]为例，验证上述方法的可行性。具体的试验条件如下：试验环境是实验室空气，试样类型为紧凑拉伸 C(T)，取样方向为 L-T。选用的试样如图 13-14 所示。图中，W 为试样的宽度；a 为扩展裂纹的长度。

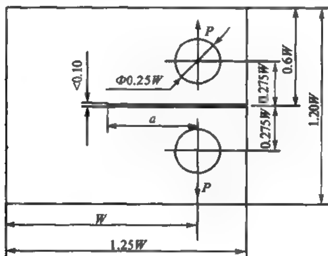


图 13-14 紧凑拉伸 C(T)试样图

按照上述拟合方法对参考文献[13.6]提供的四种板厚所对应的裂纹扩展阻力数据分别进行拟合。在具体的拟合过程中，对于不同板厚而言，考虑了两种情况：一种是参数 m 是变化的；另一种是 m 为一个固定的常数。对于第一种情况，按照上述拟合方法求解即可。对于第二种情况，首先分别拟合出各种厚度下满足拟合误差 $\varphi(m,\alpha)$为最小的 m 值；然后求解所有厚度下 m 的平均值，并作为最终的固定常数 m；最后在此固定常数 m 下采用最小二乘方法分别拟合对应厚度的 α。

对于 LY12CZ 铝合金板材，两种方法的拟合结果见图 13－15。图中虚线表示第一种情况的拟合结果，实线表示第二种情况的拟合结果。

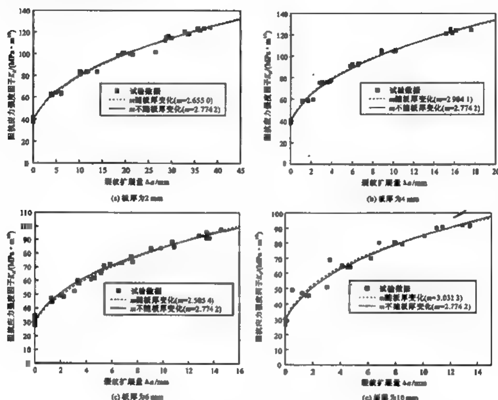


图 13－15　LY12CZ 板材的扩展阻力曲线

对于 TC4 钛合金板材，采用相同的方法所得拟合结果见图 13－16。

从图 13－15 和图 13－16 可以看出，两种拟合方法都能够很好地满足工程要求，拟合所得到的裂纹扩展阻力曲线符合试验结果。但就工程应用而言，m 作为一个固定常数显然具有更好的使用价值。



(a) 板厚为2 mm (b) 板厚为5 mm

(c) 板厚为10 mm (d) 板厚为15 mm

图 13-16 TC4板材的扩展阻力曲线

13.2.4 裂纹扩展剩余强度的计算——解析法

裂纹扩展剩余强度即裂纹产生失稳扩展时的临界应力大小，可以通过裂纹扩展阻力曲线（理论公式(13-21)）与裂纹扩展动力曲线（应力强度因子公式）的相切条件而得到。从而，在发生失稳断裂的临界点处，以下两个条件成立，即

$$K_1 = K_R \tag{13-26}$$

$$\frac{\partial K_1}{\partial a} = \frac{\mathrm{d}K_R}{\mathrm{d}a} \tag{13-27}$$

裂纹扩展驱动应力强度因子公式如下：



$$K_{\mathrm{I}} = \sigma F(a) \tag{13-28}$$

在失稳点处，由式(13－26)、式(13－28)和式(13－21)，可以得到阻抗应力公式如下：

$$\sigma_R = \frac{\left[K_C^m + \frac{m}{\alpha}(a - a_0)\right]^{\frac{1}{m}}}{F(a)} \tag{13-29}$$

在失稳点处，由式(13－27)可知

$$\sigma_R F'(a) = \frac{1}{\alpha}\left[K_C^m + \frac{m}{\alpha}(a - a_0)\right]^{\frac{1}{m}-1} \tag{13-30}$$

综合式(13－29)和式(13－30)，得到

$$\frac{1}{\alpha}\left[K_C^m + \frac{m}{\alpha}(a - a_0)\right]^{-1} = \frac{F'(a)}{F(a)} \tag{13-31}$$

这样，满足式(13－31)的裂纹尺寸即为临界裂纹尺寸 a_c，然后将由式(13－31)求得的临界裂纹尺寸 a_c 代替式(13－29)中的 a，可以求出相应的剩余强度 σ_{Rc}。

另一方面，考虑式(13－29)，并令

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_R}{\mathrm{d}a} = \frac{\frac{F(a)}{\alpha}\left[K_C^m + \frac{m}{\alpha}(a - a_0)\right]^{\frac{1}{m}-1} - F'(a)\left[K_C^m + \frac{m}{\alpha}(a - a_0)\right]^{\frac{1}{m}}}{F^2(a)} = 0 \tag{13-32}$$

可以求解得到使 σ_R 取极值的 a。通过进一步整理式(13－32)，也能够得到式(13－31)。这就是说，阻抗应力取极值的条件与裂纹扩展阻力曲线和动力曲线相切的条件等价，σ_R 曲线的极值点对应着裂纹扩展阻力曲线与动力曲线的相切点。因此，也可以通过对 σ_R 曲线求极值点的方法直接得到有关裂纹扩展的临界裂纹尺寸 a_c，进而求得 σ_R 曲线的极值点与相应的剩余强度 σ_{Rc}。

13.2.5 举　例

现在，以参考文献[13.6]中的 LY12CZ 铝合金薄板和 TC4 钛



合金板材为例，说明有关剩余强度的计算。

在参考文献[13.6]中，试验所用 C(T)试样类型的应力强度因子公式为

$$K = \sigma \sqrt{W} f\left(\frac{a}{W}\right) \tag{13-33}$$

式中

$$f\left(\frac{a}{W}\right)=\left\{\left(2+\frac{a}{W}\right)\left[0.866+4.64\frac{a}{W}-13.32\left(\frac{a}{W}\right)^2+14.72\left(\frac{a}{W}\right)^3-5.6\left(\frac{a}{W}\right)^4\right]\right\}\Big/\left(1-\frac{a}{W}\right)^{\frac{3}{2}} \tag{13-34}$$

式中，σ 为名义应力，可由 $\sigma=P/BW$ 求得；P 为通过销钉孔施加的载荷，如图 13-14 所示；B 为试样厚度；W 为试样宽度。

在试验中，LY12CZ 铝合金板材和 TC4 钛合金板材的各厚度板所采用的初始裂纹长度分别如表 13-5 和表 13-6 所列。

比较式(13-33)与式(13-28)，有

$$F(a) = \sqrt{W} f\left(\frac{a}{W}\right) \tag{13-35}$$

这样，通过式(13-31)可以求出临界裂纹长度 a_c，进而通过式(13-29)可求得剩余强度 σ_{Rc}。

表 13-5 LY12CZ 各厚度板剩余强度的试验数据以及与计算数据比较

t/mm	a_0/mm	试验数据 P_c/N	计算数据 P_c/N	相对误差/(%)
2	143	18 071.8	18 515.4	2.45
4	83	*	23 148.6	
6	56	24 362.9	24 837.3	1.95
10	55	41 458.8	43 158.0	4.10

* 表示试验未提供数据或数据存在问题。

表 13-6　TC4 各厚度板剩余强度的试验数据以及与计算数据比较

t/mm	a_0/mm	试验数据 P_c/N	计算数据 P_c/N	相对误差/(%)
2	25	10 311.0	10 490.0	1.74
5	26	26 605.7	27 054.8	1.69
10	25	*	52 450.1	
15	24.8	51 958.6	48 115.2	7.40

* 表示试验未提供数据或数据存在问题。

计算临界载荷与试验临界载荷的比较列于表 13-5 与表 13-6。由两表可见，计算结果的误差处于工程许可范围之内。

根据式(13-29)与式(13-35)可以直接得到 $\sigma_R \sim a$ 曲线。图 13-17给出了 LY12CZ 板材的四种厚度情况下的 $\sigma_R \sim a$ 曲线，图 13-18 给出了 TC4 板材的四种厚度情况下的 $\sigma_R \sim a$ 曲线。

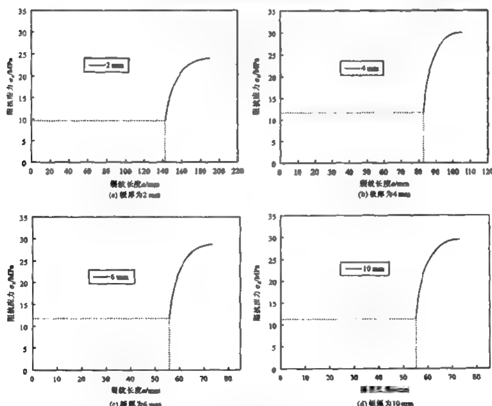


图 13-17　LY12CZ 板材的 $\sigma_R \sim a$ 曲线



从图中可以看出，$\sigma_R \sim a$ 曲线均存在极值点，极值点对应的裂纹尺寸就是临界裂纹尺寸 a_c。这也进一步验证了阻抗应力取极值的条件与裂纹扩展阻力曲线和动力曲线相切的条件是相同的。

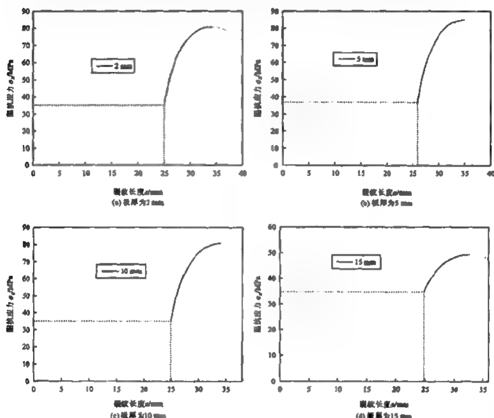


图 13-18　TC4 板材的 $\sigma_R \sim a$ 曲线

在每一种厚度的板材情况下，分别选取不同的初始裂纹长度，可以得到此板厚的一组 $\sigma_R \sim a$ 曲线，这样也就得到了此板厚情况的剩余强度图。图 13-19 中的(a)，(b)，(c)，(d)分别为 LY12CZ 板材四种厚度情况的剩余强度图，图 13-20 中的(a)，(b)，(c)，(d)分别为 TC4 板材四种厚度情况的剩余强度图。



裂纹长度a/mm
(a) 板厚为2 mm

裂纹长度a/mm
(b) 板厚为4 mm

裂纹长度a/mm
(c) 板厚为6 mm

裂纹长度a/mm
(d) 板厚为10 mm

图 13-19 LY12CZ 板材的剩余强度曲线

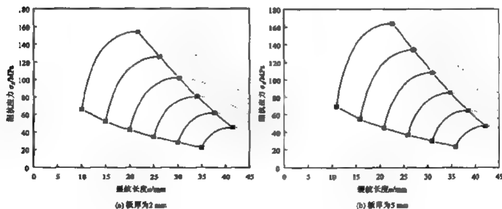
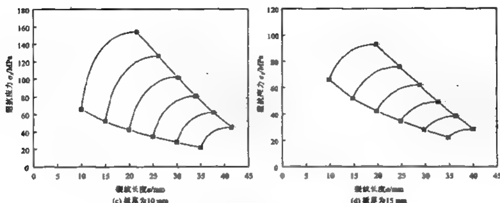


图 13-20 TC4 板材的剩余强度曲线





(c) 板厚为10 mm　　(d) 板厚为15 mm

图 13-20　TC4 板材的剩余强度曲线(续)

13.2.6 结　论

在本节中，进行了如下的工作：

① 推导了裂纹扩展阻力曲线的数学表达式。

② 从理论上证明了 K_R 只是裂纹扩展量 Δa 的函数，与初始裂纹长度 a_0 无关。

③ 通过试验结果进一步发现，式(13-21)中的参数 m 在工程应用中可以选作为一个固定常数。

④ 根据裂纹扩展阻力曲线理论公式，给出了求解剩余强度的具体公式，可以方便、准确地计算出构件的剩余强度，从而能够简捷地获取剩余强度图。这种解析法与图解法相比，可以显著提高结构损伤容限设计的计算效率与精度。

⑤ 从试验验证的结果来看，通过公式计算的临界载荷，与试验提供的数据比较，相对误差较小。

13.3 裂纹扩展阻力曲线与试样厚度关系研究

13.3.1 引　言

裂纹扩展阻力曲线可以用来预测裂纹扩展行为，估算含裂纹构件在起裂后的承载能力，因此裂纹扩展阻力曲线的研究在断裂力学中占有非常重要的地位，其相关研究也受到广大研究人员的关注。目前的阻力曲线研究大多集中在试验研究方面[13.7~13.9]。但是，众所周知，阻力曲线除了与材料性质有关，还与试样的厚度有关，故试验需要花费大量的人力与物力，所以在实际应用中完全通过试验获取阻力曲线并非十分方便。

前面曾经首先从断裂力学出发推导了断裂韧度 K_C 与试样厚度关系的数学表达式[13.11]，然后在参考文献[13.10]的基础上，提出了理论阻力曲线[13.12]。本节是在以上理论阻力曲线基础上，建立此曲线与试样厚度关系的数学表达式，以便达到减少试验工作量，并丰富现有工程材料断裂性能手册内容的目的。

13.3.2 裂纹扩展阻力曲线与试样厚度关系的理论公式

根据参考文献[13.10]，裂纹扩展速率可以表示如下：

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} &= \alpha K_{\mathrm{I}}^{m-1}\frac{\mathrm{d}K_{\mathrm{I}}}{\mathrm{d}T} \qquad (K_{\mathrm{I}} > K_C) \\ \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}T} &= 0 \qquad (K_{\mathrm{I}} < K_C) \end{aligned}\right\} \tag{13-36}$$

式中，a 为裂纹长度；T 为时间；K_{I} 为 I 型应力强度因子。

积分式(13－36)，裂纹扩展阻力曲线理论公式具有如下形式：



$$K_R = \left(K_C^m + \frac{m}{\alpha}\Delta a\right)^{\frac{1}{m}} \quad (13-37)$$

式中，K_R 为阻抗应力强度因子；K_C 为材料断裂韧度；Δa 为裂纹扩展长度；m 和 α 为与试件厚度 t 有关的材料常数。

整理式(13－37)，可得

$$K_R = K_C[1+\eta(t)\Delta a]^{\frac{1}{m}} \quad (13-38)$$

式中，t 为板的厚度；$\eta(t)$ 为

$$\eta(t) = \frac{m(t)}{\alpha(t)}\frac{1}{K_C^m} \quad (13-39)$$

材料断裂韧度 K_C 与试样厚度 t 的关系可以使用下式表示[13,11]，即

$$K_C = \xi\sqrt{t}e^{-\kappa t} + K_{IC}(1-e^{-\kappa t}) \quad (13-40)$$

式中，K_{IC}为平面应变断裂韧度；ξ 与 κ 为材料常数。

当试样厚度足够大时，构件将处于完全平面应变状态，裂纹扩展阻抗应力强度因子不再随着裂纹尺寸的增加发生变化，而是表现为一恒定值，即平面应变断裂韧度 K_{IC}。因此，式(13－38)应满足如下极限情况：

当 $t\to 0$ 时　　$K_C\to 0$，　$\eta\to\eta_0$

当 $t\to\infty$ 时　$K_C\to K_{IC}$，　$K_R\to K_{IC}$，　$\eta\to 0$

通过以上分析，可采用如下形式表示 $\eta(t)$，即

$$\eta(t) = (A+B\sqrt{t})e^{-\mu t^n} \quad (13-41)$$

式中，A，B，μ 和 n 是与试样厚度 t 无关的常数。

这样，在厚度 t 已知的情况下，由式(13－40)求出 K_C 值，通过式(13－41)求出 η 值，然后根据式(13－38)即可获得特定厚度下的裂纹扩展阻力曲线方程。

13.3.3 裂纹扩展阻力曲线拟合

裂纹扩展阻力曲线的拟合可分为两个步骤。第一步先根据若

下 $K_R \sim \Delta a$ 试验数据点，按照式(13－38)拟合各厚度板对应的 K_R 方程，从而得出一组 $\eta \sim t$ 数据。第二步通过式(13－41)拟合第一步所得到的 $\eta \sim t$ 数据，以获取 $\eta(t)$ 的数学表达式。

考虑式(13－38)，如果对应厚度下的 K_C 已通过式(13－40)求出，那么式(13－38)中的参数就只有 m 和 η 是未知的。对于不同的材料和板厚而言，m 和 η 具有不同的值，它们需要通过试验数据拟合获得。但就工程应用而言，m 作为一个固定常数显然具有更好的使用价值。更为重要的是，在 m 作为固定常数情况下拟合的裂纹扩展阻力曲线仍然与试验结果相符合[13.12]。为此，首先分别拟合出各种厚度下满足拟合误差 $\varphi(m,\eta)$ 为最小的 m 值；然后求解所有厚度下 m 的平均值，并作为最终选定的固定常数 m；最后在此固定常数 m 下采用最小二乘方法分别拟合对应厚度的 η。以下讨论具体的拟合过程。

假定式(13－38)中 m 为已知常数，通过最小二乘方法拟合 η。为了便于拟合，将式(13－38)进一步改写为如下形式：

$$K_{RN} = (1 + \eta\Delta a)^{\frac{1}{m}} \tag{13-42}$$

式中

$$K_{RN} = \frac{K_R}{K_C} \tag{13-43}$$

式中，K_{RN} 可称为正则阻抗应力强度因子。

首先，令

$$\varphi(m,\eta) = \sum_{i=1}^{N}\left[K_{RNi}^{m} - (K_{RNi}^{*})^{m}\right]^{2} = \sum_{i=1}^{N}\left[K_{RNi}^{m} - (1 + \eta\Delta a_i)\right]^{2} \tag{13-44}$$

式中，K_{RNi} 为按照式(13－43)计算的试验所得正则阻抗应力强度因子值；K_{RNi}^{*} 为通过理论公式(13－42)计算的正则阻抗应力强度因子值；$\varphi(m,\eta)$ 即为以上二者之间误差的平方和；N 为试验数据组数。要使 $\varphi(m,\eta)$ 达到极小，只需将式(13－44)对 η 求偏导数，



并令其等于零。于是，有

$$\sum_{i=1}^{N}[K_{RN_i}^{m}-(1+\eta\Delta a_i)]\Delta a_i=0 \tag{13-45}$$

进一步可得到

$$\eta=\frac{\sum_{i=1}^{N}K_{RN_i}^{m}\Delta a_i-\sum_{i=1}^{N}\Delta a_i}{\sum_{i=1}^{N}(\Delta a_i)^2} \tag{13-46}$$

必须指出，在上述公式的推导过程中，假设 m 是已知常数，随着 m 值的不同，拟合所得到的 η 值也是不同的，拟合误差 $\varphi(m,\eta)$ 的大小也会有所不同。

然后，将式(13-46)代入式(13-44)，可知

$$\varphi(m)=\sum_{i=1}^{N}\left[K_{RN_i}^{m}-1-\frac{\sum_{i=1}^{N}K_{RN_i}^{m}\Delta a_i-\sum_{i=1}^{N}\Delta a_i}{\sum_{i=1}^{N}(\Delta a_i)^2}\Delta a_i\right]^2 \tag{13-47}$$

这样，拟合误差 $\varphi(m)$ 将随着 m 值的变化而改变。因此，如果以拟合误差 $\varphi(m)$ 最小为优化目标，对 m 值进行优化，就可以得到使拟合误差 $\varphi(m)$ 最小的 m 值。

按照上述步骤，求解出所需拟合的各厚度板对应的 m 值后，计算它们的平均值，并把该平均值作为最终选定的固定常数 m。在 m 值已知的情况下，重复上述拟合过程，可以获取对应厚度下的 η 值，从而得到一组 $\eta\sim t$ 数据。

13.3.4 η 曲线拟合

下面按照式(13-41)进行 $\eta(t)$ 曲线的拟合。假定 μ 与 n 为常数，设



$$\psi(A,B,\mu,n)=\sum_{i=1}^{N}(\eta_i-\eta_i^*)^2=$$

$$\sum_{i=1}^{N}\left[\eta_i-(A+B\sqrt{t_i})e^{-\mu t_i^n}\right]^2 \quad (13-48)$$

式中，η_i 为拟合 K_R 曲线所得到的值；η_i^* 为通过理论公式(13－41)计算所得到的值；$\psi(A,B,\mu,n)$即为以上二者之间误差的平方和；N 为试验所用板厚的个数。要使 $\psi(A,B,\mu,n)$为极小，只需将式(13－48)分别对 A 与 B 求偏微分，并令其等于零。于是，有如下方程组：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial A}&=-2\sum_{i=1}^{N}(\eta_i-Ae^{-\mu t_i^n}-B\sqrt{t_i}e^{-\mu t_i^n})e^{-\mu t_i^n}=0\\\frac{\partial\psi}{\partial B}&=-2\sum_{i=1}^{N}(\eta_i-Ae^{-\mu t_i^n}-B\sqrt{t_i}e^{-\mu t_i^n})\sqrt{t_i}e^{-\mu t_i^n}=0\end{aligned}\right\}$$

(13－49)

化简整理，得

$$A\sum_{i=1}^{N}e^{-2\mu t_i^n}+B\sum_{i=1}^{N}\sqrt{t_i}e^{-2\mu t_i^n}=\sum_{i=1}^{N}\eta_i e^{-\mu t_i^n} \quad (13-50)$$

$$A\sum_{i=1}^{N}\sqrt{t_i}e^{-2\mu t_i^n}+B\sum_{i=1}^{N}t_i e^{-2\mu t_i^n}=\sum_{i=1}^{N}\eta_i\sqrt{t_i}e^{-\mu t_i^n} \quad (13-51)$$

通过方程组式(13－50)与式(13－51)可以求解式(13－41)中的 A 与 B。

接着，选取不同的 μ 和 n 值分别进行拟合，把拟合误差 $\psi(A,B,\mu,n)$作为优化目标，对 μ 和 n 进行优化，最终优化所得到的 μ 和 n 值以及在此 μ 和 n 值下通过最小二乘方法获得的 A 与 B 即为所求。

13.3.5 举　例

以 LY12CZ 铝合金板材和 TC4 钛合金板材[13.6]为例来验证



上述求解阻力曲线的方法。具体的试验条件如下：试验环境是实验室空气，试样类型是 C(T)，取样方向为 L－T，选用的试样如图 13－14 所示。

1. 铝合金 LY12CZ

对于 LY12CZ 铝合金板材而言，参考文献[13.6]提供了四种厚度的板，分别是 2 mm，4 mm，6 mm 和 10 mm。首先根据式(13－38)拟合裂纹扩展阻力曲线，得到一组相关的 $\eta \sim t$ 数据，如表 13－7 所列。

表 13－7 LY12CZ 各厚度板对应的参数 η(m=2.774 35)

t/mm	η
2	0.617 1
4	1.445 9
6	1.598 2
10	1.857 7

然后，拟合 $\eta \sim t$ 曲线。拟合时选用 2 mm，4 mm 和 10 mm 厚度板对应的 η 值作为拟合数据，6 mm 厚度作为验证厚度。拟合结果如图 13－21 所示。

根据拟合所得 $\eta(t)$ 函数，求解出 $t=6$ mm 时对应的 η 值，代入式(13－38)即可得到裂纹扩展阻力曲线。

图 13－22 至图 13－24 分别给出了三种试样厚度，$t=2$ mm，4 mm，10 mm 所对应的阻力曲线，它们是直接根据试验数据拟合所得到的。图 13－25 显示了通过式(13－38)和式(13－41)计算所得 $t=6$ mm 时所对应的阻力曲线。

从图 13－25 可以看出，通过式(13－38)和式(13－41)计算所得阻力曲线仍处于试验数据带内，满足试验要求。因此，对于铝合金板材而言，可以使用式(13－38)和式(13－41)计算任意厚度对应的 η 值，获取该厚度下对应的裂纹扩展阻力曲线，从而可以节省



大量试验工作时间。

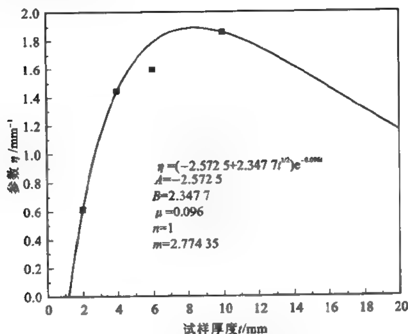


图 13-21　LY12CZ 铝合金板材对应 η 曲线

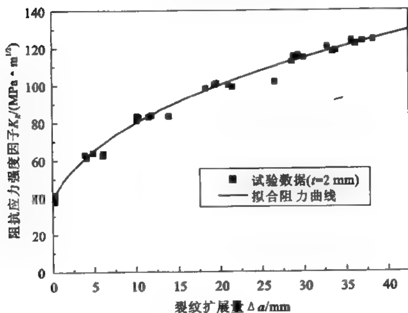


图 13-22　LY12CZ 铝合金板材 $t=2$ mm 时拟合阻力曲线



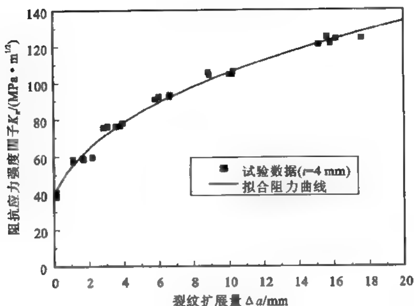


图 13-23 LY12CZ 铝合金板材 t=4 mm 时拟合阻力曲线

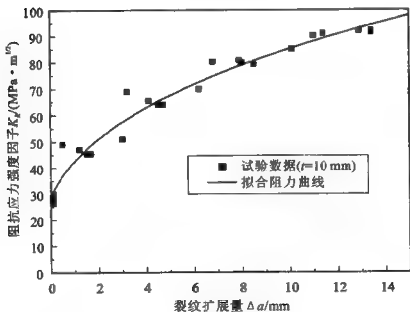


图 13-24 LY12CZ 铝合金板材 t=10 mm 时拟合阻力曲线



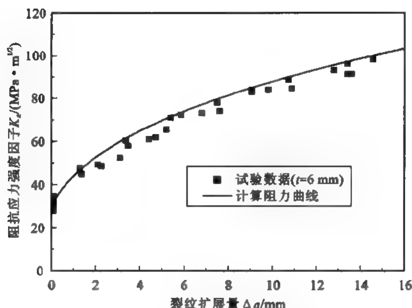


图 13-25 LY12CZ 铝合金板材 $t=6$ mm 时计算所得阻力曲线

图 13-26 给出一组计算所得不同厚度下对应的裂纹扩展阻力曲线。从 $K_R \sim \Delta a$ 曲线族可以发现,在试验厚度足够大的情况下,例如 $t=100$ mm,阻力曲线的形状接近于一条水平直线,这时的裂纹扩展阻抗应力强度因子 K_R 趋向于一个常数,即平面应变断裂韧度 K_{IC}。这与试验结果是一致的。LY12CZ 铝合金板材所对应的断裂韧度与试样厚度的关系曲线 $K_C \sim t$,如图 13-12 所示。

2. 钛合金 TC4

对于钛合金板材 TC4 而言,参考文献[13.6]同样提供了四种厚度的板,分别是 2 mm,5 mm,10 mm 和 15 mm。采取同样的方法,首先根据式(13-38)拟合裂纹扩展阻力曲线,得到一组相关的 $\bar{\eta} \sim t$ 数据,如表 13-8 所列。



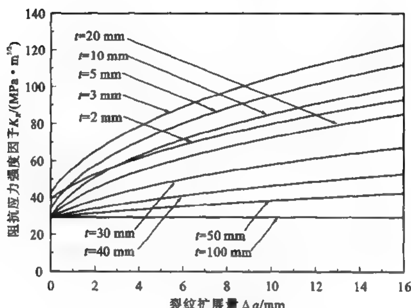


图 13-26 LY12CZ 铝合金板材阻力曲线族

表 13-8 TC4 各厚度板对应的参数 η(m=2.015 6)

t/mm	η
2	1.234 0
5	1.250 3
10	1.162 8
15	0.384 5

然后，使用相同的方法拟合 $\eta \sim t$ 曲线。拟合时选用 2 mm，5 mm和 15 mm 厚度板对应的 η 值作为拟合数据，10 mm 厚度作为验证厚度。拟合结果如图 13-27 所示。

根据拟合所得 $\eta(t)$ 函数，求解出 $t=10$ mm 时对应的 η 值，代入式(13-38)即可得到裂纹扩展阻力曲线。

图 13-28 至图 13-30 分别给出了三种试样厚度，$t=2$ mm，5 mm，15 mm 所对应的阻力曲线，它们是直接根据试验数据拟合



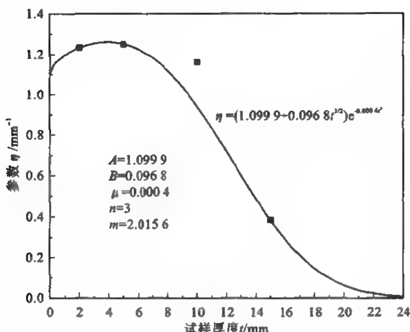


图 13-27　TC4 钛合金板材对应 η 曲线

所得到的。图 13-31 显示了通过式(13-38)和式(13-41)计算所得 $t=10$ mm 时所对应的阻力曲线。

从图 13-31 中可以看出,通过式(13-38)和式(13-41)计算所得阻力曲线仍处于试验数据带内,满足试验要求。因此,对于钛合金板材而言,可以使用式(13-38)和式(13-41)计算任意厚度对应的 η 值,获取该厚度下对应的裂纹扩展阻力曲线,从而可以有效降低试验工作量。

图 13-32 给出一组计算所得不同厚度下对应的裂纹扩展阻力曲线。从 $K_R \sim \Delta a$ 曲线族可以发现,在试验厚度足够大的情况下,例如 $t=25$ mm,阻力曲线的形状接近于一条水平直线,这时的裂纹扩展阻抗应力强度因子 K_R 趋于一个常数,即平面应变断裂韧度 K_{IC}。这与试验结果同样是一致的。TC4 钛合金板材所对应的断裂韧度与试样厚度的关系曲线 $K_C \sim t$,如图 13-7 所示。

两种材料,铝合金板材 LY12CZ 和钛合金板材 TC4 所对应的



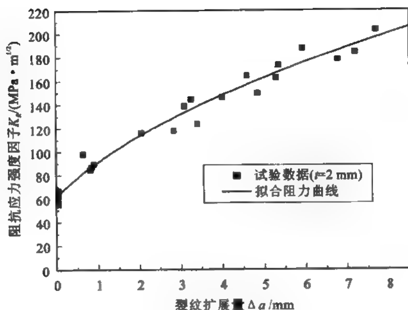


图 13－28　TC4 钛合金板材 t＝2 mm 时拟合阻力曲线

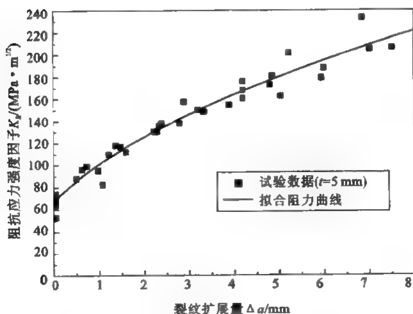


图 13－29　TC4 钛合金板材 t＝5 mm 时拟合阻力曲线



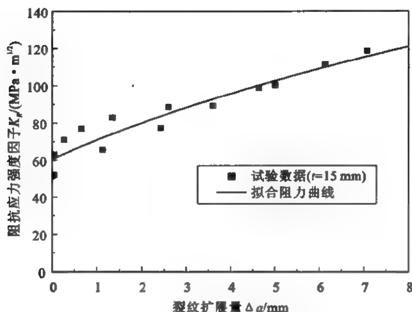


图 13-30　TC4 钛合金板材 t=15 mm 时拟合阻力曲线

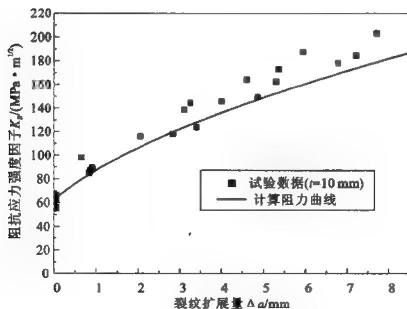


图 13-31　TC4 钛合金板材 t=10 mm 时计算所得阻力曲线



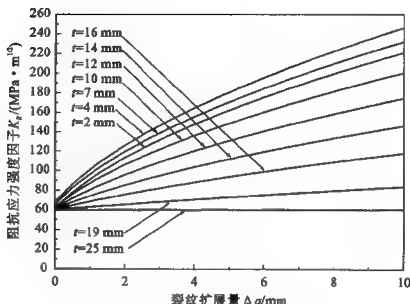


图 13-32 TC4钛合金板材阻力曲线族

参数见表 13-9。

表 13-9 两种材料的参数

材 料	A	B	μ	n	m
LY12CZ	−2.572 5	2.347 7	0.096 0	1	2.774 35
TC4	1.099 9	0.096 8	0.000 4	3	2.015 6

13.3.6 结 论

本节从作者提出的关于裂纹扩展理论阻力曲线出发，建立了预先满足各种极端情况的裂纹扩展阻力曲线与试样厚度关系的定量公式。对于该公式中与试样厚度有关的参数，进一步给出了具体数学表达式。通过试验验证，表明该公式具有较好的适用性。

使用本节推导的裂纹扩展阻力曲线理论公式，通过少量试验

即可获得所有厚度下对应的裂纹扩展阻力曲线,因此在结构与机械的损伤容限设计领域,该公式将具有一定的应用前景。

参考文献

[13.1] TIMOFEEV B T, BLUMIN A A, ANIKOVSKY V V. Fracture Toughness of Low Carbon Steels and Their Weldments. Int. J. of Pressure Vessels and Piping, 1998, 75: 945-950.

[13.2] PUTATUNDA S K. Fracture Toughness of High Carbon and High Silicon Steel. Materials Science and Engineering, 2001, A297: 31-43.

[13.3] TÄHTINEN S, LAUKKANEN A, SINGH B N. Damage Mechanisms and Fracture Toughness of GlidCop CuAl25 IG0 Copper Alloy. J. of Nuclear Materials, 2000: 283-287, 1028-1032.

[13.4] NAGAL G, BLAUEL J G. Evaluation of the Standard Master Curve for Fracture Toughness Determination. Nuclear Engineering and Design, 1999, 190: 159-169.

[13.5] LAMBRIGGER M. Master Curve for Brittle Cleavage Fracture Toughness Testing. Engineering Fracture Mechanics, 1996, 55 (4): 677-678.

[13.6] 吴学仁主编.飞机结构金属材料力学性能手册.第 2 卷.北京:航空工业出版社,1996.

[13.7] BROEK D. Artificial Slow Crack Growth under Constant Stress—The R Curve Concept in Plane Stress. Engineering Fracture Mechanics, 1973, 5: 45-53.

[13.8] YAN CHENG, MAI YIUWING. Numerical Investigation on Stable Crack Growth in Plane Stress. International Journal of Fracture, 1998, 91: 117-130.

[13.9] FETT T, et al. Influence of Specimen Geometry and Relative Crack Size on the R—curve. Engineering Fracture Mechanics, 2000, 66: 375-386.

[13.10] ZHAO J, ZHANG X. On the Process Zone of a Quasi-Static



Growing Tensile Crack with Power-Law Elastic-Plastic Damage. International Journal of Fracture，2001，108：383-395.

[13.11]　杨继运，张行. 材料断裂韧度与试样厚度关系研究. 机械强度学报，2003，25(1)：76-80.

[13.12]　杨继运，张行. 裂纹扩展阻力曲线与剩余强度关系的理论研究. 机械强度学报，2003，25(3)：334-339.

[13.13]　LIEBOWITZ H. Fracture. Vol. II. Academic Press，1968.

[13.14]　杨继运，张行. 裂纹扩展阻力 K_R 曲线与试样厚度关系研究. 机械工程学报，2003，39(6)：49-52.

第 14 章　材料抗断裂性能厚度效应的理论研究

14.1　含裂纹板断裂韧度厚度效应的理论研究(一)——双待定函数法

14.1.1　引　言

有关断裂韧度的研究一直是工程断裂力学领域中的重要课题,在第 13 章中曾给出了关于断裂韧度与试样厚度关系的数学表达式,使用半理论-半工程方法比较满意地描述了断裂韧度与试样厚度的关系。为了进一步从本质上分析此问题,本章将从理论角度针对厚度效应进行研究,此厚度效应研究属于三维断裂力学问题。在小范围屈服时,含裂纹板三维效应主要集中在裂纹尖端的 K_I 主导区,因此,可以在线弹性断裂力学与含裂纹板的二维位移场的基础上,给出分离变量型的具有待定函数的三维位移场的表达式,进而可以通过几何方程与本构方程获取三维应变场和三维应力场,并通过虚位移原理,使用变分方法建立待定函数所应满足的平衡方程与静力边界条件,从而可以确定待定函数。基于上述分析,即可建立一个断裂韧度与试样厚度关系的理论表达式。

本章首先基于上述理论分析,获得含穿透裂纹板的三维位移场和应力场;然后,在已获取的三维应力场的基础上,进一步对含裂纹板进行厚度效应分析,确定板的等效平面应变区与等效平面应力区厚度;最后,利用断裂韧度理论公式,在相关试验数据的基



础上验证此理论分析的可行性。

14.1.2　含裂纹板厚度效应的定性描述

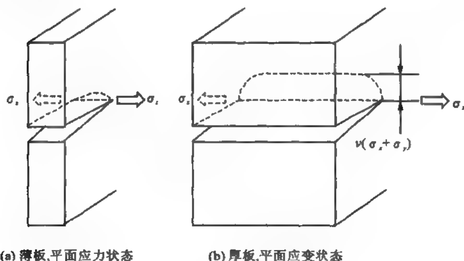
在含穿透裂纹板的平行于中面的两个表面上沿厚度方向的应力 σ_z 必须为零。对于第一种极端的情况——薄板，σ_z 在厚度方向上不可能有相当大的变化，因而板基本上处于平面应力状态，于是

$$\sigma_z \approx 0$$

对于另一种极端情况——厚板，σ_z 在厚度的中间部分达到相当大的数值，它使裂纹顶端产生三轴拉伸应力状态，严重地限制了 z 方向的应变，板基本上处于平面应变状态。这种平面应变状态可以引起厚度方向的正应力，其值为

$$\sigma_z \approx \nu(\sigma_x + \sigma_y)$$

图 14－1 给出了平面应力和平面应变两种情况下 σ_z 沿厚度的分布示意图。



(a) 薄板,平面应力状态　　(b) 厚板,平面应变状态

图 14－1　σ_z 沿厚度方向的分布

因此，对于具有一定厚度的板，可以认为其两个表面完全处于平面应力状态，而中面近似处于平面应变状态，二者之间的区域则



为过渡状态，相应的 σ_z 值大小处于两种极端情况之间，即

$$0 < \sigma_z < \nu(\sigma_x + \sigma_y)$$

应当指出，由于 σ_x 与 σ_y 沿裂纹前沿具有奇异性，从而 σ_z 沿裂纹前沿也具有奇异性。因此，对含裂纹板而言，裂尖附近的三维效应非常突出，并具有强烈的局部性。

14.1.3 含裂纹板厚度效应的三维理论分析

在小范围塑性的前提下，含裂纹板三维效应主要集中在裂尖的 K_{I} 主导区。可以采用分离变量方法，以二维位移场表示三维位移场如下：

$$u = u_n\eta(z), \qquad \nu = \nu_n\eta(z), \qquad w = w_s\zeta(z) = \varepsilon_{zz}h\zeta(z) \tag{14-1}$$

式中，u_n 和 ν_n 分别为含裂纹板在平面应变状态下 x 和 y 方向的近场位移分量；w_s 为含裂纹板在平面应力状态下平行于中面的板面上 z 方向的近场位移分量；ε_{zz} 为平面应力状态下的 z 方向近场应变分量 ε_z；$\eta(z)$ 和 $\zeta(z)$ 为厚度方向变量 z 的待定函数，坐标系的选取如图 14-2 所示。以下若不作特殊说明，下标 n 表示对应平面应变状态下的相应项，下标 s 表示对应平面应力状态下的相应项。

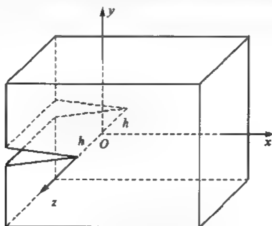


图 14-2 三维含裂纹板的直角坐标系



由几何方程与式(14-1)可知裂尖近场应变分量的表达式为

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_{xn}\eta(z) \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_{yn}\eta(z) \\
\varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = w_s\zeta'(z) \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xyn}\eta(z) \\
\gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = u_n\eta'(z) + \frac{\partial w_s}{\partial x}\zeta(z) \\
\gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = v_n\eta'(z) + \frac{\partial w_s}{\partial y}\zeta(z)
\end{aligned}\right\} \tag{14-2}$$

式中,$(\cdot)'$表示对 z 的一阶导数。

在小范围塑性前提下,裂尖场是 K 主导的。由线弹性物理方程可得裂尖近场应力分量的表达式如下:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= (\lambda+2\mu)\varepsilon_x + \lambda(\varepsilon_y+\varepsilon_z) = (\lambda+2\mu)\varepsilon_{xn}\eta(z) + \lambda\varepsilon_{yn}\eta(z) + \\
&\quad \lambda w_s\zeta'(z) \\
\sigma_y &= (\lambda+2\mu)\varepsilon_y + \lambda(\varepsilon_x+\varepsilon_z) = (\lambda+2\mu)\varepsilon_{yn}\eta(z) + \lambda\varepsilon_{xn}\eta(z) + \\
&\quad \lambda w_s\zeta'(z) \\
\sigma_z &= (\lambda+2\mu)\varepsilon_z + \lambda(\varepsilon_x+\varepsilon_y) = (\lambda+2\mu)w_s\zeta'(z) + \lambda\varepsilon_{xn}\eta(z) + \\
&\quad \lambda\varepsilon_{yn}\eta(z) \\
\tau_{xy} &= \mu\gamma_{xy} = \mu\gamma_{xyn}\eta(z) \\
\tau_{xz} &= \mu\gamma_{xz} = \mu\left[u_n\eta'(z) + \frac{\partial w_s}{\partial x}\zeta(z)\right] \\
\tau_{yz} &= \mu\gamma_{yz} = \mu\left[v_n\eta'(z) + \frac{\partial w_s}{\partial y}\zeta(z)\right]
\end{aligned}\right\} \tag{14-3}$$

式中,λ 和 μ 为材料的 Lame 常数,其大小分别为

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \tag{14-4}$$



$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{14-5}$$

式中,E 为材料的杨氏弹性模量;ν 为材料的泊松比。

平面应变情况下的物理方程有如下形式:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{xn} &= (\lambda+2\mu)\varepsilon_{xn} + \lambda\varepsilon_{yn} \\ \sigma_{yn} &= (\lambda+2\mu)\varepsilon_{yn} + \lambda\varepsilon_{xn} \\ \tau_{xyn} &= \mu\gamma_{xyn} \end{aligned}\right\} \tag{14-6}$$

将式(14-6)代入式(14-3),有

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{x} &= \sigma_{xn}\eta(z) + \lambda w_{s}\zeta'(z) \\ \sigma_{y} &= \sigma_{yn}\eta(z) + \lambda w_{s}\zeta'(z) \\ \tau_{xy} &= \tau_{xyn}\eta(z) \end{aligned}\right\} \tag{14-7}$$

以下建立平衡方程。令

$$\left.\begin{aligned} F_x &= \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} = 0 \\ F_y &= \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z} = 0 \\ F_z &= \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{14-8}$$

则考虑到式(14-3)和式(14-7),平衡方程具有如下形式:

$$\left.\begin{aligned} F_x &= \frac{\partial\sigma_{xn}}{\partial x}\eta(z) + \lambda\frac{\partial w_s}{\partial x}\zeta'(z) + \frac{\partial\tau_{xyn}}{\partial y}\eta(z) + \mu\Big[u_n\eta''(z) + \\ &\quad \frac{\partial w_s}{\partial x}\zeta'(z)\Big] = 0 \\ F_y &= \frac{\partial\tau_{xyn}}{\partial x}\eta(z) + \frac{\partial\sigma_{yn}}{\partial y}\eta(z) + \lambda\frac{\partial w_s}{\partial y}\zeta'(z) + \mu\Big[v_n\eta''(z) + \\ &\quad \frac{\partial w_s}{\partial y}\zeta'(z)\Big] = 0 \\ F_z &= (\lambda+\mu)(\varepsilon_{xn} + \varepsilon_{yn})\eta'(z) + \mu\left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}\right)\zeta(z) + \\ &\quad (\lambda+2\mu)w_s\zeta''(z) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{14-9}$$



平面应变情况下的平衡方程有如下形式：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_{xn}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xyn}}{\partial y}=0\\ \frac{\partial\tau_{xyn}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yn}}{\partial y}=0\end{aligned}\right\}\tag{14-10}$$

同时，平面应力情况下的位移分量 w_s 满足以下调和方程：

$$\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}=0\tag{14-11}$$

将式(14-10)和式(14-11)代入式(14-9)，可得

$$\left.\begin{aligned}F_x&=(\lambda+\mu)\frac{\partial w_s}{\partial x}\zeta'(z)+\mu u_n\eta''(z)=0\\ F_y&=(\lambda+\mu)\frac{\partial w_s}{\partial y}\zeta'(z)+\mu v_n\eta''(z)=0\\ F_z&=(\lambda+\mu)(\varepsilon_{xn}+\varepsilon_{yn})\eta'(z)+(\lambda+2\mu)w_s\zeta''(z)=0\end{aligned}\right\}\tag{14-12}$$

平面应力情况下的物理方程为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{xs}&=(\lambda+2\mu)\varepsilon_{xs}+\lambda(\varepsilon_{ys}+\varepsilon_{zs})\\ \sigma_{ys}&=(\lambda+2\mu)\varepsilon_{ys}+\lambda(\varepsilon_{xs}+\varepsilon_{zs})\\ \sigma_{zs}&=(\lambda+2\mu)\varepsilon_{zs}+\lambda(\varepsilon_{xs}+\varepsilon_{ys})=0\end{aligned}\right\}\tag{14-13}$$

由此可得

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_{xs}+\sigma_{ys}=2\left(\frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}+\mu\right)(\varepsilon_{xs}+\varepsilon_{ys})=2(\lambda^*+\mu)(\varepsilon_{xs}+\varepsilon_{ys})\\ &\varepsilon_{zs}=-\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}(\varepsilon_{xs}+\varepsilon_{ys})\end{aligned}\right\}\tag{14-14}$$

式中，λ^* 为平面应力情况下对应的 Lame 常数，它与 E 和 ν 的关系为

$$\lambda^*=\frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}=\frac{\nu E}{1-\nu^2}\tag{14-15}$$

由式(14-6)得

$$\sigma_{xn}+\sigma_{yn}=2(\lambda+\mu)(\varepsilon_{xn}+\varepsilon_{yn})\tag{14-16}$$



考虑平面应力与平面应变状态下的裂尖近场应力相等条件，由式(14－14)和式(14－16)可得

$$w_{,} = \varepsilon_{z}h = -\frac{\lambda h}{\lambda + 2\mu}(\varepsilon_{x} + \varepsilon_{y}) = -\frac{\lambda(\lambda + \mu)}{(\lambda + 2\mu)(\lambda^{*} + \mu)}h(\varepsilon_{xn} + \varepsilon_{yn}) \tag{14－17}$$

14.1.4 建立支配方程的变分方法

根据虚位移原理，可将三维状态下的平衡方程表示如下：

$$\int_{V}(F_{x}\delta u + F_{y}\delta \nu + F_{z}\delta w)\mathrm{d}V = 0 \tag{14－18}$$

式中，V 表示沿裂纹前沿的 K_{I} 主导区体积。将式(14－1)变分，有

$$\delta u = u_{n}\delta\eta(z), \qquad \delta\nu = \nu_{n}\delta\eta(z), \qquad \delta w = w_{,}\delta\zeta(z) \tag{14－19}$$

将式(14－19)代入式(14－18)，得

$$\int_{-h}^{h}\left[\int_{A}(F_{x}u_{n} + F_{y}\nu_{n})\mathrm{d}A\right]\delta\eta(z)\mathrm{d}z + \int_{-h}^{h}\left(\int_{A}F_{z}w_{,}\mathrm{d}A\right)\delta\zeta(z)\mathrm{d}z = 0 \tag{14－20}$$

由 $\delta\eta(z)$ 和 $\delta\zeta(z)$ 的任意性，可知

$$\int_{A}(F_{x}u_{n} + F_{y}\nu_{n})\mathrm{d}A = 0 \tag{14－21}$$

$$\int_{A}F_{z}w_{,}\mathrm{d}A = 0 \tag{14－22}$$

根据式(14－12)与式(14－17)，有

$$F_{x}u_{n} + F_{y}\nu_{n} = -\frac{\lambda(\lambda + \mu)^{2}}{(\lambda + 2\mu)(\lambda^{*} + \mu)}h\left[u_{n}\frac{\partial(\varepsilon_{xn} + \varepsilon_{yn})}{\partial x} + \nu_{n}\frac{\partial(\varepsilon_{xn} + \varepsilon_{yn})}{\partial y}\right]\zeta'(z) + \mu(u_{n}^{2} + \nu_{n}^{2})\eta''(z) \tag{14－23}$$



$$F_z w_z = -\frac{\lambda(\lambda+\mu)^2}{(\lambda+2\mu)(\lambda^*+\mu)}h(\varepsilon_{xn}+\varepsilon_{yn})^2\eta'(z) + \frac{\lambda^2(\lambda+\mu)^2}{(\lambda+2\mu)(\lambda^*+\mu)^2}h^2(\varepsilon_{xn}+\varepsilon_{yn})^2\zeta''(z) \quad (14-24)$$

将式(14－23)与式(14－24)分别代入式(14－21)与式(14－22),可得微分方程组如下：

$$A_{12}\eta''(z)+B_{11}\zeta'(z)=0 \quad (14-25)$$

$$B_{22}\zeta''(z)+A_{21}\eta'(z)=0 \quad (14-26)$$

式中

$$\left.\begin{aligned} A_{12} &= \mu I_1, \quad B_{11} = -\frac{\lambda(\lambda+\mu)^2 h}{(\lambda+2\mu)(\lambda^*+\mu)}I_2 \\ B_{22} &= \frac{\lambda^2(\lambda+\mu)^2 h^2}{(\lambda+2\mu)(\lambda^*+\mu)^2}I_3, \quad A_{21} = -\frac{\lambda(\lambda+\mu)^2 h}{(\lambda+2\mu)(\lambda^*+\mu)}I_3 \end{aligned}\right\} \quad (14-27)$$

式中,I_1,I_2 和 I_3 分别表示如下积分：

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \int_A (u_n^2+\nu_n^2)\mathrm{d}A \\ I_2 &= \int_A \left[u_n\frac{\partial(\varepsilon_{xn}+\varepsilon_{yn})}{\partial x}+\nu_n\frac{\partial(\varepsilon_{xn}+\varepsilon_{yn})}{\partial y}\right]\mathrm{d}A \\ I_3 &= \int_A (\varepsilon_{xn}+\varepsilon_{yn})^2\mathrm{d}A \end{aligned}\right\} \quad (14-28)$$

这里,A 表示以裂纹尖端为中心的 $K_{\rm I}$ 主导区面积。

14.1.5　裂纹尖端场

在线弹性断裂力学中,对于Ⅰ型平面裂纹而言,其平面应变状态下的裂纹尖端应力场与位移场具有如下形式：

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{xn} &= \frac{K_{\rm I}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) \\ \sigma_{yn} &= \frac{K_{\rm I}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) \\ \tau_{xyn} &= \frac{K_{\rm I}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} \end{aligned}\right\} \quad (14-29)$$

$$\left.\begin{aligned} u_n &= \frac{K_{\mathrm{I}}}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\cos\frac{\theta}{2}\left(\omega+1-2\cos^2\frac{\theta}{2}\right) \\ v_n &= \frac{K_{\mathrm{I}}}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\sin\frac{\theta}{2}\left(\omega-1+2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned}\right\} \quad (14-30)$$

式中，K_{I} 为 Ⅰ 型裂纹的应力强度因子；ω 为与材料泊松比 ν 有关的参数，在平面应变情况下有

$$\omega = 3-4\nu \quad (14-31)$$

(r,θ)表示以裂纹尖端为坐标原点的局部极坐标系。直角坐标系与极坐标系之间的微分算子具有下列关系：

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} \end{aligned}\right\} \quad (14-32)$$

由式(14－16)可得

$$\varepsilon_{xn}+\varepsilon_{yn} = \frac{1}{2(\lambda+\mu)}(\sigma_{xn}+\sigma_{yn}) \quad (14-33)$$

将式(14－29)、式(14－30)和式(14－33)代入式(14－28)，并考虑式(14－31)和式(14－32)，可依次求解得式(14－28)中积分如下：

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{r_K}(u_n^2+v_n^2)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \frac{1+2\omega^2}{24\mu^2}K_1^2 r_K^3 \\ I_2 &= \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{r_K}\left[u_n\frac{\partial(\varepsilon_{xn}+\varepsilon_{yn})}{\partial x}+v_n\frac{\partial(\varepsilon_{xn}+\varepsilon_{yn})}{\partial y}\right]r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \\ &\quad \frac{1}{8\mu(\lambda+\mu)}K_1^2 r_K \\ I_3 &= \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{r_K}(\varepsilon_{xn}+\varepsilon_{yn})^2 r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2(\lambda+\mu)^2}K_1^2 r_K \end{aligned}\right\}$$

$$(14-34)$$

式中，r_K 为 K 主引导区的半径。



14.1.6 支配方程组的求解

根据微分方程式(14-26)，有

$$\eta'(z) = -\frac{B_{12}}{A_{21}}\zeta''(z) \tag{14-35}$$

将上式代入微分方程式(14-25)，可知

$$\zeta'''(z) - \kappa^2\zeta'(z) = 0 \tag{14-36}$$

式中

$$\kappa^2 = \frac{B_{11}}{A_{12}}\frac{A_{21}}{B_{22}} \tag{14-37}$$

将式(14-27)和式(14-34)代入式(14-37)，并考虑式(14-4)、式(14-5)以及式(14-31)，有

$$\kappa^2 = \frac{(\lambda+\mu)^2}{\mu(\lambda+2\mu)}\frac{I_2}{I_1} = \frac{3}{2(1-\nu)(19-48\nu+32\nu^2)}\frac{1}{r_K^2} \tag{14-38}$$

从式(14-38)可以看出，只要满足 $\nu<1$ 的条件，恒有 $\kappa^2>0$。显然，一般情况下，此条件对任何材料而言都是成立的。

考虑位移 w 的反对称条件，微分方程式(14-36)的解可写成如下形式：

$$\zeta(z) = C_1\,\mathrm{sh}\,(\kappa z) \tag{14-39}$$

式中，C_1 为待定常数；κ 为微分方程的一个非零特征根。不失一般性，可取其中的正根，其值为

$$\kappa = \frac{1}{r_K}\sqrt{\frac{3}{2(1-\nu)(19-48\nu+32\nu^2)}} \tag{14-40}$$

从上式可以看出，在材料确定的情况下，κ 只与 K 主引导区半径 r_K 成反比。

从而，由式(14-35)可求出 $\eta(z)$的解为

$$\eta(z) = \frac{\lambda h}{\lambda^{*}+\mu}C_1\kappa\,\mathrm{ch}\,(\kappa z) + C_2 \tag{14-41}$$



式中，C_2 为待定常数。

14.1.7 边界条件

下面根据边界条件确定待定的常数 C_1 和 C_2。

由式(14-3)和式(14-17)，可知

$$\sigma_z = (\lambda + 2\mu) w_s \zeta'(z) + \lambda(\varepsilon_{xn} + \varepsilon_{yn}) \eta(z) = \lambda(\varepsilon_{xn} + \varepsilon_{yn}) \cdot \left[\eta(z) - \frac{\lambda + \mu}{\lambda^* + \mu} h \zeta'(z)\right] \tag{14-42}$$

将式(14-39)和式(14-41)代入式(14-42)并整理，有

$$\sigma_z = \lambda(\varepsilon_{xn} + \varepsilon_{yn}) \left[C_2 - \frac{\mu}{\lambda^* + \mu} C_1 \kappa h \operatorname{ch}(\kappa z)\right] \tag{14-43}$$

在平行于板中面的表面上正应力为零，即当 $z=h$ 时，有 $\sigma_z = 0$。于是，由式(14-43)可得

$$C_2 = \frac{\mu}{\lambda^* + \mu} \kappa h \operatorname{ch}(\kappa h) C_1 \tag{14-44}$$

其他静力边界条件将在变分意义上得到满足，即

$$\int_S [(\sigma_x l + \tau_{xy} m - p_x)\delta u + (\tau_{xy} l + \sigma_y m - p_y)\delta v] \mathrm{d}S + \int_A (\tau_{xz}\delta u + \tau_{yz}\delta v) \mathrm{d}A = 0 \tag{14-45}$$

式中，p_x，p_y 为板的 K_{I} 主导区周边表面上面力分量；l，m 为该表面外法线对应的方向余弦；S 与 A 分别代表板的周边表面与上下表面。

将式(14-3)的后两式、式(14-7)和式(14-19)代入式(14-45)，并考虑到 $\mathrm{d}S = \mathrm{d}z\mathrm{d}C$，有

$$\int_0^h \eta(z)\mathrm{d}z \int_C [(\sigma_{xn} l + \tau_{xyn} m) u_n + (\tau_{xyn} l + \sigma_{yn} m) v_n] \mathrm{d}C + \int_0^h \zeta'(z) \mathrm{d}z \cdot \int_C [\lambda w_s (u_n l + v_n m)] \mathrm{d}C + \mu\eta'(h) \int_A (u_n^2 + v_n^2) \mathrm{d}A + \mu\zeta(h) \cdot \int_A \left(\frac{\partial w_s}{\partial x} u_n + \frac{\partial w_s}{\partial y} v_n\right) \mathrm{d}A = h \int_C (p_x u_n + p_y v_n) \mathrm{d}C \tag{14-46}$$



下面对上式进行化简。平面应变状态下的静力边界条件的变分形式为

$$\int_C[(\sigma_{xn}l+\tau_{xyn}m-p_x)u_n+(\tau_{xyn}l+\sigma_{yn}m-p_y)v_n]\mathrm{d}C=0 \tag{14-47}$$

另外,由式(14-17),可知

$$\int_C[\lambda w_{,z}(u_nl+v_nm)]\mathrm{d}C=-\frac{\lambda^2(\lambda+\mu)h}{(\lambda+2\mu)(\lambda^*+\mu)}\cdot \int_C[(\varepsilon_{xn}+\varepsilon_{yn})(u_nl+v_nm)]\mathrm{d}C \tag{14-48}$$

因此,令

$$\left.\begin{aligned} I_4&=\int_C[(\sigma_{xn}l+\tau_{xyn}m)u_n+(\tau_{xyn}l+\sigma_{yn}m)v_n]\mathrm{d}C=\\ &\int_C(p_xu_n+p_yv_n)\mathrm{d}C\\ I_5&=\int_C[(\varepsilon_{xn}+\varepsilon_{yn})(u_nl+v_nm)]\mathrm{d}C \end{aligned}\right\} \tag{14-49}$$

并将式(14-17)、式(14-28)和式(14-49)代入式(14-46),得

$$I_4\left[\int_0^h\eta(z)\mathrm{d}z-h\right]-\frac{\lambda^2(\lambda+\mu)h}{(\lambda+2\mu)(\lambda^*+\mu)}\cdot I_5\int_0^h\zeta'(z)\mathrm{d}z+\mu I_1\eta'(h)-\frac{\lambda\mu(\lambda+\mu)h}{(\lambda+2\mu)(\lambda^*+\mu)}I_2\zeta(h)=0 \tag{14-50}$$

将式(14-29)、式(14-30)和式(14-33)代入式(14-49),并考虑式(14-31)和式(14-32),可求得式(14-49)中积分如下:



$$\left.\begin{aligned} I_4 &= \int_{-\pi}^{\pi}[(\sigma_{xn}\cos\theta+\tau_{xyn}\sin\theta)u_n+(\tau_{xyn}\cos\theta+\\ &\quad \sigma_{yn}\sin\theta)\nu_n]r_K\mathrm{d}\theta=\frac{2\omega-1}{8\mu}K_{\mathrm{I}}^2 r_K\\ I_5 &= \int_{-\pi}^{\pi}[(\varepsilon_{xn}+\varepsilon_{yn})(u_n\cos\theta+\nu_n\sin\theta)]r_K\mathrm{d}\theta-\frac{2\omega-1}{8\mu(\lambda+\mu)}K_{\mathrm{I}}^2 r_K \end{aligned}\right\} \tag{14-51}$$

考虑式(14－39)和式(14－41),可得

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^h \eta(z)\mathrm{d}z=\int_0^h\left[\frac{\lambda h}{\lambda^*+\mu}C_1\kappa\,\mathrm{ch}\,(\kappa z)+C_2\right]\mathrm{d}z=\\ &\qquad\frac{\lambda h}{\lambda^*+\mu}C_1\mathrm{sh}\,(\kappa h)+C_2 h\\ &\int_0^h \zeta'(z)\mathrm{d}z=\int_0^h C_1\kappa\,\mathrm{ch}\,(\kappa z)\mathrm{d}z=C_1\mathrm{sh}\,(\kappa h)\\ &\eta'(h)=\frac{\lambda h}{\lambda^*+\mu}C_1\kappa^2\mathrm{sh}\,(\kappa h)\\ &\zeta(h)=C_1\mathrm{sh}\,(\kappa h) \end{aligned}\right\} \tag{14-52}$$

将式(14－52)代入式(14－50),可进一步将式(14－46)化简为

$$\frac{\lambda}{\lambda^*+\mu}\left[I_4+\frac{\lambda(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}(I_2-I_5)\right]C_1\mathrm{sh}\,(\kappa h)+I_4C_2=I_4 \tag{14-53}$$

联立式(14－44)与式(14－53),可求得 C_1 和 C_2 如下:

$$C_1=\frac{1}{\frac{\mu}{\lambda^*+\mu}\kappa h\,\mathrm{ch}\,(\kappa h)+\frac{\lambda}{\lambda^*+\mu}\left[1+\frac{\lambda(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\frac{I_2-I_5}{I_4}\right]\mathrm{sh}\,(\kappa h)} \tag{14-54}$$

$$C_2=\frac{\frac{\mu}{\lambda^*+\mu}\kappa h\,\mathrm{ch}\,(\kappa h)}{\frac{\mu}{\lambda^*+\mu}\kappa h\,\mathrm{ch}\,(\kappa h)+\frac{\lambda}{\lambda^*+\mu}\left[1+\frac{\lambda(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\frac{I_2-I_5}{I_4}\right]\mathrm{sh}\,(\kappa h)} \tag{14-55}$$



14.1.8 厚度效应分析

将式(14-54)和式(14-55)代入式(14-43),可得

$$\sigma_z = \lambda(\varepsilon_{xm} + \varepsilon_{ym}) \frac{1 - \dfrac{\text{ch}(\kappa z)}{\text{ch}(\kappa h)}}{1 + \dfrac{\lambda}{\mu}\left[1 + \dfrac{\lambda(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\dfrac{I_2 - I_5}{I_4}\right]\dfrac{\text{th}(\kappa h)}{\kappa h}} \tag{14-56}$$

进而将式(14-34)和式(14-51)代入式(14-56),并整理得

$$\sigma_z = \lambda(\varepsilon_{xm} + \varepsilon_{ym}) \frac{1 - \dfrac{\text{ch}(\kappa z)}{\text{ch}(\kappa h)}}{1 + \dfrac{\lambda}{\mu}\left(1 + \dfrac{\lambda}{\lambda+2\mu}\dfrac{2-2\omega}{2\omega-1}\right)\dfrac{\text{th}(\kappa h)}{\kappa h}} \tag{14-57}$$

在平面应变状态下,有

$$\sigma_{zm} = \lambda(\varepsilon_{xm} + \varepsilon_{ym}) \tag{14-58}$$

则由式(14-57),σ_z 与 σ_{zm} 之比为

$$\frac{\sigma_z}{\sigma_{zm}} = \frac{1 - \dfrac{\text{ch}(\kappa z)}{\text{ch}(\kappa h)}}{1 + \dfrac{\lambda}{\mu}\left(1 + \dfrac{\lambda}{\lambda+2\mu}\dfrac{2-2\omega}{2\omega-1}\right)\dfrac{\text{th}(\kappa h)}{\kappa h}} \tag{14-59}$$

通过比较具有一定厚度板的 σ_z 与平面应变状态下的 σ_{zm},可将任意厚度的板划分成等效完全平面应变区与等效完全平面应力区两个部分。其中,等效完全平面应变区的当量厚度 h^* 可按下式计算,即

$$h^* = \frac{\int_0^h \sigma_z \mathrm{d}z}{\sigma_{zm}} = \frac{h\left[1 - \dfrac{\text{th}(\kappa h)}{\kappa h}\right]}{1 + \dfrac{\lambda}{\mu}\left(1 + \dfrac{\lambda}{\lambda+2\mu}\dfrac{2-2\omega}{2\omega-1}\right)\dfrac{\text{th}(\kappa h)}{\kappa h}} \tag{14-60}$$

进一步,可得到当量平面应变区厚度与板厚之比 $f(h)$ 为

$$f(h)=\frac{h^{*}}{h}=\frac{1-\dfrac{\operatorname{th}(\kappa h)}{\kappa h}}{1+\dfrac{\lambda}{\mu}\left(1+\dfrac{\lambda}{\lambda+2\mu}\dfrac{2-2\omega}{2\omega-1}\right)\dfrac{\operatorname{th}(\kappa h)}{\kappa h}}\tag{14-61}$$

将式(14-4)、式(14-5)以及式(14-31)代入式(14-61)，经整理得

$$f(h)=\frac{1-\dfrac{\operatorname{th}(\kappa h)}{\kappa h}}{1+\dfrac{2\nu(5-17\nu+16\nu^{2})}{(1-\nu)(1-2\nu)(5-8\nu)}\dfrac{\operatorname{th}(\kappa h)}{\kappa h}}\tag{14-62}$$

式中，κ 由式(14-40)决定。

从式(14-62)可以发现，在选定材料的情况下，κ 值对函数 $f(h)$ 起决定性作用，而 κ 与 K 主引导区半径 r_K 成反比。因此，在按上述公式进行三维厚度效应分析时，K 主导区半径 r_K 对厚度函数而言具有主导作用。

14.1.9 断裂韧度理论公式

根据上述厚度效应分析，具有任意厚度的含裂纹板都可以看成由平面应变区与平面应力区两个部分组成，那么，板的断裂韧度公式同样可以看成是平面应变断裂韧度与平面应力断裂韧度两个部分的线性组合，即

$$K_C=\zeta\sqrt{t}\left[1-f\left(\frac{t}{2}\right)\right]+K_{\mathrm{I}C}f\left(\frac{t}{2}\right)\tag{14-63}$$

式中，ξ 为待定材料参数；$K_{\mathrm{I}C}$ 为平面应变断裂韧度；t 为板厚。

具体的参数拟合方法为最小二乘方法。首先假定 K 主导区半径 r_K 为已知常数，由式(14-40)可计算式(14-62)中的 κ 值，拟合 ξ 与 $K_{\mathrm{I}C}$。令



$$\varphi(\xi,K_{1C})=\sum_{i=1}^{N}(K_{Ci}-K_{Ci}^{*})^2=$$
$$\sum_{i=1}^{N}\left\{K_{Ci}-\xi\sqrt{t_i}\left[1-f\left(\frac{t_i}{2}\right)\right]-K_{1C}f\left(\frac{t_i}{2}\right)\right\}^2 \tag{14-64}$$

式中，K_{Ci}为根据试验所获得的某些厚度所对应的断裂韧度值；K_{Ci}^{*}为通过理论公式(14－63)计算的该厚度下的断裂韧度值；$\varphi(\xi,K_{1C})$即为全体由试验获得的断裂韧度值与计算所得断裂韧度值之间误差的平方和。要使$\varphi(\xi,K_{1C})$达到极小，只需将式(14－64)分别对ξ与K_{1C}求偏微分，并令其等于零。有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}=-2\sum_{i=1}^{N}\left\{K_{Ci}-\xi\sqrt{t_i}\left[1-f\left(\frac{t_i}{2}\right)\right]-K_{1C}f\left(\frac{t_i}{2}\right)\right\}\sqrt{t_i}\cdot\\&\qquad\left[1-f\left(\frac{t_i}{2}\right)\right]=0\\&\frac{\partial\varphi}{\partial K_{1C}}=-2\sum_{i=1}^{N}\left\{K_{C}-\xi\sqrt{t_i}\left[1-f\left(\frac{t_i}{2}\right)\right]-K_{1C}f\left(\frac{t_i}{2}\right)\right\}f\left(\frac{t_i}{2}\right)=0\end{aligned}\right\} \tag{14-65}$$

化简整理后得到求解ξ与K_{1C}的线性方程组

$$\left.\begin{aligned}&\xi\sum_{i=1}^{N}\left\{\sqrt{t_i}\left[1-f\left(\frac{t_i}{2}\right)\right]\right\}^2+K_{1C}\sum_{i=1}^{N}f\left(\frac{t_i}{2}\right)\sqrt{t_i}\left[1-f\left(\frac{t_i}{2}\right)\right]=\\&\sum_{i=1}^{N}K_{Ci}\sqrt{t_i}\left[1-f\left(\frac{t_i}{2}\right)\right]\\&\xi\sum_{i=1}^{N}f\left(\frac{t_i}{2}\right)\sqrt{t_i}\left[1-f\left(\frac{t_i}{2}\right)\right]+K_{1C}\sum_{i=1}^{N}\left[f\left(\frac{t_i}{2}\right)\right]^2=\sum_{i=1}^{N}K_{Ci}f\left(\frac{t_i}{2}\right)\end{aligned}\right\} \tag{14-66}$$

求解以上方程组即可得到断裂韧度方程中的ξ与K_{1C}。必须指出，在上述公式的推导过程中，假设r_K是已知常数，随着r_K值的不同，拟合所得到的ξ与K_{1C}值是不同的，拟合误差$\varphi(\xi,K_{1C})$的大小也会有所不同。

因此,还需要选取不同的 r_K 值分别进行拟合,以拟合误差 $\varphi(\xi,K_{\mathrm{I}C})$ 为优化目标,对 r_K 值进行优化,最终优化所得到 r_K 值以及在此 r_K 值下通过最小二乘法获得的 ξ 与 $K_{\mathrm{I}C}$ 即为所求的值。

14.1.10 试验验证

下面通过两种材料的试验数据[14.1]来验证上述理论。

1. 钛合金 TC4

手册提供了四种试样厚度的断裂韧度以及平面应变断裂韧度 $K_{\mathrm{I}C}$,如表 14-1 所列。

表 14-1 TC4 四种试样厚度的断裂韧度及平面应变断裂韧度

板厚 H/mm	2	5	10	15	∞
试验 K_C/(MPa·m$^{1/2}$)	61.170 7	67.336 3	61.170 7	60.518 9	57.700 0

考虑到断裂韧度与试样厚度关系的复杂性,故针对薄板与厚板两种情况分别进行拟合。

(1) 第一种拟合方法

针对薄板情况,采用前三种小厚度试样进行拟合;针对厚板情况,采用后两种大厚度试样以及平面应变情况进行拟合。拟合结果见表 14-2。

表 14-2 TC4 拟合结果(方法一)

试 样	r_K/mm	κ/mm^{-1}	ξ/[MPa·(m·mm^{-1})$^{1/2}$]	$K_{\mathrm{I}C}$/(MPa·m$^{1/2}$)
薄板 1	$r_{K1}=0.505$	$\kappa_1=1.121\ 3$	$\xi_1=48.797\ 5$	$K_{\mathrm{I}C1}=14.788\ 5$
厚板 2	$r_{K2}=0.001$	$\kappa_2=566.269$	$\xi_2=1\ 369.090$	$K_{\mathrm{I}C2}=57.700$

断裂韧度的理论曲线可分为如下两部分:

$$K_{C1}=\xi_1\sqrt{t}\left[1-f\left(\frac{t}{2},\kappa_1\right)\right]+K_{\mathrm{I}C1}f\left(\frac{t}{2},\kappa_1\right)\qquad(0<t\leqslant t^*)\tag{14-67}$$



$$K_{C2}=\xi_2\sqrt{t}\left[1-f\left(\frac{t}{2},\kappa_2\right)\right]+K_{\mathrm{I}C2}f\left(\frac{t}{2},\kappa_2\right)\qquad (t^*\leqslant t<\infty)$$

(14-68)

式中，$t^*=10$ mm。断裂韧度与试样厚度关系曲线如图 14-3 所示。

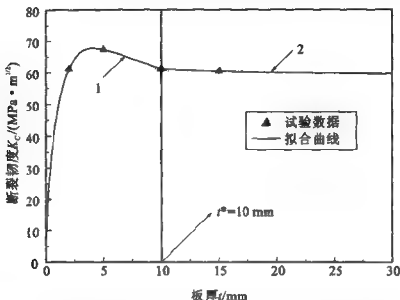


图 14-3 TC4 的断裂韧度与试样厚度关系曲线(方法一)

从以上结果可以看出，对于比较薄的板($t\leqslant 10$ mm)而言，平面应力区占主导地位，即式(14-63)中右端第一项起主要作用，计算断裂韧度时采用式(14-67)，如图 14-3 中曲线 1 所示；对于比较厚的板($t\geqslant 10$ mm)而言，平面应变区占主导地位，即式(14-63)中右端第二项起主要作用，计算断裂韧度时采用式(14-68)，如图 14-3 中曲线 2 所示。这样，通过两个曲线表达式，即式(14-67)与式(14-68)就可以计算任意厚度板对应的断裂韧度值。

(2) 第二种拟合方法

选取全部四种厚度试样的断裂韧度，按照式(14-63)进行拟合。拟合结果见表 14-3，拟合误差见表 14-4。



表 14-3　TC4 拟合结果(方法二)

试　样	r_K/mm	κ/mm^{-1}	ξ/[MPa·(m·mm^{-1})$^{1/2}$]	K_{IC}/(MPa·m$^{1/2}$)
薄板 1	$r_K=0.379$	$\kappa=1.494\ 1$	$\xi=49.614\ 9$	$K_{IC1}=29.540\ 8$
厚板 2				$K_{IC}=57.7$

表 14-4　TC4 四种试样厚度的断裂韧度拟合误差

板厚 H/mm	2	5	10	15
相对误差/(%)	0.004	1.030	2.795	1.870

断裂韧度的理论曲线可分为两部分,如下所示:

$$K_{C1}=\xi\sqrt{t}\left[1-f\left(\frac{t}{2},\kappa\right)\right]+K_{IC1}f\left(\frac{t}{2},\kappa\right)\qquad(0<t\leqslant t^{\Delta})\tag{14-69}$$

$$K_{C2}=K_{IC}\qquad(t^{\Delta}\leqslant t<\infty)\tag{14-70}$$

式中,$t^{\Delta}=18.0$ mm。断裂韧度与试样厚度关系曲线如图 14-4 所示。

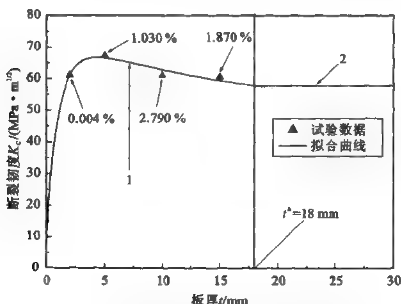


图 14-4　TC4 的断裂韧度与试样厚度关系曲线(方法二)



由表 14 - 4 可以发现，拟合误差在一定的工程许可范围内是完全可以接受的。

2. 铝合金 LY12CZ

手册提供了四种试样厚度的断裂韧度以及平面应变断裂韧度 K_{IC}，如表 14 - 5 所列。

表 14 - 5 LY12CZ 四种试样厚度的断裂韧度及平面应变断裂韧度

板厚 H/mm	2	4	6	10	∞
试验 K_C/(MPa · m$^{1/2}$)	39.329 2	39.305 4	30.889 4	29.160 4	21.100 0

与 TC4 方法类似，同样采取两种方法针对薄板与厚板两种情况分别进行拟合。

(1) 第一种拟合方法

针对薄板情况，采用前三种小试样厚度进行拟合；针对厚板情况，采用后两种大厚度试样以及平面应变情况进行拟合，拟合结果见表 14 - 6。

表 14 - 6 LY12CZ 拟合结果(方法一)

试　样	r_K/mm	κ/mm^{-1}	ξ/[MPa · (m · mm^{-1})$^{1/2}$]	K_{IC}/(MPa · m$^{1/2}$)
薄板 1	$r_{K1}=0.894$	$\kappa_1=0.677\ 2$	$\xi_1=32.876\ 8$	$K_{IC1}=-85.129\ 6$
厚板 2	$r_{K2}=0.063$	$\kappa_2=9.609\ 2$	$\xi_2=55.764\ 8$	$K_{IC2}=21.100\ 0$

断裂韧度的理论曲线仍可分为两部分，如下所示：

$$K_{C1}=\xi_1\sqrt{t}\left[1-f\left(\frac{t}{2},\kappa_1\right)\right]+K_{IC1}f\left(\frac{t}{2},\kappa_1\right)\qquad(0<t\leqslant t^*)\tag{14-71}$$

$$K_{C2}=\xi_2\sqrt{t}\left[1-f\left(\frac{t}{2},\kappa_2\right)\right]+K_{IC2}f\left(\frac{t}{2},\kappa_2\right)\qquad(t^*\leqslant t<\infty)\tag{14-72}$$

式中，$t^*=6$ mm。断裂韧度与试样厚度关系曲线如图 14 - 5 所示。



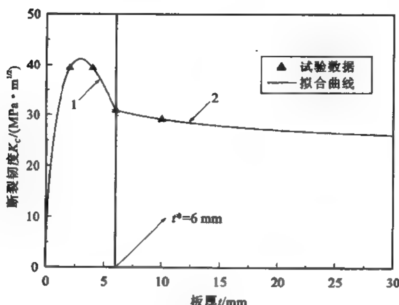


图 14-5　LY12CZ 的断裂韧度与试样厚度关系曲线(方法一)

由图 14-5 可以看出，对于比较薄的板($t\leqslant 6$ mm)而言，平面应力区占主导地位，即式(14-63)中右端第一项起主要作用，计算断裂韧度时采用式(14-71)，如图 14-5 中曲线 1 所示；对于比较厚的板($t\geqslant 6$ mm)而言，平面应变区占主导地位，即式(14-63)中右端第二项起主要作用，计算断裂韧度时采用式(14-72)，如图 14-5 中曲线 2 所示。这样，通过两个曲线表达式(14-71)与式(14-72)就可以计算任意厚度板对应的断裂韧度值。

(2) 第二种拟合方法

选取全部四种试样厚度的断裂韧度，按照式(14-63)进行拟合。拟合结果见表 14-7，拟合误差见表 14-8。

表 14-7　LY12CZ 拟合结果(方法二)

试　样	r_K/mm	κ/mm^{-1}	ξ/[MPa·(m·mm^{-1})$^{1/2}$]	$K_{\mathrm{I}C}$/(MPa·m$^{1/2}$)
薄板 1	r_K=0.345	κ=1.754 7	ξ=37.600 6	$K_{\mathrm{I}C1}$=−2.012 8
厚板 2				$K_{\mathrm{I}C}$=21.100 0



表 14-8 LY12CZ 四种试样厚度的断裂韧度拟合误差

板厚 H/mm	2	4	6	10
相对误差 /(%)	0.002	5.720	8.250	3.670

断裂韧度的理论曲线同样可分为如下两部分：

$$K_{C1} = \xi\sqrt{t}\left[1 - f\left(\frac{t}{2},\kappa\right)\right] + K_{1C1} f\left(\frac{t}{2},\kappa\right) \qquad 0 < t \leqslant t^{\Delta} \tag{14-73}$$

$$K_{C2} = K_{1C} \qquad (t^{\Delta} \leqslant t < \infty) \tag{14-74}$$

式中，$t^{\Delta}=19.6$ mm。断裂韧度与试样厚度关系曲线如图 14-6 所示。

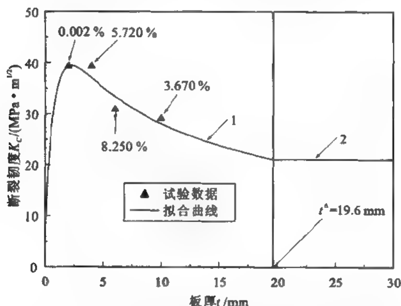


图 14-6 LY12CZ 的断裂韧度与试样厚度关系曲线(方法二)

由表 14-8 可以看出，拟合误差是在完全可以接受的工程许可范围内。

通过上述两种材料所采用拟合方法的计算结果相比较，可以发现，“拟合方法一”适用于试验数据较多的情况，此时可得到较为



准确的计算结果。另一方面,如果试验数据有限,为获取某一厚度板的断裂韧度,“拟合方法二”不失为 -种有效的方法。

14.1.11 材料常数的统一拟合

在上述试验验证工作的基础上,进一步采用统一的材料参数 r_K,κ,ξ 和 K_{1C} 拟合材料断裂韧度与试样厚度的关系式。首先根据上述拟合方法获取的数学表达式计算若干试样厚度下对应的材料断裂韧度,从而得到了一组 $K_C \sim t$ 的数据;然后采用同样的拟合方法,通过计算的一组 $K_C \sim t$ 数据来拟合式(14-63)。TC4 与 LY12CZ 的拟合结果如图 14-7 和图 14-8 所示,具体的参数见表 14-9。

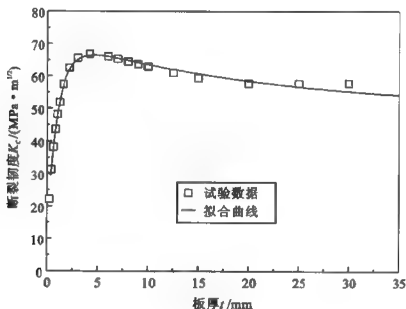


图 14-7 TC4 断裂韧度与试样厚度关系曲线的统一拟合



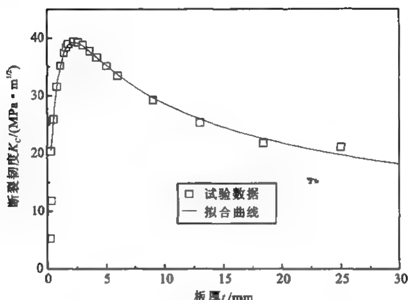


图 14-8 LY12CZ 断裂韧度与试样厚度关系曲线的统一拟合

表 14-9 统一拟合结果

材 料	r_K/mm	κ/mm^{-1}	ξ/[MPa·(m·mm^{-1})$^{1/2}$]	K_{1C}/(MPa·m$^{1/2}$)
TC4	0.335	1.690 4	49.467 7	34.987 0
LY12CZ	0.333	1.818 0	37.577 1	−0.158 1

由图 14-7 与图 14-8 可以看出，根据统一拟合所得的理论 $K_C \sim t$ 曲线，在飞机结构设计中经常选用的厚度范围内是完全满足精度要求的。

14.1.12 结 论

本节的研究工作是在第 13 章半理论-半工程解法的基础上进一步开展的，通过对含裂纹板断裂韧度的理论研究，把断裂韧度与试样厚度关系的经验公式上升到理论水平。本节主要采用了以下研究方法：



① 采用以二维解答为基础的分离变量方法；

② 精确满足几何方程、物理方程与 σ_z 的静力边界条件；

③ 通过虚位移原理建立支配方程(欧拉方程)，并精确求得通解；

④ 由上述静力边界条件与虚位移原理建立的其他静力边界条件求得特解。

14.2 含裂纹板断裂韧度厚度效应的理论研究(二)——三待定函数法

14.2.1 引 言

在 14.1 节进行了有关断裂韧度与试样厚度关系方面的理论研究，给出分离变量型的具有待定函数的三维位移场的表达式。在表示该位移场时，采用了双待定函数法，即 x 和 y 方向的位移使用同一待定函数，z 方向的位移使用另一待定函数。该方法认为 x 和 y 方向位移的变化规律具有相似性，因此在设定位移函数时可以使用同一个函数表达，从而可以简化问题的复杂程度。显然，这种方法在大多数情况下都是适用的。

但是，从严格意义上讲，x 和 y 方向位移的变化规律未必完全相同。因此，本节有必要给出更具一般性的三待定函数法，即在线弹性断裂力学与含裂纹板的二维位移场的基础上，给出分离变量型的 x，y 和 z 方向位移具有三个独立待定函数的三维位移场的表达式，进而可以获取三维应变场和三维应力场。通过虚位移原理，使用变分方法建立待定函数所应满足的支配方程与边界条件，从而可以确定待定函数。基于上述分析，即可建立另一个断裂韧度与试样厚度关系的理论表达式。



14.2.2 含裂纹板厚度效应的三维理论分析

在小范围塑性的前提下，含裂纹板三维效应主要集中在裂尖的 K_{I} 主导区。可以采用分离变量方法，以二维位移场表示三维位移场如下：

$$u = u_n\xi(z),\quad v = v_n\eta(z),\quad w = w_s\zeta(z) = \varepsilon_{zs}h\zeta(z) \tag{14-75}$$

式中，u_n 和 v_n 分别为含裂纹板在平面应变状态下 x 和 y 方向的近场位移分量；w_s 为含裂纹板在平面应力状态下平行于中面的板面上 z 方向的近场位移分量；ε_{zs} 为平面应力状态下的 z 方向正应变分量 ε_z；$\xi(z)$，$\eta(z)$ 和 $\zeta(z)$ 为厚度方向变量 z 的待定函数，坐标系的选取如图 14-2 所示。以下若不作特殊说明，下标 n 表示对应平面应变状态下的相应项，下标 s 表示对应平面应力状态下的相应项。

由几何方程与式(14-75)可知裂尖近场应变分量的表达式为

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_n}{\partial x}\xi(z) = \varepsilon_{xn}\xi(z)\\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_n}{\partial y}\eta(z) = \varepsilon_{yn}\eta(z)\\
\varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = w_s\zeta'(z)\\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_n}{\partial y}\xi(z) + \frac{\partial v_n}{\partial x}\eta(z)\\
\gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = u_n\xi'(z) + \frac{\partial w_s}{\partial x}\zeta(z)\\
\gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = v_n\eta'(z) + \frac{\partial w_s}{\partial y}\zeta(z)
\end{aligned}\right\} \tag{14-76}$$

式中，$(\cdot)'$表示对 z 的一阶导数。



在小范围塑性前提下，裂尖场是 K 主导的。由线弹性物理方程可得裂尖近场应力分量的表达式如下：

$$
\left.
\begin{aligned}
&\sigma_x = \lambda(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)+2\mu\varepsilon_x = (\lambda+2\mu)\varepsilon_{xn}\xi(z)+\lambda\varepsilon_{yn}\eta(z)+\\
&\qquad \lambda w_s\zeta'(z)\\
&\sigma_y = \lambda(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)+2\mu\varepsilon_y = (\lambda+2\mu)\varepsilon_{yn}\eta(z)+\lambda\varepsilon_{xn}\xi(z)+\\
&\qquad \lambda w_s\zeta'(z)\\
&\sigma_z = \lambda(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)+2\mu\varepsilon_z = (\lambda+2\mu)w_s\zeta'(z)+\lambda\varepsilon_{xn}\xi(z)+\\
&\qquad \lambda\varepsilon_{yn}\eta(z)\\
&\tau_{xy} = \mu\gamma_{xy} = \mu\left[\frac{\partial u_n}{\partial y}\xi(z)+\frac{\partial v_n}{\partial x}\eta(z)\right]\\
&\tau_{xz} = \mu\gamma_{xz} = \mu\left[u_n\xi'(z)+\frac{\partial w_s}{\partial x}\zeta(z)\right]\\
&\tau_{yz} = \mu\gamma_{yz} = \mu\left[v_n\eta'(z)+\frac{\partial w_s}{\partial y}\zeta(z)\right]
\end{aligned}
\right\}
\tag{14-77}
$$

式中，λ 和 μ 为材料的 Lame 常数，其大小分别为

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

式中，E 为材料的杨氏弹性模量；ν 为材料的泊松比。

以下建立平衡方程。令

$$
\left.
\begin{aligned}
F_x &= \frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} = 0\\
F_y &= \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z} = 0\\
F_z &= \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z} = 0
\end{aligned}
\right\}
$$

则考虑到式(14-77)，平衡方程具有如下形式：



$$\left.\begin{aligned}
F_x = & \left[(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}\right]\xi(z)+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 v_s}{\partial x\partial y}\eta(z)+ \\
& \mu u_n\xi''(z)+(\lambda+\mu)\frac{\partial w_s}{\partial x}\zeta'(z)=0 \\
F_y = & (\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_n}{\partial x\partial y}\xi(z)+\left[(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 v_n}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}\right]\eta(z)+ \\
& \mu v_n\eta''(z)+(\lambda+\mu)\frac{\partial w_s}{\partial y}\zeta'(z)=0 \\
F_z = & (\lambda+\mu)\frac{\partial u_n}{\partial x}\xi'(z)+(\lambda+\mu)\frac{\partial v_n}{\partial y}\eta'(z)+ \\
& \mu\left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}\right)\zeta(z)+(\lambda+2\mu)w_s\zeta''(z)=0
\end{aligned}\right\} \tag{14-78}$$

平面应力情况下的位移分量 w_s 满足以下调和方程：

$$\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}=0$$

平面应力情况下的物理方程为

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{xs} &= (\lambda+2\mu)\varepsilon_{xs}+\lambda(\varepsilon_{ys}+\varepsilon_{zs}) \\
\sigma_{ys} &= (\lambda+2\mu)\varepsilon_{ys}+\lambda(\varepsilon_{xs}+\varepsilon_{zs}) \\
\sigma_{zs} &= (\lambda+2\mu)\varepsilon_{zs}+\lambda(\varepsilon_{xs}+\varepsilon_{ys})=0
\end{aligned}\right\}$$

由此可得

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_{zs} &= -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}(\varepsilon_{xs}+\varepsilon_{ys}) \\
\sigma_{xs}+\sigma_{ys} &= 2\left(\frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}+\mu\right)(\varepsilon_{xs}+\varepsilon_{ys})=2(\lambda^*+\mu)(\varepsilon_{xs}+\varepsilon_{ys})
\end{aligned}\right\}$$

式中，λ^* 为平面应力情况下对应的 Lame 常数，它与 E 和 ν 的关系为

$$\lambda^*=\frac{\nu E}{1-\nu^2}$$

平面应变情况下的物理方程为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{xn} &= (\lambda+2\mu)\varepsilon_{xn}+\lambda\varepsilon_{yn}\\ \sigma_{yn} &= (\lambda+2\mu)\varepsilon_{yn}+\lambda\varepsilon_{xn}\\ \sigma_{zn} &= \lambda(\varepsilon_{xn}+\varepsilon_{yn})\end{aligned}\right\} \tag{14-79}$$

由此可得

$$\sigma_{xn}+\sigma_{yn} = 2(\lambda+\mu)(\varepsilon_{xn}+\varepsilon_{yn})$$

考虑平面应力与平面应变状态下的裂尖近场应力相等条件，由式(14-76)可得与式(14-17)相同的关于 w_s 的表达式，即

$$w_s = \varepsilon_{zs}h = -\frac{\lambda h}{\lambda+2\mu}(\varepsilon_{xs}+\varepsilon_{ys}) = -\frac{\lambda(\lambda+\mu)}{(\lambda+2\mu)(\lambda^*+\mu)}h(\varepsilon_{xn}+\varepsilon_{yn})$$

14.2.3 建立支配方程的变分方法

根据虚位移原理，可将三维状态下的平衡方程表示如下：

$$\int_V (F_x\delta u + F_y\delta\nu + F_z\delta w)\mathrm{d}V = 0$$

将式(14-75)变分，有

$$\delta u = u_n\delta\xi(z),\qquad \delta\nu = \nu_n\delta\eta(z),\qquad \delta w = w_s\delta\zeta(z) \tag{14-80}$$

将式(14-80)代入式(14-18)，得

$$\int_{-h}^{h}\left(\int_A F_x u_n \mathrm{d}A\right)\delta\xi(z)\mathrm{d}z + \int_{-h}^{h}\left(\int_A F_y \nu_n \mathrm{d}A\right)\delta\eta(z)\mathrm{d}z + \int_{h}^{h}\left(\int_A F_z w_s \mathrm{d}A\right)\delta\zeta(z)\mathrm{d}z = 0 \tag{14-81}$$

由 $\delta\xi(z)$，$\delta\eta(z)$ 和 $\delta\zeta(z)$ 的任意性，知

$$\left.\begin{aligned}\int_A F_x u_n \mathrm{d}A &= 0\\ \int_A F_y \nu_n \mathrm{d}A &= 0\\ \int_A F_z w_s \mathrm{d}A &= 0\end{aligned}\right\} \tag{14-82}$$



根据式(14－78)与式(14－11)，有

$$\left.\begin{aligned}F_x u_n &= \left[(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}\right]u_n\xi(z)+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 \nu_n}{\partial x\partial y}u_n\eta(z)+\\&\quad\mu u_n^2\xi''(z)+(\lambda+\mu)\frac{\partial w_s}{\partial x}u_n\zeta'(z)\\F_y\nu_n &= (\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_n}{\partial x\partial y}\nu_n\xi(z)+\left[(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 \nu_n}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 \nu_n}{\partial x^2}\right]\nu_n\eta(z)+\\&\quad\mu\nu_n^2\eta''(z)+(\lambda+\mu)\frac{\partial w_s}{\partial y}\nu_n\zeta'(z)\\F_z w_s &= (\lambda+\mu)\frac{\partial u_n}{\partial x}w_s\xi'(z)+(\lambda+\mu)\frac{\partial \nu_n}{\partial y}w_s\eta'(z)+\\&\quad(\lambda+2\mu)w_s^2\zeta''(z)\end{aligned}\right\}\tag{14-83}$$

将式(14－83)代入式(14－82)，可得微分方程组如下：

$$\left.\begin{aligned}A_{12}\xi''(z)+A_{10}\xi(z)+B_{10}\eta(z)+C_{11}\zeta'(z)&=0\\A_{20}\xi(z)+B_{22}\eta''(z)+B_{20}\eta(z)+C_{21}\zeta'(z)&=0\\A_{31}\xi'(z)+B_{31}\eta'(z)+C_{32}\zeta''(z)&=0\end{aligned}\right\}\tag{14-84}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}A_{12}&=\mu\int_A u_n^2\mathrm{d}A\\A_{10}&=\int_A\left[(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}\right]u_n\mathrm{d}A\\B_{10}&=(\lambda+\mu)\int_A\frac{\partial^2 \nu_n}{\partial x\partial y}u_n\mathrm{d}A\\C_{11}&=(\lambda+\mu)\int_A\frac{\partial w_s}{\partial x}u_n\mathrm{d}A\end{aligned}\right\}\tag{14-85}$$



$$
\left.\begin{aligned}
A_{20} &= (\lambda+\mu)\int_A \frac{\partial^2 u_n}{\partial x\partial y}\nu_n \mathrm{d}A \\
B_{22} &= \mu\int_A \nu_n^2 \mathrm{d}A \\
B_{20} &= \int_A\left[(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 \nu_n}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 \nu_n}{\partial x^2}\right]\nu_n \mathrm{d}A \\
C_{21} &= (\lambda+\mu)\int_A \frac{\partial w_t}{\partial y}\nu_n \mathrm{d}A
\end{aligned}\right\} \tag{14-86}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
A_{31} &= (\lambda+\mu)\int_A \frac{\partial u_n}{\partial x}w_t \mathrm{d}A \\
B_{31} &= (\lambda+\mu)\int_A \frac{\partial \nu_n}{\partial y}w_t \mathrm{d}A \\
C_{32} &= (\lambda+2\mu)\int_A w_t^2 \mathrm{d}A
\end{aligned}\right\} \tag{14-87}
$$

14.2.4 裂纹尖端场

在线弹性断裂力学中，对于Ⅰ型平面裂纹而言，其平面应变状态下的裂纹尖端应力场与位移场具有如下形式：

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_{xn} &= \frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) \\
\sigma_{yn} &= \frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) \\
\tau_{xyn} &= \frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}
\end{aligned}\right\} \tag{14-88}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
u_n &= \frac{K_{\mathrm{I}}}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\cos\frac{\theta}{2}\left(\omega+1-2\cos^2\frac{\theta}{2}\right) \\
\nu_n &= \frac{K_{\mathrm{I}}}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\sin\frac{\theta}{2}\left(\omega-1+2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{14-89}
$$

式中，K_{I} 为Ⅰ型裂纹的应力强度因子；ω 为与材料泊松比 ν 有关的参数，在平面应变情况下有



$$\omega = 3 - 4\nu \tag{14-90}$$

(r,θ)表示以裂纹尖端为坐标原点的局部极坐标系。直角坐标系与极坐标系之间的微分算子具有下列关系：

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} \end{aligned}\right\} \tag{14-91}$$

由式(14－16)可得

$$\varepsilon_{xn} + \varepsilon_{yn} = \frac{1}{2(\lambda+\mu)}(\sigma_{xn} + \sigma_{yn}) \tag{14-92}$$

将式(14－17)及式(14－89)代入式(14－85)、式(14－86)和式(14－87)，并考虑式(14－88)、式(14－91)和式(14－92)，有

$$\left.\begin{aligned} A_{12} &= \frac{(1+\nu)(13-40\nu+32\nu^2)}{24E}K_{\mathrm{I}}^2 r_K^3 \\ A_{10} &= -\frac{(1+\nu)(7-8\nu)}{64E(1-2\nu)}K_{\mathrm{I}}^2 r_K \\ B_{10} &= \frac{(1+\nu)(7-8\nu)}{64E(1-2\nu)}K_{\mathrm{I}}^2 r_K \\ C_{11} &= -\frac{\nu h}{8E(1-2\nu)}K_{\mathrm{I}}^2 r_K \end{aligned}\right\} \tag{14-93}$$

$$\left.\begin{aligned} A_{20} &= \frac{(1+\nu)(5-8\nu)}{64E(1-2\nu)}K_{\mathrm{I}}^2 r_K \\ B_{22} &= \frac{(1+\nu)(25-56\nu+32\nu^2)}{24E}K_{\mathrm{I}}^2 r_K^3 \\ B_{20} &= -\frac{(1+\nu)(5-8\nu)}{64E(1-2\nu)}K_{\mathrm{I}}^2 r_K \\ C_{21} &= -\frac{\nu h}{8E(1-2\nu)}K_{\mathrm{I}}^2 r_K \end{aligned}\right\} \tag{14-94}$$



$$\left.\begin{aligned}A_{31}&=-\frac{\nu(3-8\nu)h}{8E(1-2\nu)}K_{\mathrm{I}}^{2}r_{K}\\B_{31}&=-\frac{\nu(5-8\nu)h}{8E(1-2\nu)}K_{\mathrm{I}}^{2}r_{K}\\C_{32}&=\frac{2\nu^{2}(1-\nu)h^{2}}{E(1+\nu)(1-2\nu)}K_{\mathrm{I}}^{2}r_{K}\end{aligned}\right\}\qquad(14-95)$$

式中，r_K 为 K 主导区的半径。

14.2.5 支配方程组的求解

根据位移分量的对称与反对称条件，可设

$$\xi(z)=a_1\mathrm{ch}\,(\kappa z)\qquad(14-96)$$

$$\eta(z)=a_2\mathrm{ch}\,(\kappa z)\qquad(14-97)$$

$$\zeta(z)=a_3\mathrm{sh}\,(\kappa z)\qquad(14-98)$$

将式(14－96)、式(14－97)和式(14－98)代入微分方程组式(14－84)，有

$$\left.\begin{aligned}(A_{12}\kappa^2+A_{10})a_1+B_{10}a_2+C_{11}\kappa a_3&=0\\A_{20}a_1+(B_{22}\kappa^2+B_{20})a_2+C_{21}\kappa a_3&=0\\A_{31}\kappa a_1+B_{31}\kappa a_2+C_{32}\kappa^2a_3&=0\end{aligned}\right\}\qquad(14-99)$$

若(a_1,a_2,a_3)存在非零解，则以上方程组系数行列式应为零，即

$$\begin{vmatrix}A_{12}\kappa^2+A_{10}&B_{10}&C_{11}\kappa\\A_{20}&B_{22}\kappa^2+B_{20}&C_{21}\kappa\\A_{31}\kappa&B_{31}\kappa&C_{32}\kappa^2\end{vmatrix}=0\qquad(14-100)$$

展开行列式(14－100)，有

$$\kappa^2(T_1\kappa^4+T_2\kappa^2+T_3)=0\qquad(14-101)$$

式中



$$\left.\begin{aligned} T_1 &= A_{12}B_{22}C_{32} \\ T_2 &= A_{12}(B_{20}C_{32}-B_{31}C_{21})+B_{22}(A_{10}C_{32}-A_{31}C_{11}) \\ T_3 &= A_{10}(B_{20}C_{32}-B_{31}C_{21})-B_{10}(A_{20}C_{32}-A_{31}C_{21})+ \\ &\quad C_{11}(A_{20}B_{31}-A_{31}B_{20}) \end{aligned}\right\} \tag{14-102}$$

这里，由式(14－93)、式(14－94)与式(14－95)，可知

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= \frac{h^2K_1^6r_K^7}{288E^3}\frac{\nu^2(1-\nu^2)(25-56\nu+32\nu^2)(13-40\nu+32\nu^2)}{1-2\nu} \\ T_2 &= -\frac{h^2K_1^3r_K^5}{384E^3}\frac{\nu^2(1+\nu)(155-736\nu+1\,280\nu^2-960\nu^3+256\nu^4)}{(1-2\nu)^3} \\ T_3 &= \frac{h^2K_1^6r_K^3}{128E^3}\frac{\nu^2(1+\nu)(3-4\nu)}{(1-2\nu)^2} \end{aligned}\right\} \tag{14-103}$$

求解关于 κ^2 的方程式(14－101)，得

$$\left.\begin{aligned} &\kappa^2=0,\qquad \kappa^2=\frac{-T_2+\sqrt{T_2^2-4T_1T_3}}{2T_1} \\ \text{或}\quad &\kappa^2=\frac{-T_2-\sqrt{T_2^2-4T_1T_3}}{2T_1} \end{aligned}\right\} \tag{14-104}$$

式中

$$T_2^2-4T_1T_3-\frac{h^4K_1^{12}r_K^{10}}{147\,456E^6}\frac{\nu^4(1+V)^2}{(1-2\nu)^4}(8\,425-7\,761\nu+319\,584\nu^2- \\ 776\,192\nu^3+1\,226\,240\nu^4-1\,294\,336\nu^5+ \\ 888\,832\nu^6-360\,448\nu^7+65\,536\nu^8) \tag{14-105}$$

通过计算可以知道，当 $\nu=0.2\sim0.45$ 时，$T_2^2-4T_1T_3>0$，$\dfrac{-T_2+\sqrt{T_2^2-4T_1T_3}}{2T_1}>0$ 和 $\dfrac{-T_2-\sqrt{T_2^2-4T_1T_3}}{2T_1}>0$ 恒成立。因此，微分方程式(14－84)存在六个实特征根。根据位移对称与反对称条件，可得微分方程组的解为



$$\left.\begin{aligned}\xi(z) &= D_1 \mathrm{ch}\,(\kappa_1 z) + D_2 \mathrm{ch}\,(\kappa_2 z) + D_3 \\ \eta(z) &= D_4 \mathrm{ch}\,(\kappa_1 z) + D_5 \mathrm{ch}\,(\kappa_2 z) + D_6 \\ \zeta(z) &= D_7 \mathrm{sh}\,(\kappa_1 z) + D_8 \mathrm{sh}\,(\kappa_2 z) + D_9 z\end{aligned}\right\} \tag{14-106}$$

式中，$D_1 \sim D_9$ 为待定常数。不失一般性，κ_1 与 κ_2 分别取式(14－104)中的两个正根。

将式(14－106)代入微分方程式(14－84)，可得待定常数间的关系式如下：

$$\left.\begin{aligned}D_4 &= D_{41} D_1, & D_5 &= D_{52} D_2, & D_6 &= D_{63} D_3 \\ D_7 &= D_{71} D_1, & D_8 &= D_{82} D_2, & D_9 &= D_{93} D_3\end{aligned}\right\} \tag{14-107}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}D_{41} &= -\frac{\kappa_1^2 A_{12} C_{32} + A_{10} C_{32} - A_{31} C_{11}}{B_{10} C_{32} - B_{31} C_{11}} \\ D_{52} &= -\frac{\kappa_2^2 A_{12} C_{32} + A_{10} C_{32} - A_{31} C_{11}}{B_{10} C_{32} - B_{31} C_{11}} \\ D_{63} &= -\frac{A_{10} C_{21} - A_{20} C_{11}}{B_{10} C_{21} - B_{20} C_{11}}\end{aligned}\right\} \tag{14-108}$$

$$\left.\begin{aligned}D_{71} &= \frac{\kappa_1^2 A_{12} B_{31} + A_{10} B_{31} - A_{31} B_{10}}{\kappa_1 (B_{10} C_{32} - B_{31} C_{11})} \\ D_{82} &= \frac{\kappa_2^2 A_{12} B_{31} + A_{10} B_{31} - A_{31} B_{10}}{\kappa_2 (B_{10} C_{32} - B_{31} C_{11})} \\ D_{93} &= \frac{A_{10} B_{20} - A_{20} B_{10}}{B_{10} C_{21} - B_{20} C_{11}}\end{aligned}\right\} \tag{14-109}$$

以上三式表明，在九个待定常数 $D_1 \sim D_9$ 中，只有三个参数是完全独立的。因此，只需求解出三个独立待定常数 D_1，D_2 和 D_3，其他常数可由式(14－107)、式(14－108)与式(14－109)确定。



14.2.6 边界条件

下面根据边界条件确定待定的常数 D_1,D_2 和 D_3。

由式(14-77)可以看出,在设定三个不同位移函数的情况下,对 σ_z 不能够进行变量分离。因此,在平行于板中面的表面上,考虑裂尖附近一个由 K 主引导区控制的半径为 r_K 的开口圆面 A,满足正应力在该圆面上的面积分为零,即当 $z=h$ 时,有

$$\int_A \sigma_z \mathrm{d}A = 0 \tag{14-110}$$

将式(14-77)中 σ_z 的表达式代入式(14-110),有

$$\int_A [(\lambda+2\mu)w_t\zeta'(z)+\lambda\varepsilon_{xn}\xi(z)+\lambda\varepsilon_{yn}\eta(z)]\mathrm{d}A = 0 \tag{14-111}$$

另外,其他静力边界条件将在变分意义上得到满足,即

$$\int_S [(\sigma_x l+\tau_{xy}m-p_x)\delta u+(\tau_{xy}l+\sigma_y m-p_y)\delta v]\mathrm{d}S+$$

$$\int_A (\tau_{xz}\delta u+\tau_{yz}\delta v)\mathrm{d}A = 0 \tag{14-112}$$

式中,p_x,p_y 为板的 K_{I} 主导区周边表面上面力分量;l,m 为该表面外法线的方向余弦;S 与 A 分别为板的周边表面与上下表面。

将式(14-80)代入式(14-112),并考虑到 $\delta\xi(z)$ 和 $\delta\eta(z)$ 的任意性,有

$$\left.\begin{aligned}\int_S (\sigma_x l+\tau_{xy}m-p_x)u_n\mathrm{d}S+\int_A \tau_{xz}u_n\mathrm{d}A = 0\\ \int_S (\tau_{xy}l+\sigma_y m-p_y)v_n\mathrm{d}S+\int_A \tau_{yz}v_n\mathrm{d}A = 0\end{aligned}\right\} \tag{14-113}$$

再将式(14-77)代入式(14-113),有



$$\left.\begin{aligned}&\int_S\left\{\left[(\lambda+2\mu)\varepsilon_{xn}\xi(z)+\lambda\varepsilon_{yn}\eta(z)+\lambda w_s\zeta'(z)\right]l+\mu\left[\frac{\partial u_n}{\partial y}\xi(z)+\right.\right.\\&\left.\left.\frac{\partial v_n}{\partial x}\eta(z)\right]m-p_x\right\}u_n\mathrm{d}S+\int_A\mu\left[u_n\xi'(h)+\frac{\partial w_s}{\partial x}\zeta(h)\right]u_n\mathrm{d}A=0\\&\int_S\left\{\mu\left[\frac{\partial u_n}{\partial y}\xi(z)+\frac{\partial v_n}{\partial x}\eta(z)\right]l+\left[(\lambda+2\mu)\varepsilon_{yn}\eta(z)+\lambda\varepsilon_{xn}\xi(z)+\right.\right.\\&\left.\left.\lambda w_s\zeta'(z)\right]m-p_y\right\}v_n\mathrm{d}S+\int_A\mu\left[v_n\eta'(h)+\frac{\partial w_s}{\partial y}\zeta(h)\right]v_n\mathrm{d}A=0\end{aligned}\right\}\tag{14-114}$$

联立式(14－111)与式(14－114)，并考虑到 $\mathrm{d}S=\mathrm{d}z\mathrm{d}C$，有

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^h\xi(z)\mathrm{d}z\int_C\left[(\lambda+2\mu)\varepsilon_{xn}l+\mu\frac{\partial u_n}{\partial y}m\right]u_n\mathrm{d}C+\int_0^h\eta(z)\mathrm{d}z\int_C\left[\lambda\varepsilon_{yn}l+\right.\\&\left.\mu\frac{\partial v_n}{\partial x}m\right]u_n\mathrm{d}C+\int_0^h\zeta'(z)\mathrm{d}z\int_C\lambda w_s l u_n\mathrm{d}C+\xi'(h)\mu\int_A u_n^2\mathrm{d}A+\\&\zeta(h)u\int_A u_n\frac{\partial w_s}{\partial x}\mathrm{d}A=h\int_C p_x u_n\mathrm{d}C\\&\int_0^h\xi(z)\mathrm{d}z\int_C\left(\mu\frac{\partial u_n}{\partial y}l+\lambda\varepsilon_{xn}m\right)v_n\mathrm{d}C+\int_0^h\eta(z)\mathrm{d}z\int_C\left[\mu\frac{\partial v_n}{\partial x}l+\right.\\&\left.(\lambda+2\mu)\varepsilon_{yn}m\right]v_n\mathrm{d}C+\int_0^h\zeta'(z)\mathrm{d}z\int_C\lambda w_s m v_n\mathrm{d}C+\eta'(h)\mu\int_A v_n^2\mathrm{d}A+\\&\zeta(h)\mu\int_A v_n\frac{\partial w_s}{\partial y}\mathrm{d}A=h\int_C p_y v_n\mathrm{d}C\\&\zeta'(h)\int_A(\lambda+2\mu)w_s\mathrm{d}A+\xi(h)\int_A\lambda\varepsilon_{xn}\mathrm{d}A+\eta(h)\int_A\lambda\varepsilon_{yn}\mathrm{d}A=0\end{aligned}\right\}\tag{14-115}$$

显然，通过式(14－115)所包括的三个方程式，可以惟一确定三个待定的常数 D_1，D_2 和 D_3。下面对式(14－115)进行化简。

令



$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \int_C \left[(\lambda + 2\mu)\varepsilon_{xn} l + \mu \frac{\partial u_n}{\partial y} m \right] u_n \mathrm{d}C \\ I_2 &= \int_C \left(\lambda \varepsilon_{yn} l + \mu \frac{\partial v_n}{\partial x} m \right) u_n \mathrm{d}C \\ I_3 &= \int_C \lambda w_s l u_n \mathrm{d}C \end{aligned}\right\} \quad (14-116)$$

$$\left.\begin{aligned} I_4 &= \int_C \left(\mu \frac{\partial u_n}{\partial y} l + \lambda \varepsilon_{xn} m \right) v_n \mathrm{d}C \\ I_5 &= \int_C \left[\mu \frac{\partial v_n}{\partial x} l + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{yn} m \right] v_n \mathrm{d}C \\ I_6 &= \int_C \lambda w_s m v_n \mathrm{d}C \end{aligned}\right\} \quad (14-117)$$

$$\left.\begin{aligned} I_7 &= \int_A \lambda \varepsilon_{xn} \mathrm{d}A \\ I_8 &= \int_A \lambda \varepsilon_{yn} \mathrm{d}A \\ I_9 &= \int_A (\lambda + 2\mu) w_s \mathrm{d}A \end{aligned}\right\} \quad (14-118)$$

则由平面应变状态下的静力边界条件

$$\left.\begin{aligned} p_x &= \sigma_{xn} l + \tau_{xyn} m = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{xn} l + \mu \frac{\partial u_n}{\partial y} m + \lambda \varepsilon_{yn} l + \mu \frac{\partial v_n}{\partial x} m \\ p_y &= \tau_{xyn} l + \sigma_{yn} m = \mu \frac{\partial u_n}{\partial y} l + \lambda \varepsilon_{xn} m + \mu \frac{\partial v_n}{\partial x} l + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{yn} m \end{aligned}\right\} \quad (14-119)$$

可得

$$\left.\begin{aligned} \int_C p_x u_n \mathrm{d}C &= I_1 + I_2 \\ \int_C p_y v_n \mathrm{d}C &= I_4 + I_5 \end{aligned}\right\} \quad (14-120)$$

由式(14-17)、式(14-88)和式(14-89)，并考虑式(14-91)和式(14-92)，可将式(14-116)、式(14-117)和式(14-118)写成如下形式：

$$
\left.\begin{aligned}
I_1 &= \frac{(1+\nu)(63-320\nu+512\nu^2-256\nu^3)}{64E(1-2\nu)}K_{\mathrm{I}}^2 r_K \\
I_2 &= -\frac{(1+\nu)(55-272\nu+448\nu^2-256\nu^3)}{64E(1-2\nu)}K_{\mathrm{I}}^2 r_K \\
I_3 &= -\frac{\nu^2}{E}hK_{\mathrm{I}}^2 r_K
\end{aligned}\right\}
\tag{14-121}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
I_4 &= -\frac{(1+\nu)(57-272\nu+448\nu^2-256\nu^3)}{64E(1-2\nu)}K_{\mathrm{I}}^2 r_K \\
I_5 &= \frac{(1+\nu)(129-512\nu+640\nu^2-256\nu^3)}{64E(1-2\nu)}K_{\mathrm{I}}^2 r_K \\
I_6 &= -\frac{(3-4\nu)\nu^2}{2E(1-2\nu)}hK_{\mathrm{I}}^2 r_K
\end{aligned}\right\}
\tag{14-122}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
I_7 &= 8K_{\mathrm{I}}\sqrt{\frac{2r_K^3}{\pi}}\,\frac{\nu(2-5\nu)}{15(1-2\nu)} \\
I_8 &= 8K_{\mathrm{I}}\sqrt{\frac{2r_K^3}{\pi}}\,\frac{\nu(3-5\nu)}{15(1-2\nu)} \\
I_9 &= -8K_{\mathrm{I}}\sqrt{\frac{2r_K^3}{\pi}}\,\frac{\nu(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}
\end{aligned}\right\}
\tag{14-123}
$$

将式(14－116)至式(14－118)以及式(14－120)代入式(14－115),并考虑式(14－85)与式(14－86),有

$$
\left.\begin{aligned}
& I_1\int_0^h \xi(z)\mathrm{d}z + I_2\int_0^h \eta(z)\mathrm{d}z + I_3\int_0^h \zeta'(z)\mathrm{d}z + \xi'(h)A_{12} + \\
& \qquad \zeta(h)\frac{\mu}{\lambda+\mu}C_{11} = h(I_1+I_2) \\
& I_4\int_0^h \xi(z)\mathrm{d}z + I_5\int_0^h \eta(z)\mathrm{d}z + I_6\int_0^h \zeta'(z)\mathrm{d}z + \eta'(h)B_{22} + \\
& \qquad \zeta(h)\frac{\mu}{\lambda+\mu}C_{21} = h(I_4+I_5) \\
& \xi(h)I_7 + \eta(h)I_8 + \zeta'(h)I_9 = 0
\end{aligned}\right\}
\tag{14-124}
$$



由式(14－106)可得

$$\left.\begin{aligned}
\int_0^h \xi(z)\mathrm{d}z &= \frac{D_1}{\kappa_1}\mathrm{sh}\,(\kappa_1 h) + \frac{D_2}{\kappa_2}\mathrm{sh}\,(\kappa_2 h) + D_3 h \\
\int_0^h \eta(z)\mathrm{d}z &= \frac{D_4}{\kappa_1}\mathrm{sh}\,(\kappa_1 h) + \frac{D_5}{\kappa_2}\mathrm{sh}\,(\kappa_2 h) + D_6 h \\
\int_0^h \zeta'(z)\mathrm{d}z &= D_7\,\mathrm{sh}\,(\kappa_1 h) + D_8\,\mathrm{sh}\,(\kappa_2 h) + D_9 h
\end{aligned}\right\} \tag{14-125}$$

$$\left.\begin{aligned}
\xi(h) &= D_1\mathrm{ch}\,(\kappa_1 h) + D_2\mathrm{ch}\,(\kappa_2 h) + D_3 \\
\eta(h) &= D_4\mathrm{ch}\,(\kappa_1 h) + D_5\mathrm{ch}\,(\kappa_2 h) + D_6 \\
\zeta(h) &= D_7\mathrm{sh}\,(\kappa_1 h) + D_8\mathrm{sh}\,(\kappa_2 h) + D_9 h \\
\xi'(h) &= D_1\kappa_1\mathrm{sh}\,(\kappa_1 h) + D_2\kappa_2\mathrm{sh}\,(\kappa_2 h) \\
\eta'(h) &= D_4\kappa_1\mathrm{sh}\,(\kappa_1 h) + D_5\kappa_2\mathrm{sh}\,(\kappa_2 h) \\
\zeta'(h) &= D_7\kappa_1\mathrm{ch}\,(\kappa_1 h) + D_8\kappa_2\mathrm{ch}\,(\kappa_2 h) + D_9
\end{aligned}\right\} \tag{14-126}$$

将式(14－125)与式(14－126)代入式(14－124)，可进一步得到

$$\left.\begin{aligned}
& I_1\left[\frac{D_1}{\kappa_1}\mathrm{sh}\,(\kappa_1 h) + \frac{D_2}{\kappa_2}\mathrm{sh}(\kappa_2 h) + D_3 h\right] + I_2\left[\frac{D_4}{\kappa_1}\mathrm{sh}\,(\kappa_1 h) + \right. \\
& \quad \left.\frac{D_5}{\kappa_2}\mathrm{sh}\,(\kappa_2 h) + D_6 h\right] + I_3[D_7\,\mathrm{sh}\,(\kappa_1 h) + D_8\,\mathrm{sh}\,(\kappa_2 h) + D_9 h] + \\
& \quad A_{12}[D_1\kappa_1\,\mathrm{sh}\,(\kappa_1 h) + D_2\kappa_2\,\mathrm{sh}\,(\kappa_2 h)] + \frac{\mu}{\lambda+\mu}C_{11}[D_7\,\mathrm{sh}\,(\kappa_1 h) + \\
& \quad D_8\,\mathrm{sh}\,(\kappa_2 h) + D_9 h] = h(I_1 + I_2) \\
& I_4\left[\frac{D_1}{\kappa_1}\mathrm{sh}\,(\kappa_1 h) + \frac{D_2}{\kappa_2}\mathrm{sh}\,(\kappa_2 h) + D_3 h\right] + I_5\left[\frac{D_4}{\kappa_1}\mathrm{sh}(\kappa_1 h) + \right. \\
& \quad \left.\frac{D_5}{\kappa_2}\mathrm{sh}\,(\kappa_2 h) + D_6 h\right] + I_6[D_7\,\mathrm{sh}\,(\kappa_1 h) + D_8\,\mathrm{sh}\,(\kappa_2 h) + D_9 h] + \\
& \quad B_{22}[D_4\kappa_1\,\mathrm{sh}\,(\kappa_1 h) + D_5\kappa_2\,\mathrm{sh}\,(\kappa_2 h)] + \frac{\mu}{\lambda+\mu}C_{21}[D_7\,\mathrm{sh}\,(\kappa_1 h) + \\
& \quad D_8\,\mathrm{sh}\,(\kappa_2 h) + D_9 h] = h(I_4 + I_5) \\
& I_7[D_1\,\mathrm{ch}\,(\kappa_1 h) + D_2\,\mathrm{ch}\,(\kappa_2 h) + D_3] + I_8[D_4\,\mathrm{ch}\,(\kappa_1 h) + \\
& \quad D_5\,\mathrm{ch}\,(\kappa_2 h) + D_6] + I_9[D_7\kappa_1\,\mathrm{ch}\,(\kappa_1 h) + D_8\kappa_2\,\mathrm{ch}\,(\kappa_2 h) + D_9] = 0
\end{aligned}\right\} \tag{14-127}$$

考虑式(14－107)，上式可进一步整理成如下形式：

$$\left.\begin{aligned}\alpha_{11}D_1+\alpha_{12}D_2+\alpha_{13}D_3&=\beta_1\\\alpha_{21}D_1+\alpha_{22}D_2+\alpha_{23}D_3&=\beta_2\\\alpha_{31}D_1+\alpha_{32}D_2+\alpha_{33}D_3&=\beta_3\end{aligned}\right\}\qquad(14-128)$$

式中

$$\left.\begin{aligned}\alpha_{11}&=\left[\left(\frac{I_1}{\kappa_1}+A_{12}\kappa_1\right)+\frac{I_2}{\kappa_1}D_{41}+\left(I_3+\frac{\mu}{\lambda+\mu}C_{11}\right)D_{71}\right]\mathrm{sh}\,(\kappa_1 h)\\\alpha_{12}&=\left[\left(\frac{I_1}{\kappa_2}+A_{12}\kappa_2\right)+\frac{I_2}{\kappa_2}D_{52}+\left(I_3+\frac{\mu}{\lambda+\mu}C_{11}\right)D_{82}\right]\mathrm{sh}\,(\kappa_2 h)\\\alpha_{13}&=\left[I_1+I_2D_{63}+\left(I_3+\frac{\mu}{\lambda+\mu}C_{11}\right)D_{93}\right]h\end{aligned}\right\}\qquad(14-129)$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha_{21}&=\left[\left(\frac{I_4}{\kappa_1}+B_{22}\kappa_1\right)+\frac{I_5}{\kappa_1}D_{41}+\left(I_6+\frac{\mu}{\lambda+\mu}C_{21}\right)D_{71}\right]\mathrm{sh}\,(\kappa_1 h)\\\alpha_{22}&=\left[\left(\frac{I_4}{\kappa_2}+B_{22}\kappa_2\right)+\frac{I_5}{\kappa_2}D_{52}+\left(I_6+\frac{\mu}{\lambda+\mu}C_{21}\right)D_{82}\right]\mathrm{sh}\,(\kappa_2 h)\\\alpha_{23}&=\left[I_4+I_5D_{63}+\left(I_6+\frac{\mu}{\lambda+\mu}C_{21}\right)D_{93}\right]h\end{aligned}\right\}\qquad(14-130)$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha_{31}&=\left(\frac{I_7}{I_9}+\frac{I_8}{I_9}D_{41}+\kappa_1D_{71}\right)\mathrm{ch}\,(\kappa_1 h)\\\alpha_{32}&=\left(\frac{I_7}{I_9}+\frac{I_8}{I_9}D_{52}+\kappa_2D_{82}\right)\mathrm{ch}\,(\kappa_2 h)\\\alpha_{33}&=\frac{I_7}{I_9}+\frac{I_8}{I_9}D_{63}+D_{93}\end{aligned}\right\}\qquad(14-131)$$

$$\left.\begin{aligned}\beta_1&=(I_1+I_2)h\\\beta_2&=(I_4+I_5)h\\\beta_3&=0\end{aligned}\right\}\qquad(14-132)$$

求解方程组式(14－128)，可求得 D_1，D_2 和 D_3 如下：



$$
\left.
\begin{array}{ll}
D_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \beta_2 & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \beta_3 & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}}, & D_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \beta_1 & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \beta_2 & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \beta_3 & \alpha_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}} \\
D_3 = \dfrac{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \beta_2 \\ \alpha_3 & \alpha_{32} & \beta_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}} &
\end{array}
\right\}
\tag{14-133}
$$

14.2.7 厚度效应分析

将式(14－106)代入式(14－77)中第三式，可得

$$
\begin{aligned}
\sigma_z = & -\frac{\lambda(\lambda+\mu)}{\lambda^* + \mu} h(\varepsilon_{xn} + \varepsilon_{yn})[D_7 \kappa_1 \mathrm{ch}\,(\kappa_1 z) + D_8 \kappa_2 \mathrm{ch}\,(\kappa_2 z) + D_9] + \\
& \lambda \varepsilon_{xn}[D_1 \mathrm{ch}\,(\kappa_1 z) + D_2 \mathrm{ch}\,(\kappa_2 z) + D_3] + \lambda \varepsilon_{yn}[D_4 \mathrm{ch}\,(\kappa_1 z) + \\
& D_5 \mathrm{ch}\,(\kappa_2 z) + D_6]
\end{aligned}
\tag{14-134}
$$

考虑式(14－107)，可将上式整理为如下形式：

$$
\sigma_z = \lambda \gamma_1 D_1 \mathrm{ch}\,(\kappa_1 z) + \lambda \gamma_2 D_2 \mathrm{ch}\,(\kappa_2 z) + \lambda \gamma_3 D_3 \tag{14-135}
$$

式中

$$
\left.
\begin{aligned}
\gamma_1 &= \varepsilon_{xn} + \varepsilon_{yn} D_{41} - \frac{\lambda+\mu}{\lambda^* + \mu} h(\varepsilon_{xn} + \varepsilon_{yn}) \kappa_1 D_{71} \\
\gamma_2 &= \varepsilon_{xn} + \varepsilon_{yn} D_{52} - \frac{\lambda+\mu}{\lambda^* + \mu} h(\varepsilon_{xn} + \varepsilon_{yn}) \kappa_2 D_{82} \\
\gamma_3 &= \varepsilon_{xn} + \varepsilon_{yn} D_{63} - \frac{\lambda+\mu}{\lambda^* + \mu} h(\varepsilon_{xn} + \varepsilon_{yn}) D_{93}
\end{aligned}
\right\}
\tag{14-136}
$$



同样考虑裂尖附近一个由 K 主导区控制的半径为 r_K 的开口圆面，σ_z 与 σ_m 的面积分之比为

$$\frac{\int_A \sigma_z \mathrm{d}A}{\int_A \sigma_m \mathrm{d}A} = G_1 D_1 \operatorname{ch}(\kappa_1 z) + G_2 D_2 \operatorname{ch}(\kappa_2 z) + G_3 D_3 \tag{14-137}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}
G_1 &= \frac{\int_A \varepsilon_{xn} \mathrm{d}A}{\int_A (\varepsilon_{xn} + \varepsilon_{yn}) \mathrm{d}A} + \frac{\int_A \varepsilon_{yn} \mathrm{d}A}{\int_A (\varepsilon_{xn} + \varepsilon_{yn}) \mathrm{d}A} D_{41} - \frac{\lambda + \mu}{\lambda^* + \mu} \kappa_1 h D_{71} \\
G_2 &= \frac{\int_A \varepsilon_{xn} \mathrm{d}A}{\int_A (\varepsilon_{xn} + \varepsilon_{yn}) \mathrm{d}A} + \frac{\int_A \varepsilon_{yn} \mathrm{d}A}{\int_A (\varepsilon_{xn} + \varepsilon_{yn}) \mathrm{d}A} D_{52} - \frac{\lambda + \mu}{\lambda^* + \mu} \kappa_2 h D_{82} \\
G_3 &= \frac{\int_A \varepsilon_{xn} \mathrm{d}A}{\int_A (\varepsilon_{xn} + \varepsilon_{yn}) \mathrm{d}A} + \frac{\int_A \varepsilon_{yn} \mathrm{d}A}{\int_A (\varepsilon_{xn} + \varepsilon_{yn}) \mathrm{d}A} D_{63} - \frac{\lambda + \mu}{\lambda^* + \mu} h D_{93}
\end{aligned}\right\} \tag{14-138}$$

通过比较一定厚度板 σ_z 与 σ_m 在 K 主导区表面上的面积分，可将任意厚度板划分成等效完全平面应变区与等效完全平面应力区两个部分。其中，等效完全平面应变区的当量厚度 h^* 可按下式计算，即

$$h^* = \frac{\int_0^h \int_A \sigma_z \mathrm{d}A \mathrm{d}z}{\int_A \sigma_m \mathrm{d}A} = G_1 D_1 \frac{\operatorname{sh}(\kappa_1 h)}{\kappa_1} + G_2 D_2 \frac{\operatorname{sh}(\kappa_2 h)}{\kappa_2} + G_3 D_3 h \tag{14-139}$$

进一步，可得到当量平面应变区厚度与板厚之比 $f(h)$ 为

$$f(h) = \frac{h^*}{h} = G_1 D_1 \frac{\operatorname{sh}(\kappa_1 h)}{\kappa_1 h} + G_2 D_2 \frac{\operatorname{sh}(\kappa_2 h)}{\kappa_2 h} + G_3 D_3 \tag{14-140}$$



至此，已经获得了与14.1节完全类似的结果，由于κ_1与κ_2的值都与K主导区半径r_K成反比，所以K主导区半径r_K对厚度函数$f(h)$而言仍具有主导作用。

14.2.8 断裂韧度理论公式

根据上述厚度效应分析，具有任意厚度的含裂纹板都可以看成由平面应变区与平面应力区两个部分组成，那么，板的断裂韧度公式同样可以看成是平面应变断裂韧度与平面应力断裂韧度两个部分的线性组合，即

$$K_C = \xi\sqrt{t}\left[1-f\left(\frac{t}{2}\right)\right]+K_{\mathrm{I}C}f\left(\frac{t}{2}\right) \qquad (14-141)$$

式中，ξ为待定材料参数；$K_{\mathrm{I}C}$为平面应变断裂韧度；t为板厚。

具体的参数拟合方法为最小二乘方法。首先假定K主引导区半径r_K为已知常数，借助式(14-104)可计算式(14-140)中的κ_1与κ_2的值，从而可拟合ξ与$K_{\mathrm{I}C}$。令

$$\varphi(\xi,K_{\mathrm{I}C})=\sum_{i=1}^{N}(K_{C_i}-K_{C_i}^{*})^2=$$
$$\sum_{i=1}^{N}\left\{K_{C_i}-\xi\sqrt{t_i}\left[1-f\left(\frac{t_i}{2}\right)\right]-K_{\mathrm{I}C}f\left(\frac{t_i}{2}\right)\right\}^2$$
$$(14-142)$$

式中，K_{C_i}为根据试验所获得的某些厚度所对应的断裂韧度值；K_C^*为通过理论公式(14-141)计算的该厚度下的断裂韧度值；$\varphi(\xi,K_{\mathrm{I}C})$即为全体试验获得断裂韧度值与计算所得断裂韧度值之间误差的平方和。要使$\varphi(\xi,K_{\mathrm{I}C})$达到极小，只需将式(14-142)分别对$\xi$与$K_{\mathrm{I}C}$求偏微分，并令其等于零。于是，有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}=-2\sum_{i=1}^{N}\left\{K_{C_i}-\xi\sqrt{t_i}\left[1-f\left(\frac{t_i}{2}\right)\right]-K_{\mathrm{I}C}f\left(\frac{t_i}{2}\right)\right\}\sqrt{t_i}\cdot\\&\qquad\left[1-f\left(\frac{t_i}{2}\right)\right]=0\\&\frac{\partial\varphi}{\partial K_{\mathrm{I}C}}=-2\sum_{i=1}^{N}\left\{K_{C_i}-\xi\sqrt{t_i}\left[1-f\left(\frac{t_i}{2}\right)\right]-K_{\mathrm{I}C}f\left(\frac{t_i}{2}\right)\right\}\cdot\\&\qquad f\left(\frac{t_i}{2}\right)=0\end{aligned}\right\}\tag{14-143}$$

经化简整理,得到求解 ξ 与 $K_{\mathrm{I}C}$ 的线性方程组

$$\left.\begin{aligned}&\xi\sum_{i=1}^{N}\left\{\sqrt{t_i}\left[1-f\left(\frac{t_i}{2}\right)\right]\right\}^2+K_{\mathrm{I}C}\sum_{i=1}^{N}f\left(\frac{t_i}{2}\right)\sqrt{t_i}\left[1-f\left(\frac{t_i}{2}\right)\right]=\\&\qquad\sum_{i=1}^{N}K_{C_i}\sqrt{t_i}\left[1-f\left(\frac{t_i}{2}\right)\right]\\&\xi\sum_{i=1}^{N}f\left(\frac{t_i}{2}\right)\sqrt{t_i}\left[1-f\left(\frac{t_i}{2}\right)\right]+K_{\mathrm{I}C}\sum_{i=1}^{N}\left[f\left(\frac{t_i}{2}\right)\right]^2=\\&\qquad\sum_{i=1}^{N}K_{C_i}f\left(\frac{t_i}{2}\right)\end{aligned}\right\}\tag{14-144}$$

求解方程组式(14-144)即可得到断裂韧度方程中的 ξ 与 $K_{\mathrm{I}C}$ 值。必须指出,在上述公式的推导过程中,假设 r_K 是已知常数,随着 r_K 值的不同,拟合所得到的 ξ 与 $K_{\mathrm{I}C}$ 值是不同的,拟合误差 $\varphi(\xi,K_{\mathrm{I}C})$ 的大小也会有所不同。

因此,还需要选取不同的 r_K 值分别进行拟合,以拟合误差 $\varphi(\xi,K_{\mathrm{I}C})$ 为优化目标,对 r_K 值进行优化,最终优化所得到的 r_K 值以及在此 r_K 值下通过最小二乘法获得的 ξ 与 $K_{\mathrm{I}C}$ 即为所求的值。

14.2.9 试验验证

下面通过两种材料的试验数据[14.1]来验证上述理论。



1. 钛合金 TC4

手册提供了四种厚度试样的断裂韧度以及平面应变断裂韧度 K_{IC}，如表 14-10 所列。

表 14-10 TC4 四种厚度试样的断裂韧度及平面应变断裂韧度

板厚 H/mm	2	5	10	15	∞
试验 K_C/(MPa·m$^{1/2}$)	61.170 7	67.336 3	61.170 7	60.518 9	57.700 0

考虑到断裂韧度与试样厚度关系的复杂性，下面针对薄板与厚板两种情况分别进行拟合。

(1) 第一种拟合方法

针对薄板情况，采用前三种小厚度试样数据进行拟合；针对厚板情况，采用后两种大厚度试样数据以及平面应变断裂韧度 K_{IC} 进行拟合，拟合结果见表 14-11。

表 14-11 TC4 拟合结果(方法一)

试 样	r_K/mm	κ_1/mm^{-1}	κ_2/mm^{-1}	ξ/[MPa·(m·mm^{-1})$^{1/2}$]	K_{IC}/(MPa·m$^{1/2}$)
薄板 1	$r_{K1}=0.406$	$\kappa_{11}=3.103\ 2$	$\kappa_{21}=1.304\ 3$	$\xi_1=48.867\ 6$	$K_{IC1}=6.995\ 5$
厚板 2	$r_{K2}=0.001$	$\kappa_{12}=1\ 259.890\ 0$	$\kappa_{22}=529.446\ 0$	$\xi_2=934.925\ 0$	$K_{IC2}=57.700\ 0$

断裂韧度的理论曲线可分为如下的两部分：

$$K_{C1}=\xi_1\sqrt{t}\left[1-f\left(\frac{t}{2},\kappa_1\right)\right]+K_{IC1}f\left(\frac{t}{2},\kappa_1\right)\qquad(0<t\leqslant t^*)\tag{14-145}$$

$$K_{C2}=\xi_2\sqrt{t}\left[1-f\left(\frac{t}{2},\kappa_2\right)\right]+K_{IC2}f\left(\frac{t}{2},\kappa_2\right)\qquad(t^*\leqslant t<\infty)\tag{14-146}$$

式中，$t^*=10$ mm。断裂韧度与试样厚度关系曲线如图 14-9 所示。



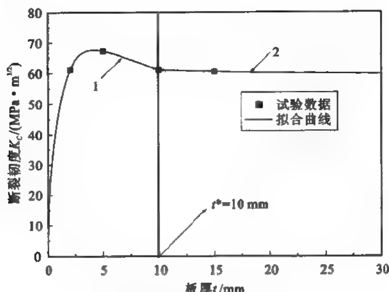


图 14-9　TC4 的断裂韧度与试样厚度关系曲线(方法一)

从以上结果可以看出，对于较薄的板($t \leqslant 10$ mm)而言，平面应力区占主导地位，即式(14-141)中右端第一项起主要作用，计算断裂韧度时采用式(14-145)，如图 14-9 中曲线 1 所示；对于较厚的板($t \geqslant 10$ mm)而言，平面应变区占主导地位，即式(14-141)中右端第二项起主要作用，计算断裂韧度时采用式(14-146)，如图 14-9 中曲线 2 所示。这样，通过两个曲线表达式(14-145)与式(14-146)即可计算任意厚度板对应的断裂韧度值。

(2) 第二种拟合方法

选取所有四种厚度试样的断裂韧度，按照式(14-141)进行拟合。拟合结果见表 14-12，拟合误差见表 14-13。

表 14-12　TC4 拟合结果(方法二)

试　样	r_K/mm	κ_1/mm^{-1}	κ_2/mm^{-1}	ξ/[MPa·$(m·mm^{-1})^{1/2}$]	K_{IC}/(MPa·$m^{1/2}$)
薄板 1	r_K=0.285	κ_1=4.420 7	κ_2=1.858 1	ξ=50.214 4	K_{IC1}=26.118 7
厚板 2					K_{IC2}=57.700 0



表 14－13 四种厚度 TC4 试样的断裂韧度拟合误差

板厚 H/mm	2	5	10	15
相对误差/(%)	0.005	1.130	2.960	1.960

断裂韧度的理论曲线可分为如下两部分：

$$K_{C1} = \xi\sqrt{t}\left[1 - f\left(\frac{t}{2},\kappa\right)\right] + K_{1C1}f\left(\frac{t}{2},\kappa\right) \qquad (0 < t \leqslant t^{\Delta}) \tag{14-147}$$

$$K_{C2} = K_{1C} \qquad (t^{\Delta} \leqslant t < \infty) \tag{14-148}$$

式中，$t^{\Delta}=17.7$ mm。断裂韧度与试样厚度关系曲线如图 14－10 所示。

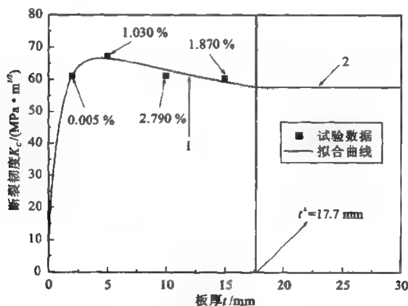


图 14－10 TC4 的断裂韧度与试样厚度关系曲线(方法二)

由表 14－13 可以看出，在一定的工程许可范围内拟合误差是完全可以接受的。



2. 铝合金 LY12CZ

手册提供了四种厚度试样的断裂韧度以及平面应变断裂韧度 $K_{\rm IC}$，如表 14－14 所列。

表 14－14 四种厚度 LY12CZ 试样的断裂韧度及平面应变断裂韧度

板厚 H/mm	2	4	6	10	∞
试验 K_C/(MPa·m$^{1/2}$)	39.329 2	39.305 4	30.889 4	29.160 4	21.100 0

与 TC4 方法类似，同样采取两种方法针对薄板与厚板两种情况分别进行拟合。

(1) 第一种拟合方法

针对薄板情况，采用前三种小厚度试样数据进行拟合；针对厚板情况，采用后两种大厚度试样数据以及平面应变断裂韧度 $K_{\rm IC}$ 进行拟合，拟合结果见表 14－15。

表 14－15 LY12CZ 拟合结果(方法一)

试 样	r_K/mm	κ_1/mm^{-1}	κ_2/mm^{-1}	ξ/[MPa·(m·mm^{-1})$^{1/2}$]	$K_{\rm IC}$/(MPa·m$^{1/2}$)
薄板 1	$r_{K1}=0.649$	$\kappa_{11}=2.157\ 9$	$\kappa_{21}=0.872\ 4$	$\xi_1=32.217\ 7$	$K_{\rm IC1}=-94.690\ 4$
厚板 2	$r_{K2}=0.036$	$\kappa_{12}=38.901\ 8$	$\kappa_{22}=15.727\ 9$	$\xi_2=59.081\ 1$	$K_{\rm IC2}=21.100\ 0$

断裂韧度的理论曲线可分为两部分，即

$$K_{C1}=\xi_1\sqrt{t}\left[1-f\left(\frac{t}{2},\kappa_1\right)\right]+K_{\rm IC1}f\left(\frac{t}{2},\kappa_1\right)\qquad(0<t\leqslant t^*)\tag{14-149}$$

$$K_{C2}=\xi_2\sqrt{t}\left[1-f\left(\frac{t}{2},\kappa_2\right)\right]+K_{\rm IC2}f\left(\frac{t}{2},\kappa_2\right)\qquad(t^*\leqslant t<\infty)\tag{14-150}$$

式中，$t^*=6$ mm。断裂韧度与试样厚度关系曲线如图 14－11 所示。

从以上结果同样可以发现，对于比较薄的板($t\leqslant6$ mm)而言，平面应力区占主导地位，即式(14 141)中等式右端第一项起主要



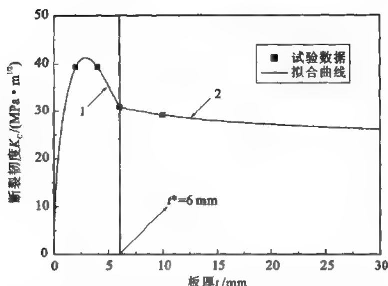


图 14-11 LY12CZ 的断裂韧度与试样厚度关系曲线(方法一)

作用,计算断裂韧度时采用式(14-149),如图 14-11 中曲线 1 所示;对于比较厚的板($t \geqslant 6$ mm)而言,平面应变区占主导地位,即式(14-141)中右端第二项起主要作用,计算断裂韧度时采用式(14-150),如图 14-11 中曲线 2 所示。这样,通过两个曲线表达式(14-149)与式(14-150)即可以计算任意厚度板对应的断裂韧度值。

(2) 第二种拟合方法

选取所有四种厚度试样的断裂韧度,按照式(14-77)进行拟合。拟合结果见表 14-16,拟合误差见表 14-17。

表 14-16 LY12CZ 拟合结果(方法二)

试样	r_K/mm	κ_1/mm^{-1}	κ_2/mm^{-1}	ξ/[MPa·(m·mm^{-1})$^{1/2}$]	K_{IC}/(MPa·m$^{1/2}$)
薄板 1	$r_K=0.2280$	$\kappa_1=6.1424$	$\kappa_2=2.4834$	$\xi=38.8522$	$K_{\mathrm{IC1}}=-5.1906$
厚板 2					$K_{\mathrm{IC2}}=21.1000$



表 14-17 LY12CZ 四种试样厚度的断裂韧度拟合误差

板厚 H/mm	2	4	6	10
相对误差/(%)	0.002	5.990	8.450	3.670

断裂韧度的理论曲线可分为如下两部分：

$$K_{C1} = \xi\sqrt{t}\left[1 - f\left(\frac{t}{2},\kappa\right)\right] + K_{1C1} f\left(\frac{t}{2},\kappa\right) \qquad (0 < t \leqslant t^{\Delta}) \tag{14-151}$$

$$K_{C2} = K_{1C} \qquad (t^{\Delta} \leqslant t < \infty) \tag{14-152}$$

式中，$t^{\Delta} = 19$ mm。断裂韧度与试样厚度关系曲线如图 14-12 所示。

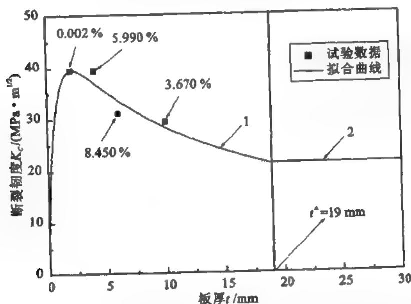


图14-12 LY12CZ 的断裂韧度与试样厚度关系曲线(方法二)

由表 14-17 可以发现，拟合误差在一定的工程许可范围内是完全可以接受的。

通过上述两种材料所采用拟合方法的计算结果比较，可以发



现“拟合方法一”适用于试验数据较多的情况，能得到较为准确的计算结果。另一方面，如果试验数据有限，为获取某一厚度板的断裂韧度，“拟合方法二”不失为一种有效的方法。

14.2.10 结 论

本节针对含裂纹板的断裂韧度问题作了进一步的理论研究。概括而言，首先是采用三个相互独立的待定函数表示位移场；然后在精确满足几何方程、物理方程的条件下，通过虚位移原理建立支配方程(欧拉方程)，并精确求得通解；最后由关于 σ_2 的合力形式的静力边界条件与虚位移原理建立的其他静力边界条件求得特解。通过断裂韧度试验验证，可以得到与双待定函数法较为类似的结果。

14.3 含裂纹板裂纹扩展阻力曲线厚度效应的理论研究

14.3.1 引 言

第 13 章论述了有关裂纹扩展阻力曲线的研究。通过建立裂纹扩展阻力曲线与试样厚度关系的表达式，提出求解问题的半工程-半理论解法。基于 14.1 节和 14.2 节关于含裂纹板厚度效应的理论研究，同样可以如断裂韧度那样，在理论高度给出裂纹扩展阻力曲线与试样厚度间的关系式。

在第 13 章有关裂纹扩展阻力曲线与试样厚度关系研究的基础上，依据含裂纹板厚度效应分析的双待定函数法(见 14.1 节)与三待定函数法(见 14.2 节)，本节进行有关含裂纹板裂纹扩展阻力曲线厚度效应的理论研究，并通过相关的裂纹扩展阻力试验验证

该理论解法。

14.3.2 裂纹扩展阻力曲线与试样厚度关系的理论公式

由式(13-38)可知

$$K_R = K_C[1+\eta(t)\Delta a]^{\frac{1}{m}} \tag{14-153}$$

式中,K_R 为阻抗应力强度因子;K_C 为材料断裂韧度;Δa 为裂纹扩展长度;m 为与试件厚度 t 有关的材料常数;$\eta(t)$为待定函数。

材料断裂韧度 K_C 与试样厚度 t 的关系可表示为如下形式:

$$K_C = \xi\sqrt{t}\left[1-f\left(\frac{t}{2}\right)\right]+K_{1C}f\left(\frac{t}{2}\right) \tag{14-154}$$

式中,K_{1C}为平面应变断裂韧度;ξ为材料常数;$f\left(\frac{t}{2}\right)$为当量平面应变区厚度与板厚之比,由 14.1 节与 14.2 节可知,在使用双待定函数法时,有

$$f\left(\frac{t}{2}\right)=\frac{1-\dfrac{\text{th}\ (\kappa t/2)}{\kappa t/2}}{1+\dfrac{2\nu(5-17\nu+16\nu^2)}{(1-\nu)(1-2\nu)(5-8\nu)}\dfrac{\text{th}\ (\kappa t/2)}{\kappa t/2}} \tag{14-155}$$

在使用三待定函数法时,有

$$f\left(\frac{t}{2}\right)=G_1D_1\frac{\text{sh}\ (\kappa_1 t/2)}{\kappa_1 t/2}+G_2D_2\frac{\text{sh}\ (\kappa_2 t/2)}{\kappa_2 t/2}+G_3D_3 \tag{14-156}$$

式中,各参数意义可分别参见 14.1.7 节与 14.1.8 节。

当试样厚度足够大时,构件将处于完全平面应变状态,裂纹扩展阻抗应力强度因子不再随着裂纹尺寸的增加发生变化,而是表现为一恒定值,即平面应变断裂韧度 K_{1C}。因此,式(14-153)应满足如下极限情况:

当 $t\to 0$ 时　　　$K_C\to 0$,　　$\eta\to\eta_0$



当 $t \to \infty$ 时 $K_C \to K_{IC}$， $K_R \to K_{IC}$， $\eta \to 0$

通过以上分析，$\eta(t)$可采用如下形式表示，即

$$\eta(t) = (A + B\sqrt{t})\left[1 - f\left(\frac{t}{2}\right)\right] \tag{14-157}$$

式中，A 和 B 为与试样厚度 t 无关的常数。

14.3.3 裂纹扩展阻力曲线拟合

裂纹扩展阻力曲线的拟合可分为两个步骤：第一步，根据若干 $K_R \sim \Delta a$ 试验数据点，按照式(14－153)拟合各厚度板对应的 K_R 方程，从而得出一组 $\eta \sim t$ 数据；第二步，通过式(14－157)拟合第一步得到的 $\eta \sim t$ 数据，从而获取 $\eta(t)$具体的数学表达式。

考虑式(14－153)，如果对应厚度下的 K_C 已通过式(14－154)求出，那么式(14－153)中的参数就只有 m 和 η 是未知的。对于不同的材料和板厚而言，m 和 η 具有不同的值，它们需要通过试验数据拟合获得。但就工程应用而言，若 m 作为一个固定常数显然具有更好的使用价值。更为重要的是，在 m 作为固定常数情况下拟合的裂纹扩展阻力曲线仍然能符合试验结果[14.2]。为此，首先分别拟合出各种厚度下满足拟合误差 $\varphi(m, \eta)$ 为最小的 m 值；然后求解所有厚度下 m 的平均值，并作为最终选定的固定常数 m；最后在此选定常数 m 下采用最小二乘方法分别拟合对应厚度的 η。以下讨论具体的拟合过程。

假定式(14－153)中 m 为已知常数，通过最小二乘方法拟合 η。为了便于拟合，将式(14－153)进一步改写为如下形式：

$$K_{RN} = (1 + \eta\Delta a)^{\frac{1}{m}} \tag{14-158}$$

式中

$$K_{RN} = \frac{K_R}{K_C} \tag{14-159}$$

式中，K_{RN} 可称为正则阻抗应力强度因子。



令

$$\varphi(m,\eta)=\sum_{i=1}^{N}[K_{RNi}^{m}-(K_{RNi}^{*})^{m}]^{2}=$$

$$\sum_{i=1}^{N}[K_{RNi}^{m}-(1+\eta\Delta a_{i})]^{2} \qquad (14-160)$$

式中，K_{RNi}为按照式(14-159)计算的试验所得正则阻抗应力强度因子值；K_{RNi}^{*}为通过理论公式(14-158)计算的正则阻抗应力强度因子值；$\varphi(m,\eta)$即为以上二者之间误差的平方和；N为试验数据组数。要使$\varphi(m,\eta)$达到极小，只需将式(14-160)对η求偏微分，并令其等于零。于是，有

$$\sum_{i=1}^{N}[K_{RNi}^{m}-(1+\eta\Delta a_{i})]\Delta a_{i}=0 \qquad (14-161)$$

进一步可得到

$$\eta=\frac{\sum_{i=1}^{N}K_{RNi}^{m}\Delta a_{i}-\sum_{i=1}^{N}\Delta a_{i}}{\sum_{i=1}^{N}(\Delta a_{i})^{2}} \qquad (14-162)$$

必须指出，在上述公式的推导过程中，假设m是已知常数，随着m值的不同，拟合所得到的η值也是不同的，拟合误差$\varphi(m,\eta)$的大小也会有所不同。

将式(14-162)代入式(14-160)，可知

$$\varphi(m)=\sum_{i=1}^{N}\left[K_{RNi}^{m}-1-\frac{\sum_{i=1}^{N}K_{RNi}^{m}\Delta a_{i}-\sum_{i=1}^{N}\Delta a_{i}}{\sum_{i=1}^{N}(\Delta a_{i})^{2}}\Delta a_{i}\right]^{2}$$

$$(14-163)$$

这样，拟合误差$\varphi(m)$将随着m值的变化而改变。因此，如果以拟合误差$\varphi(m)$最小为优化目标，对m值进行优化，就可以得到使拟合误差$\varphi(m)$最小的m值。

按照上述步骤，求解出所需拟合的各厚度板对应的m值后，



计算出它们的平均值，并把该平均值作为最终选定的材料常数 m。在 m 值已知的情况下，重复上述拟合过程，可以获取对应厚度下的 η 值，从而得到一组 $\eta \sim t$ 数据。

14.3.4 η 曲线拟合

下面按照式(14-157)进行 $\eta(t)$ 曲线的拟合。首先假定 K 主引导区半径 r_K 为已知常数，设

$$\psi(A,B)=\sum_{i=1}^{N}(\eta_i-\eta_i^*)^2=\sum_{i=1}^{N}\left\{\eta_i-(A+B\sqrt{t_i})\left[1-f\left(\frac{t_i}{2}\right)\right]\right\}^2 \tag{14-164}$$

式中，η_i 为拟合 K_R 曲线所得到的值；η_i^* 为通过理论公式(14-157)计算所得到的值；$\psi(A,B)$ 即为以上二者之间误差的平方和；N 为试验所用板厚的个数。要使 $\psi(A,B)$ 为极小，只需将式(14-164)分别对 A 与 B 求偏微分，并令其等于零。于是，有如下方程组：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\psi}{\partial A}=-2\sum_{i=1}^{N}\left\{\eta_i-A\left[1-f\left(\frac{t_i}{2}\right)\right]-B\sqrt{t_i}\left[1-f\left(\frac{t_i}{2}\right)\right]\right\}\cdot\\&\qquad\left[1-f\left(\frac{t_i}{2}\right)\right]=0\\&\frac{\partial\psi}{\partial B}=-2\sum_{i=1}^{N}\left\{\eta_i-A\left[1-f\left(\frac{t_i}{2}\right)\right]-B\sqrt{t_i}\left[1-f\left(\frac{t_i}{2}\right)\right]\right\}\sqrt{t_i}\cdot\\&\qquad\left[1-f\left(\frac{t_i}{2}\right)\right]\end{aligned}\right\} \tag{14-165}$$

化简整理，得

$$A\sum_{i=1}^{N}\left[1-f\left(\frac{t_i}{2}\right)\right]^2+B\sum_{i=1}^{N}\sqrt{t_i}\left[1-f\left(\frac{t_i}{2}\right)\right]^2=\sum_{i=1}^{N}\eta_i\left[1-f\left(\frac{t_i}{2}\right)\right] \tag{14-166}$$



$$A\sum_{i=1}^{N}\sqrt{t_i}\left[1-f\left(\frac{t_i}{2}\right)\right]^2+B\sum_{i=1}^{N}t_i\left[1-f\left(\frac{t_i}{2}\right)\right]^2=$$

$$\sum_{i=1}^{N}\eta_i\sqrt{t_i}\left[1-f\left(\frac{t_i}{2}\right)\right] \tag{14-167}$$

通过求解方程组式（14－166）与式（14－167），即可求得式（14－157）中的 A 与 B。

进一步，选取不同的 r_K 值分别进行拟合，把拟合误差 $\psi(A,B)$ 作为优化目标，对 r_K 进行优化，最终优化所得到的 r_K 值以及在此 r_K 值下通过最小二乘方法获得的 A 与 B 即为所求。

14.3.5 举　例

以 TC4 钛合金板材和 LY12CZ 铝合金板材[14.1]为例来验证上述求解裂纹扩展阻力曲线的方法。具体的试验条件如下：试验环境是实验室空气，试样类型是 C(T)，取样方向为 L－T。选用的试样如图 13－14 所示。

1. 铝合金 LY12CZ

参考文献[14.1]提供了四种厚度的板，分别是 2 mm，4 mm，6 mm和 10 mm。下面分别按照式（14－157）通过两种待定函数方法来拟合 $\eta \sim t$ 曲线。针对每一种方法，具体采用三种拟合方案，以下分别进行讨论。

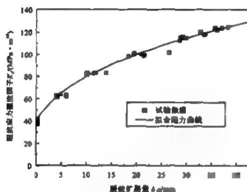
（1）双待定函数法

首先根据式（14－157）拟合裂纹扩展阻力曲线，得到一组相关的 $\eta \sim t$ 数据，如表 14－18 所列。所拟合的裂纹扩展阻力曲线如图 14－13 所示。

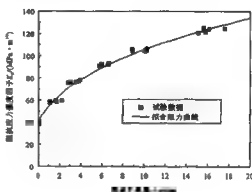


表 14-18　采用双待定函数法时 LY12CZ 各厚度板的 η 值($m=2.769\ 08$)

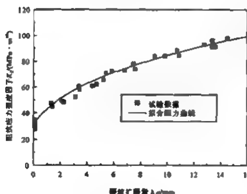
t/mm	η/mm^{-1}
2	0.612 4
4	1.441 4
6	1.522 3
10	1.842 4



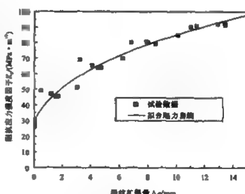
(a) 板厚为2 mm



(b) 板厚为4 mm



(c) 板厚为6 mm



(d) 板厚为10 mm

图 14-13　LY12CZ 铝合金双待定函数法拟合阻力曲线

1) 三点直接拟合方案

拟合时选用 2 mm,4 mm 和 10 mm 厚度板对应的 η 值作为拟合数据,6 mm 厚度板作为验证厚度。拟合结果如图 14－14 所示。

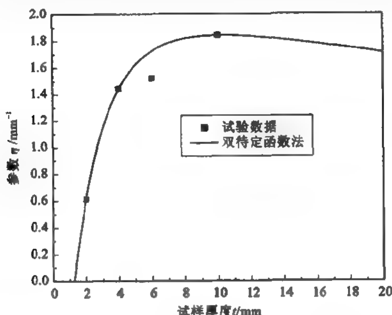


图 14－14 LY12CZ 铝合金 η 曲线(三点拟合)

$\eta(t)$函数具有如下形式:

$$\eta(t) = (-2.649\,24 + 2.362\,29\sqrt{t})\left[1 - f\left(\frac{t}{2}\right)\right] \tag{14-168}$$

式中,$r_K = 0.586$ mm。

根据式(14－168),可以求解出 $t=6$ mm 时所对应的 η 值(η=1.724 1),代入式(14－153)即可得到裂纹扩展阻力曲线。

图 14－15 显示了计算所得 $t=6$ mm 厚度板所对应的阻力曲线。

2) 四点最小二乘拟合方案

选用全部四种试样厚度进行拟合。拟合误差如表 14－19 所列,拟合结果如图 14－16 所示。



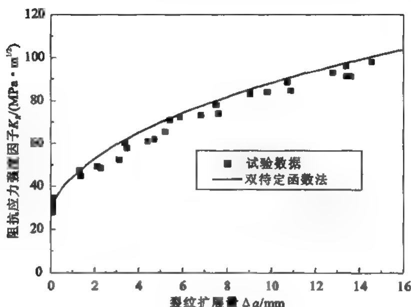


图 14-15 LY12CZ 铝合金 t=6 mm 计算裂纹扩展阻力曲线(三点拟合)

表 14-19 LY12CZ 各厚度板 η 拟合误差(四点拟合)

t/mm	η的计算值/mm^{-1}	η相对误差/(%)
2	0.612 4	0.004
4	1.377 5	4.430
6	1.651 8	8.510
10	1.771 3	3.860

$\eta(t)$函数具有如下形式：

$$\eta(t)=(-2.252\,44+2.072\,17\sqrt{t})\left[1-f\left(\frac{t}{2}\right)\right] \tag{14-169}$$

式中，r_K=0.647 mm。

各厚度板对应的计算裂纹扩展阻力曲线如图 14-17 所示。

3) 分段曲线拟合方案

针对薄板情况，采用前三种小厚度试样情况下的 η 值进行拟

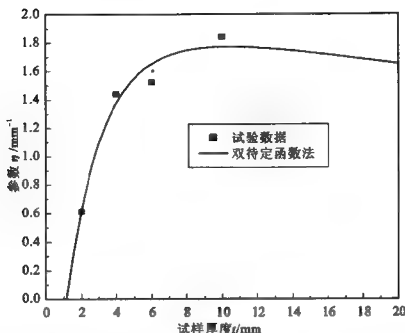


图 14-16　LY12CZ 铝合金 η 曲线(四点拟合)

合;针对厚板情况,在与薄板使用相同 r_K 的情况下,采用后两种大厚度试样的 η 值进行拟合,拟合结果见表 14-20。

表 14-20　LY12CZ 采用双待定函数法时的拟合结果

试　样	r_K/mm	κ/mm^{-1}	A/mm^{-1}	B/mm$^{-3/2}$
薄板 1	0.001	605.378	$A_1=-1\ 132.23$	$B_1=902.951$
厚板 2	0.001	605.378	$A_2=-2\ 677.020$	$B_2=1\ 531.290$

$\eta(t)$使用两段函数表示:

$$\eta_1=(A_1+B_1\sqrt{t})\left[1-f\left(\frac{t}{2}\right)\right]\qquad(0<t\leqslant t^*)\tag{14-170}$$

$$\eta_2=(A_2+B_2\sqrt{t})\left[1-f\left(\frac{t}{2}\right)\right]\qquad(t^*\leqslant t<\infty)\tag{14-171}$$



(a) 板厚为2 mm

(b) 板厚为4 mm

(c) 板厚为6 mm

(d) 板厚为10 mm

图 14－17 LY12CZ 铝合金计算裂纹扩展阻力曲线(四点拟合)

式中,$t^*=6$ mm。$\eta(t)$曲线如图 14－18 所示。

此拟合方案精确满足上述四种试样厚度所对应的数据,因此无须进行裂纹扩展阻力曲线验证。这样,由式(14－157)可计算任意试样厚度对应的 η 值,并根据式(14－154)计算该厚度对应的 K_C 值,从而可以方便地给出一组计算所得的不同厚度下对应的裂纹扩展阻力曲线。图 14－19 表示薄板情况的裂纹扩展阻力曲线族,$\eta(t)$对应于图 14－18 中曲线 1;图 14－20 表示厚板情况的裂纹扩展阻力曲线族,$\eta(t)$对应于图 14－18 中曲线 2。

对比以上三种拟合方案,"三点直接拟合"的结果通过试验验证基本满足工程需要;"四点直接拟合"所得阻力曲线完全处在试



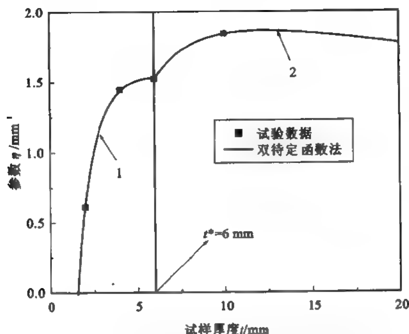


图 14－18　LY12CZ 铝合金双待定函数法 η 曲线

验数据带内，可以较好地应用于工程之中；“分段曲线拟合”则完全符合试验结果，具有较高的精度。

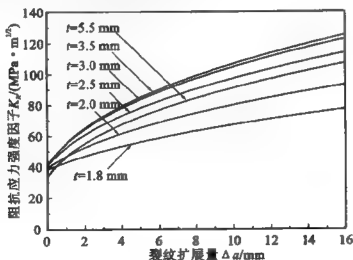


图 14－19　LY12CZ 铝合金薄板裂纹扩展阻力曲线族(双待定函数法)



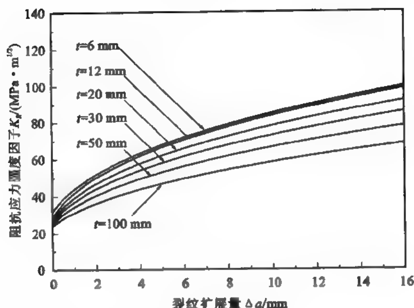


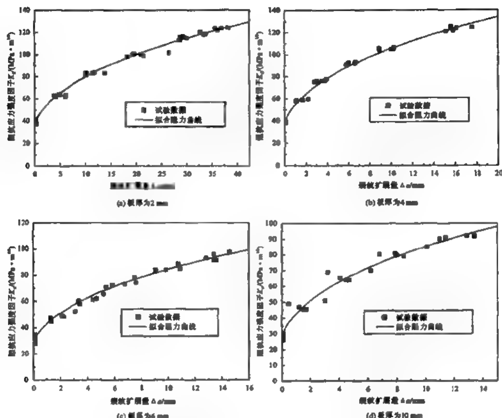
图 14-20 LY12CZ 铝合金厚板裂纹扩展阻力曲线族(双待定函数法)

(2) 三待定函数法

首先根据式(14-157)拟合裂纹扩展阻力曲线，得到一组相关的 $\eta \sim t$ 数据，如表 14-21 所列。拟合裂纹扩展阻力曲线如图 14-21所示。

表 14-21 采用三待定函数法时 LY12CZ 各厚度板的 η 值(m=2.769 05)

t/mm	η/mm^{-1}
2	0.612 4
4	1.441 5
6	1.521 8
10	1.842 9



(a) 板厚为2 mm　(b) 板厚为4 mm　(c) 板厚为6 mm　(d) 板厚为10 mm

图 14-21　LY12CZ 铝合金三特定函数法拟合裂纹扩展阻力曲线

1) 三点直接拟合方案

拟合时选用 2 mm,4 mm 和 10 mm 厚度板对应的 η 值作为拟合数据,6 mm 厚度作为验证厚度。拟合结果如图 14-22 所示。

$\eta(t)$ 函数具有如下形式:

$$\eta(t) = (-3.225\,86 + 2.805\,7\sqrt{t})\left[1 - f\left(\frac{t}{2}\right)\right] \tag{14-172}$$

式中,$r_K = 0.304$ mm。

根据式(14-172),可以求解出 $t=6$ mm 时对应的 η 值($\eta = 1.717\,2$),代入式(14-153)即可得到裂纹扩展阻力曲线。

图 14-23 显示了计算所得 $t=6$ mm 厚度所对应的裂纹扩展



阻力曲线。

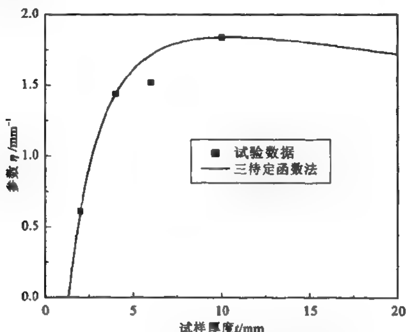


图 14-22　LY12CZ 铝合金 η 曲线(三点拟合)

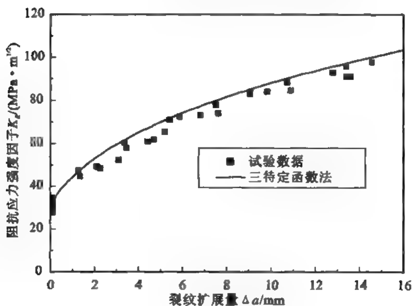


图 14-23　LY12CZ 铝合金 $t=6$ mm 计算裂纹扩展阻力曲线(三点拟合)

2) 四点最小二乘拟合方案

选用所有四种试样厚度进行拟合。拟合误差如表 14－22 所列，拟合结果如图 14－24 所示。

表 14－22　LY12CZ 各厚度板 η 拟合误差(四点拟合)

t/mm	η的计算值/mm^{-1}	η相对误差/(%)
2	0.612 5	0.02
4	1.381 2	4.18
6	1.646 1	8.16
10	1.774 6	3.71

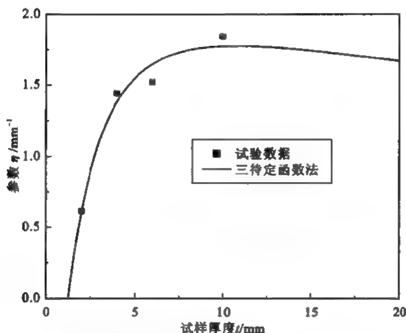


图 14－24　LY12CZ 铝合金 η 曲线(四点拟合)

$\eta(t)$函数具有如下形式：

$$\eta(t) = (-2.727\,71 + 2.435\,42\sqrt{t})\left[1 - f\left(\frac{t}{2}\right)\right] \tag{14-173}$$



式中，$r_K = 0.342$ mm。

各厚度板对应的计算裂纹扩展阻力曲线如图 14－25 所示。

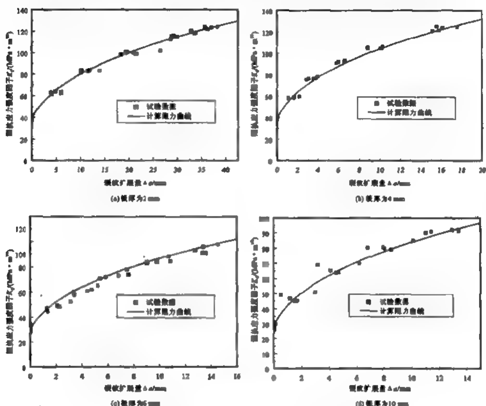


图 14－25 LY12CZ 铝合金计算裂纹扩展阻力曲线(四点拟合)

3) 分段曲线拟合方案

针对薄板情况，采用前三种小厚度试样情况下的 η 值进行拟合；针对厚板情况，在与薄板使用相同 r_K 的情况下，采用后两种试样厚度的 η 值进行拟合，拟合结果见表 14－23。

表 14－23 采用三待定函数法时 LY12CZ 板的拟合结果

试 样	r_K/mm	κ_1/mm^{-1}	κ_2/mm^{-1}	A/mm^{-1}	B/mm$^{-3/2}$
薄板 1	0.001	1 400.47	566.204	$A_1 = -689.051$	$B_1 = 549.663$
厚板 2	0.001	1 400.47	566.204	$A_2 = -1\ 630.900$	$B_2 = 932.684$



$\eta(t)$使用两段函数表示，即

$$\eta_1 = (A_1 + B_1\sqrt{t})\left[1 - f\left(\frac{t}{2}\right)\right] \quad (0 < t \leqslant t^*) \tag{14-174}$$

$$\eta_2 = (A_2 + B_2\sqrt{t})\left[1 - f\left(\frac{t}{2}\right)\right] \quad (t^* \leqslant t < \infty) \tag{14-175}$$

式中，$t^* = 6$ mm。$\eta(t)$曲线如图 14－26 所示。

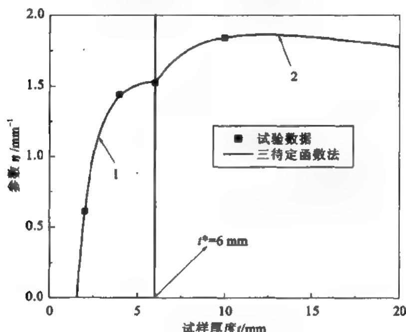


图 14－26　LY12CZ 铝合金三待定函数法 η 曲线

此拟合方案精确满足上述四种试验厚度情况，因此无须进行阻力曲线验证。这样，由式(14－157)可计算任意试样厚度对应的 η 值，并由式(14－154)计算该厚度对应的 K_C 值，从而即可方便地给出一组计算所得不同厚度下对应的裂纹扩展阻力曲线。图 14－27表示薄板情况的裂纹扩展阻力曲线族，$\eta(t)$ 对应于图 14－26中曲线 1；图 14－28 表示厚板情况的裂纹扩展阻力曲线族，$\eta(t)$对应于图 14－26 中曲线 2。



对比以上三种拟合方案，可以看出，“三点直接拟合”通过试验验证基本满足工程需要；“四点直接拟合”所得阻力曲线完全处在试验数据带内，可以较好地应用于工程之中；“分段曲线拟合”则完全符合试验结果，具有较高的精度。

比较三待定函数法与双待定函数法的计算结果，可以发现二者之间的差别较小，因此，具体应用时可以考虑选择较为简便的双待定函数法。

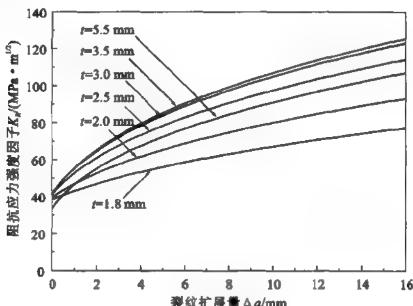


图 14-27 LY12CZ 铝合金薄板裂纹扩展阻力曲线族(三待定函数法)

2. 钛合金 TC4

参考文献[14.1]提供了四种厚度的板，分别是 2 mm，5 mm，10 mm 和 15 mm。下面分别按照式(14-157)通过两种待定函数方法采用分段拟合方案来拟合 $\eta\sim t$ 曲线。

(1) 双待定函数法

首先根据式(14-157)拟合裂纹扩展阻力曲线，得到一组相关的 $\eta\sim t$ 数据，如表 14-24 所列。所拟合的裂纹扩展阻力曲线如图 14-29 所示。



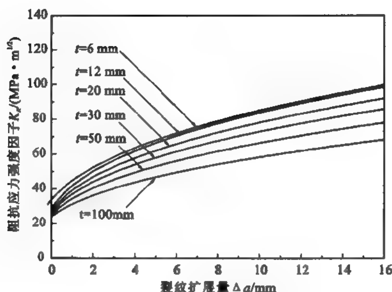


图 14-28　LY12CZ 铝合金厚板裂纹扩展阻力曲线族(三待定函数法)

表 14-24　采用双待定函数法时 TC4
各厚度板的 η 值(m=2.029 16)

t/mm	η/mm^{-1}
2	1.253 8
5	1.270 1
10	1.254 4
15	0.388 5

针对薄板情况，采用前三种小厚度试样情况下的 η 值进行拟合；针对厚板情况，在与薄板使用相同 r_K 的情况下，采用后两种大厚度试样的 η 值进行拟合，拟合结果见表 14-25。



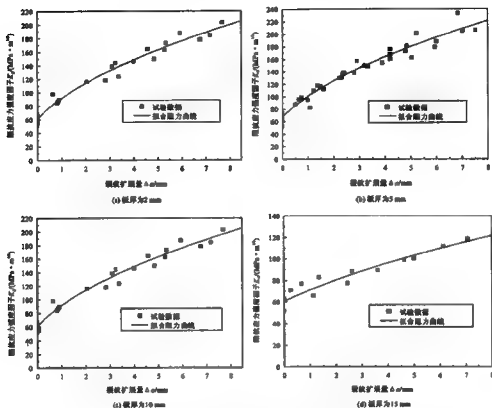


图 14-29　TC4 钛合金双待定函数法拟合裂纹扩展阻力曲线

表 14-25　TC4 采用双待定函数法时的拟合结果

试　样	r_K/mm	κ/mm^{-1}	A/mm^{-1}	B/mm$^{-3/2}$
薄板 1	4.562	0.124 1	$A_1=1.203\ 0$	$B_1=0.037\ 9$
厚板 2	4.562	0.124 1	$A_2=5.274\ 3$	$B_2=-1.249\ 5$

$\eta(t)$使用三段函数表示，即

$$\eta_1=(A_1+B_1\sqrt{t})\left[1-f\left(\frac{t}{2}\right)\right]\qquad(0<t\leqslant t^*)\tag{14-176}$$

$$\eta_2=(A_2+B_2\sqrt{t})\left[1-f\left(\frac{t}{2}\right)\right]\qquad(t^*\leqslant t\leqslant t^{\Delta})\tag{14-177}$$



$$\eta_3 = 0 \qquad (t^{\Delta} \leqslant t < \infty) \qquad (14-178)$$

式中，$t^{*}=10$ mm，$t^{\Delta}=17.8$ mm。η_1 适用于薄板情况，η_2 适用于中等厚度板情况，η_3 适用于厚板情况，此时板完全处于平面应变状态。$\eta(t)$ 曲线如图 14－30 所示。

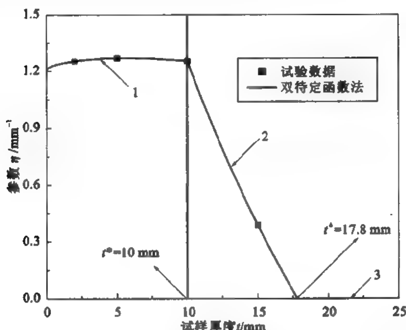


图 14－30　TC4 钛合金双待定函数法 η 曲线

本拟合策略精确满足上述四种试验厚度，因此无须进行裂纹扩展阻力曲线验证。这样，由式(14－157)可计算任意试样厚度对应的 η 值，由式(14－154)可计算该厚度对应的 K_C 值，从而可以方便地给出一组计算所得不同厚度下对应的裂纹扩展阻力曲线。图 14－31 表示薄板情况的裂纹扩展阻力曲线族，$\eta(t)$ 对应于图 14－30中曲线 1；图 14－32 表示厚板情况的裂纹扩展阻力曲线族，$\eta(t)$对应于图 14－30 中曲线 2。

(2) 三待定函数法

首先根据式(14－157)拟合裂纹扩展阻力曲线，得到一组相关的 $\eta \sim t$ 数据，如表 14－26 所列。拟合裂纹扩展阻力曲线如



图 14-33所示。

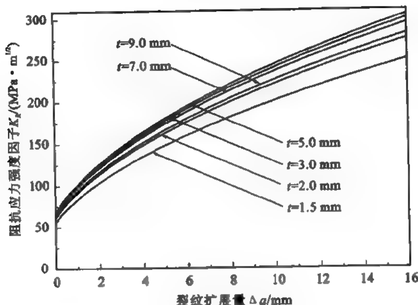


图 14-31 TC4 钛合金薄板裂纹扩展阻力曲线族(双待定函数法)

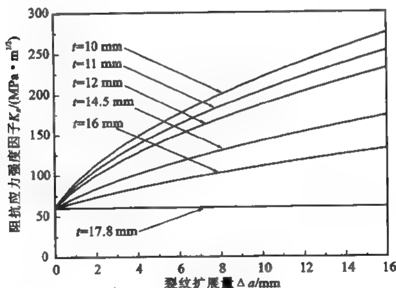
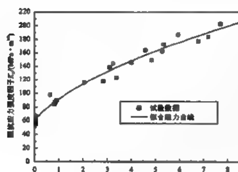


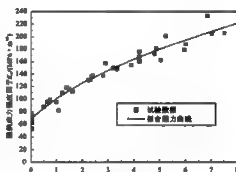
图 14-32 TC4 钛合金厚板裂纹扩展阻力曲线族(双待定函数法)

表 14-26　采用三待定函数法时 TC4 各厚度板的 η 值(m=2.028 94)

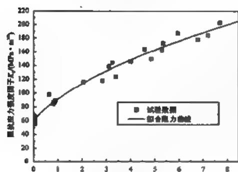
t/mm	η/mm^{-1}
2	1.253 4
5	1.269 9
10	1.254 1
15	0.388 4



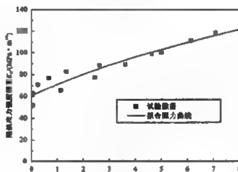
(a) 板厚为2 mm



(b) 板厚为5 mm



(c) 板厚为10 mm



(d) 板厚为15 mm

图 14-33　TC4 钛合金三待定函数法拟合裂纹扩展阻力曲线



针对薄板情况，采用前三种小厚度试样情况下的 η 值进行拟合；针对厚板情况，在与薄板使用相同 r_K 的情况下，采用后两种大厚度试样的 η 值进行拟合，拟合结果见表 14-27。

表 14-27 采用三待定函数法时 TC4 板的拟合结果

试 样	r_K/mm	κ_1/mm^{-1}	κ_2/mm^{-1}	A/mm^{-1}	B/mm$^{-3/2}$
薄板 1	3.38	0.372 7	0.156 7	A_1=1.203 0	B_1=0.037 5
厚板 2	3.38	0.372 7	0.156 7	A_2=5.267 0	B_2=−1.247 6

$\eta(t)$使用三段函数表示：

$$\eta_1 = (A_1 + B_1\sqrt{t})\left[1 - f\left(\frac{t}{2}\right)\right] \qquad (0 < t \leqslant t^*) \tag{14-179}$$

$$\eta_2 = (A_2 + B_2\sqrt{t})\left[1 - f\left(\frac{t}{2}\right)\right] \qquad (t^* \leqslant t < t^\Delta) \tag{14-180}$$

$$\eta_3 = 0 \qquad (t^\Delta \leqslant t < \infty) \tag{14-181}$$

式中，t^*=10 mm，t^Δ=17.82 mm。η_1 适用于薄板情况，η_2 适用于中等厚度板情况，η_3 适用于厚板情况，此时板完全处于平面应变状态。$\eta(t)$曲线如图 14-34 所示。

此拟合方案精确满足上述四种试验厚度，因此无须进行裂纹扩展阻力曲线验证。这样，由式(14-157)可计算出任意试样厚度对应的 η 值，并由式(14-154)计算该厚度对应的 K_C 值，从而可以方便地给出一组计算所得不同厚度下对应的裂纹扩展阻力曲线。图 14-35 表示薄板情况的裂纹扩展阻力曲线族，$\eta(t)$对应于图 14-34 中曲线 1；图 14-36 表示厚板情况的裂纹扩展阻力曲线族，$\eta(t)$对应于图 14-34 中曲线 2。



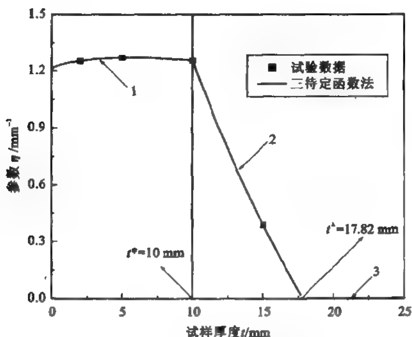


图 14－34　TC4 钛合金三待定函数法 η 曲线

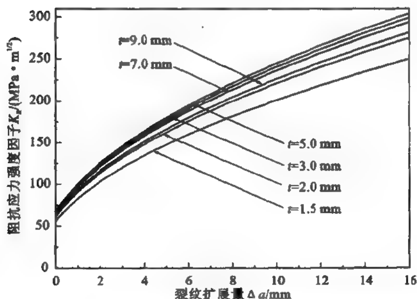


图 14－35　TC4 钛合金薄板裂纹扩展阻力曲线族（三待定函数法）



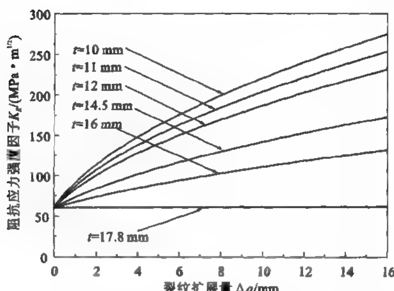


图 14-36 TC4钛合金厚板裂纹扩展阻力曲线族(三待定函数法)

14.3.6 结 论

本节在理论上对于裂纹扩展阻力曲线与试样厚度的关系进行了研究,采用双待定函数法和三待定函数法分别计算两种试验材料的裂纹扩展阻力曲线,取得了令人满意的计算结果。另一方面,通过本节的研究工作也对前面所述的厚度效应理论进行了更为广泛的验证。

参考文献

[14.1] 吴学仁主编.飞机结构金属材料力学性能手册.第2卷.北京:航空工业出版社,1996.

[14.2] 杨继运,张行.裂纹扩展阻力曲线与剩余强度关系的理论研究.机械强度学报,2003,25(3):334-339.

[14.3] TIMOFEEV B T, BLUMIN A A, Anikovsky V V. Fracture Toughness of Low Carbon Steels and Their Weldments. Int. J. of



Pressure Vessels and Piping, 1998, 75:945-950.

[14.4] PUTATUNDA S K. Fracture Toughness of High Carbon and High Silicon Steel. Materials Science and Engineering, 2001, A297: 31-43.

[14.5] TÄHTINEN S, LAUKKANEN A, SINGH B N. Damage Mechanisms and Fracture Toughness of GlidCop® CuAl25 IG0 Copper Alloy. J. of Nuclear Materials, 2000, 283-287: 1028-1032.

[14.6] NAGAL G, BLAUEL J G. Evaluation of the Standard Master Curve for Fracture Toughness Determination. Nuclear Engineering and Design, 1999, 190: 159-169.

[14.7] LAMBRIGGER M. Master Curve for Brittle Cleavage Fracture Toughness Testing. Engineering Fracture Mechanics, 1996, 55 (4): 677-678.

[14.8] LIEBOWITZ H. Fracture. Volume Ⅱ Mathematical Fundamentals. New York and London: Academic Press, 1968.

[14.9] BROEK D. Artificial Slow Crack Growth under Constant Stress—The R Curve Concept in Plane Stress. Engineering Fracture Mechanics, 1973, 5: 45-53.

[14.10] YAN CHENG, MAI YIUWING. Numerical investigation on Stable Crack Growth in Plane Stress. International Journal of Fracture, 1998, 91: 117-130.

[14.11] FETT T, et al. Influence of Specimen Geometry and Relative Crack Size on the R-curve. Engineering Fracture Mechanics, 2000, 66: 375-386.

[14.12] ZHAO J, ZHANG X. On the Process Zone of a Quasi-Static Growing Tensile Crack with Power-Law Elastic-Plastic Damage. International Journal of Fracture, 2001, 108: 383-395.

[14.13] 杨继运,张行.材料断裂韧度与试样厚度关系研究.机械强度学报,2003,25(1):076-080.

[14.14] 杨继运,张行.含裂纹板断裂韧度厚度效应的理论研究(双待定函数法).机械强度学报,2005,27(1):672-680.

[14.15] 杨继运,张行.含裂纹板断裂韧度厚度效应的理论与应用研究(三待定函数法).机械工程学报,2005,41(11):32-42.

第15章 基于损伤力学的疲劳裂纹形成与扩展的统一研究

15.1 损伤演化方程、损伤演化参量与初始损伤效应

15.1.1 引　言

材料抗断裂性能有三个指标：断裂韧度、裂纹扩展阻力曲线与疲劳裂纹扩展速率。前两个指标是针对单调加载的，后一个指标是针对重复加载的。本章即进行有关第三个性能指标问题的研究。

从现代损伤力学观点看，疲劳裂纹形成与扩展无非是损伤演化过程的两个阶段。因此，原属疲劳理论范畴的疲劳裂纹形成问题与原属断裂力学范畴的疲劳裂纹扩展问题的研究就可以纳入损伤力学的理论框架之内。

损伤力学与固体力学已有其他分支不同之处在于除去引入位移、应变与应力场量外，还需引入损伤场量。损伤有各向同性和各向异性之分。对初始各向同性材料而言，在许多情况下，损伤度可以视为各向同性的，并以 D 表示。D 反映在重复加载过程中材料刚度 E 降低的比例。因此，D 必然存在于本构关系中。另外，由于损伤场量的出现，还需引入新一类支配方程，即损伤演化方程。



15.1.2 含损伤材料本构关系

对于无损伤线弹性材料，其应变可通过应力表示如下：

$$\varepsilon_{ij} = C_{ijkl}\sigma_{kl} \tag{15-1}$$

式中，C_{ijkl} 为无损情况下线弹性材料的柔度张量。对各向同性材料，有

$$C_{ijkl} = -\frac{\nu}{E}\delta_{ij}\delta_{kl} + \left(\frac{1+\nu}{2E}\right)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{15-2}$$

式中，E 为材料的杨氏弹性模量；ν 为材料的泊松比，δ_{ij} 为克罗内克符号，其含义为

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \tag{15-3}$$

利用应变等价原理(strain equivalence principle)[15.1]，可以获得材料有损伤时的应变分量如下：

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{1-D}C_{ijkl}\sigma_{kl} \tag{15-4}$$

式中，D 为材料的损伤度，反映材料的刚度下降比例，其变化范围是[0,1]。

对于等温过程，比自由能即比应变能，可表示为

$$g = \frac{1}{2\rho}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \tag{15-5}$$

式中，ρ 为材料的质量密度。

将式(15-4)代入式(15-5)，有

$$g = \frac{1}{2\rho}\frac{1}{1-D}C_{ijkl}\sigma_{kl}\sigma_{ij} \tag{15-6}$$

若定义损伤驱动力

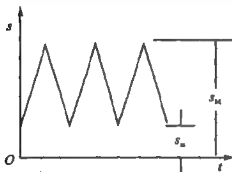
$$Y = -\rho\frac{\partial g}{\partial D} \tag{15-7}$$

将式(15-6)代入式(15-7)，则可得以应力表示的损伤驱动力如下：

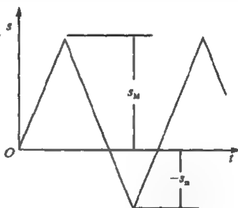


$$Y=\frac{1}{2}\frac{1}{(1-D)^2}C_{ijkl}\sigma_{kl}\sigma_{ij}=s^2\frac{1}{2}\frac{1}{(1-D)^2}C_{ijkl}\sigma_{kl}^{(0)}\sigma_{ij}^{(0)} \tag{15-8}$$

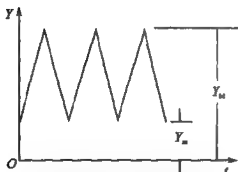
式中，$s=\sigma_{kl}/\sigma_{kl}^{(0)}=\sigma_{ij}/\sigma_{ij}^{(0)}$ 为比例变载中的广义应力，它是时间的周期函数，如图 15-1 的(a)与(b)所示；而 $\sigma_{kl}^{(0)}$ 与 $\sigma_{ij}^{(0)}$ 则为与时间无关的 $s=1$ 时的应力分量。在图 15-1 的(a)与(b)中，s_M 与 s_m 分别表示一个加载周期中 s 的最大与最小值。与图 15-1 的(a)和(b)中所示广义应力 s 的周期变化相对应的损伤驱动力 Y 的周期变化分别示于图 15-1 的(c)与(d)，其中，Y_M 与 Y_m 分别对应



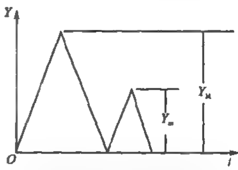
(a) 广义应力s的周期变化($s_m>0$)



(b) 广义应力s的周期变化($s_m<0$)



(c) 损伤驱动力Y的周期变化($s_m>0$)



(d) 损伤驱动力Y的周期变化($s_m<0$)

图 15-1 广义应力与损伤驱动力的周期变化



着 s_M 与 s_m。由式(15-8),显而易见,无论 s_m 为正或是为负,Y 总是取正值。

为了反映重复加载的特点,引入循环特征 R_Y 如下。

(1) 在 $s_m>0$ 的情况下

$$R_Y=\frac{s_m}{s_M}=\sqrt{\frac{Y_m}{Y_M}} \tag{15-9}$$

(2) 在 $s_m<0$ 的情况下

$$R_Y=\frac{s_m}{s_M}=-\sqrt{\frac{Y_m}{Y_M}} \tag{15-10}$$

定义 Y_{eq} 为反映循环特性的当量损伤驱动力。其表达式如下:

$$Y_{eq}=(1-R_Y)^q Y \tag{15-11}$$

式中,q 为材料常数;Y_{eq} 为与非脉动循环($R_Y\neq 0$)损伤驱动力 Y 等效的脉动循环($R_Y=0$)损伤驱动力。

15.1.3 损伤演化方程

一个加载循环内的损伤增量即损伤演化率可采用如下形式表示[15.2]:

$$\frac{dD}{dN}=\begin{cases}\dfrac{\alpha}{p+1}[\max(Y_{eq,M}^{p+1},Y_{th}^{p+1})-\max(Y_{eq,m}^{p+1},Y_{th}^{p+1})]\\ \dfrac{\alpha}{p+1}[\max(Y_{eq,M}^{p+1},Y_{th}^{p+1})+\max(Y_{eq,m}^{p+1}Y_{th}^{p+1})-2Y_{th}^{p+1}]\end{cases} \tag{15-12}$$

式中,α 和 p 是损伤参数,且

$$Y_{eq,M}=(1-R_Y)^q Y_M$$

$$Y_{eq,m}=(1-R_Y)^q Y_m$$

在单轴加载情况下,损伤驱动力为



$$\left.\begin{aligned} Y_M &= \frac{1}{2}\frac{1}{(1-D)^2}\frac{\sigma_{max}^2}{E} \\ Y_m &= \frac{1}{2}\frac{1}{(1-D)^2}\frac{\sigma_{min}^2}{E} \end{aligned}\right\} \tag{15-13}$$

相应的损伤驱动力门槛值 Y_{th} 有如下形式：

$$Y_{th} = \frac{1}{2}\frac{1}{(1-D)^2}\frac{\sigma_{th}^2}{E} \tag{15-14}$$

式中，σ_{th} 为相应的应力门槛值。

通过式(15－13)，循环特征参数 R_Y 可被表示为

$$R_Y = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{Y_m}{Y_M}} = \dfrac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} & (\sigma_{min} > 0) \\ -\sqrt{\dfrac{Y_m}{Y_M}} = \dfrac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} & (\sigma_{min} < 0) \end{cases} \tag{15-15}$$

可以看出，在单向加载时，R_Y 等于应力比 R。

将式(15－13)代入式(15－11)，可得单轴加载下的当量损伤驱动力

$$\left.\begin{aligned} Y_{eq,M} &= (1-R_Y)^q Y_M = \frac{(1-R)^q}{2E}\frac{1}{(1-D)^2}\sigma_{max}^2 \\ Y_{eq,m} &= (1-R_Y)^q Y_m = \frac{(1-R)^q}{2E}\frac{1}{(1-D)^2}\sigma_{min}^2 \end{aligned}\right\} \tag{15-16}$$

考虑单轴加载时损伤驱动力门槛值大于最小当量损伤驱动力的一般情形，即 $Y_{eq,th} > Y_{eq,m}$，式(15－12)转化为

$$\frac{dD}{dN} = \frac{\alpha}{p+1}(Y_{eq,M}^{p+1} - Y_{th}^{p+1}) \tag{15-17}$$

将式(15－14)与式(15－16)代入式(15－17)，可得单轴加载下的损伤演化方程为

$$\frac{dD}{dN} = \frac{\alpha}{p+1}\left(\frac{1}{2E}\right)^{p+1}\frac{1}{(1-D)^{2p-2}}[(1-R)^{q(p+1)}\sigma_{max}^{2p+2} - \sigma_{th}^{2p-2}] \tag{15-18}$$



应当指出，Y_{th}与σ_{th}分别表示脉动循环下损伤驱动力与应力的门槛值。

15.1.4 理论疲劳曲线

应力门槛值可以表示为如下形式：

$$\sigma_{th} = \sigma_{th0}(1-D)^{0.5+\beta} \tag{15-19}$$

式中，σ_{th0}为无初始损伤情况对应的应力门槛值；β为材料的损伤参数。

假设试件的初始损伤为D_0，在$[D_0,1]$上积分式(15-18)，有

$$\int_{D_0}^{1}(1-D)^{2p+2}\mathrm{d}D = \frac{\alpha}{p+1}\left(\frac{1}{2E}\right)^{p+1}[(1-R)^{\sigma(p+1)}\sigma_{max}^{2p+2} - \sigma_{th}^{2p+2}]N_f \tag{15-20}$$

式中，N_f为试件从初始损伤D_0到完全损伤情形所需的循环次数。

对于无应力集中的试件，在脉动循环情况下，整理式(15-20)，有

$$(\sigma_{max}^{2p+2} - \sigma_{th}^{2p+2})N_f = K \tag{15-21}$$

式中

$$K = \frac{p+1}{2p+3}\frac{(2E)^{p+1}(1-D_0)^{2P+3}}{\alpha} \tag{15-22}$$

进一步，相应的理论中值疲劳曲线可以采用下式来表示，即

$$(\sigma_{max}^{2p+2} - \sigma_{thm}^{2p+2})N_{fm} = K_m \tag{15-23}$$

式中

$$K_m = \frac{p+1}{2p+3}\frac{(2E)^{p+1}(1-D_{0m})^{2p+3}}{\alpha} \tag{15-24}$$

$$\sigma_{thm} = \sigma_{th0}(1-D_{0m})^{0.5+\beta} \tag{15-25}$$

式中，σ_{thm}为中值疲劳曲线对应的应力门槛值；D_{0m}为中值疲劳曲线对应的初始损伤大小。

当$D_0=0$时，σ_{th}等于无初始损伤情况所对应的应力门槛值



σ_{th0}，此时疲劳曲线为理论理想疲劳曲线，其表达式为

$$(\sigma_{max}^{2p+2}-\sigma_{th0}^{2p+2})N_{f0}=K_0 \tag{15-26}$$

式中

$$K_0=\frac{p+1}{2p+3}\frac{(2E)^{p+1}}{\alpha} \tag{15-27}$$

15.1.5 损伤参数确定

下面讨论上述公式中相关参数的确定。

首先，通过中值疲劳曲线确定参数。根据一组中值疲劳试验数据(σ_{maxi}，N_{fmi})，通过式(15-23)利用最小二乘方法可拟合损伤参数 p 和 K_m 的值。

对式(15-23)等号两边分别取对数，有

$$\log K_m=\log(\sigma_{max}^{2p+2}-\sigma_{thm}^{2p+2})+\log N_{fm} \tag{15-28}$$

即

$$\log N_{fm}=-\log(\sigma_{max}^{2p+2}-\sigma_{thm}^{2p+2})+\log K_m \tag{15-29}$$

令

$$\varphi(p,K_m)=\sum_{i=1}^{n}(\log N_{fmi}-\log N_{fmi}^{*})^2=\sum_{i=1}^{n}[\log N_{fmi}+\log(\sigma_{maxi}^{2p+2}-\sigma_{thm}^{2p+2})-\log K_m]^2 \tag{15-30}$$

假定参数 p 是一个确定的常数，则可通过以下最小二乘法得到参数 K_m 的值。将 $\log K_m$ 视为可调节的变量，则 φ 的极小值条件为

$$-2\sum_{i=1}^{n}[\log N_{fmi}+\log(\sigma_{maxi}^{2p+2}-\sigma_{thm}^{2p+2})-\log K_m]=0 \tag{15-31}$$

即

$$\log K_m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[\log N_{fmi} + \log(\sigma_{maxi}^{2p+2} - \sigma_{thm}^{2p+2})] \tag{15-32}$$

必须指出，在上述公式的推导过程中，假设 p 是已知常数，随着 p 值的不同，拟合所得到的 K_m 值是不同的，拟合误差 $\varphi(p, K_m)$ 的大小也会有所不同。

将式(15-32)代入式(15-30)，可知

$$\varphi(p) = \sum_{i=1}^{n}\Big\{\log N_{fmi} + \log(\sigma_{maxi}^{2p+2} - \sigma_{thm}^{2p+2}) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[\log N_{fmi} + \log(\sigma_{maxi}^{2p+2} - \sigma_{thm}^{2p+2})]\Big\}^2 \tag{15-33}$$

这样，拟合误差 $\varphi(p)$ 将随着 p 值的变化而改变。因此，如果以拟合误差 $\varphi(p)$ 最小为优化目标，对 p 值进行优化，就可以得到使拟合误差 $\varphi(p)$ 最小的 p 值。

其次，若疲劳试验数据中距中值疲劳曲线的最远点为 $(\sigma_{max}^*, N_{f0}^*)$，并假定此点对应于 $D_0=0$，故由式(15-26)可得

$$[(\sigma_{max}^*)^{2p+2} - \sigma_{th0}^{2p+2}]N_{f0}^* = K_0 \tag{15-34}$$

由式(15-24)和式(15-27)，可知

$$K_0 = \frac{K_m}{(1-D_{0m})^{2p+3}} \tag{15-35}$$

由式(15-25)，可得

$$\sigma_{th0} = \frac{\sigma_{thm}}{(1-D_{0m})^{0.5+\beta}} \tag{15-36}$$

将式(15-35)和式(15-36)代入式(15-34)，有

$$\left\{(\sigma_{max}^*)^{2p+2} - \left[\frac{\sigma_{thm}}{(1-D_{0m})^{0.5+\beta}}\right]^{2p+2}\right\}N_{f0}^* = \frac{K_m}{(1-D_{0m})^{2p+3}} \tag{15-37}$$



整理得

$$(\sigma_{\max}^{*})^{2p+2}(1-D_{0m})^{2p+3}-\sigma_{\text{thm}}^{2p+2}(1-D_{0m})^{p-2\beta p+2(1-\beta)}=\frac{K_m}{N_{f0}^{*}} \tag{15-38}$$

通过以上计算过程，在给定调节参数 β 的情况下，式(15-38)中只有参数 D_{0m} 是未知的。求解式(15-38)，可以得到对应中值疲劳曲线的初始损伤 D_{0m}。进一步将 D_{0m} 值代入式(15-35)和式(15-36)，可以确定 K_0 和 σ_{th0}。

最后，根据式(15-27)，可知

$$\alpha=\frac{p+1}{2p+3}\frac{(2E)^{p+1}}{K_0} \tag{15-39}$$

将 p 和 K_0 代入式(15-39)，可得到损伤演化参量 α。

15.1.6 算 例

参考文献[15.3]给出了铝合金板材 LY12CZ 的疲劳性能数据，以 $K_t=1$，$R=0.02$ 时的试验数据为例验证上述方法。

根据参考文献[15.3]中提供的试验数据得知，LY12CZ 板材的中值疲劳曲线所对应的应力门槛值 $\sigma_{\text{thm}}=127$ MPa，距中值疲劳曲线最远点的坐标选为(186，800 000)，取 $\beta=0.5$。

首先，根据所提供的试验数据点，利用式(15-28)至式(15-33)，通过最小二乘方法拟合参数 p 和 K_m，则

$$p=-0.0544,\qquad K_m=3.4289\times10^9$$

其次，将距中值疲劳曲线最远点的坐标值代入式(15-38)可解出 D_{0m}，即

$$D_{0m}=0.1459$$

通过式(15-35)和式(15-36)，可以求得

$$K_0=5.4098\times10^9$$

$$\sigma_{\text{th0}}=148.6955\ \text{MPa}$$

最后，将 K_0 值代入式(15－39)，得到损伤演化参量 α，即

$$\alpha = 4.460\ 5 \times 10^{-6}$$

对于损伤演化方程(15－18)而言，通过上述方法有关参数均可求得。

15.1.7 初始损伤分布与概率疲劳曲线

由式(15－19)、式(15－21)与式(15－22)可以看出，试件的疲劳裂纹形成寿命与初始损伤有关。众所周知，疲劳裂纹形成寿命实验数据具有很大的分散性。可以假定，疲劳寿命的分散性是由初始损伤的随机性造成的。这也就是说，可以根据以上三式将疲劳裂纹形成寿命看作是初始损伤度这一随机变量的确定函数，即将疲劳寿命的随机性纳入损伤力学的理论框架中进行研究。

下面引入初始损伤的概率分布函数。若 D_0 为随机变量，则其变化区间为[0,1]，而在概率论中常用随机变量 q 的区间为[0,∞]或[－∞,∞]，为此进行如下变量置换。令

$$q = -\lg (1 - D_0) \tag{15-40}$$

则以上要求可以得到满足

$$\left.\begin{aligned} D_0 = 0, \qquad q = 0 \\ D_0 = 1, \qquad q = \infty \end{aligned}\right\} \tag{15-41}$$

失效概率 F 与存活概率 G 可以视为具有如下形式：

$$\left.\begin{aligned} F(q) = \mathrm{e}^{-\kappa q} \\ G(q) = 1 - \mathrm{e}^{-\kappa q} \end{aligned}\right\} \tag{15-42}$$

此时

$$\left.\begin{aligned} q = 0, \qquad F = 1, \qquad G = 0 \\ q = \infty, \qquad F = 0, \qquad G = 1 \end{aligned}\right\} \tag{15-43}$$

F,G 与 q 的关系如图 15－2 所示。

针对式(15－42)中的失效概率 F，有

$$\lg F = -\kappa q \tag{15-44}$$



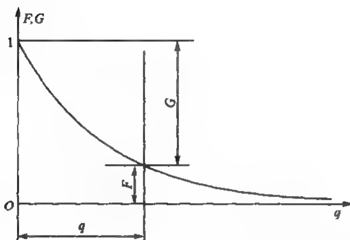


图 15-2 失效概率、存活概率与随机变量 q 的变化关系

即 $\lg F$ 与 q 成线性关系。

比较式(15-22)与式(15-27),有

$$K = K_0(1-D_0)^{2p+3} \tag{15-45}$$

将式(15-19)与式(15-45)代入式(15-21),可得

$$[\sigma_{\max}^{2p+2} - \sigma_{\mathrm{th0}}^{2p+2}(1-D_0)^{(0.5+\beta)(2p+2)}]N_f = K_0(1-D_0)^{2p+3} \tag{15-46}$$

在已知参数 β, p, K_0 和 σ_{th0} 的情况下,给定一个 D_0,即可由式(15-46)得到一条相应的疲劳曲线,利用疲劳实验数据可获知其对应的失效概率 F,然后由式(15-40)求出相应的 q 值。这样,通过给定不同的 D_0,即可获得一组 $F \sim q$ 值。最后,根据式(15-44)并采用最小二乘方法拟合得到该式中的 κ 值。

将式(15-40)代入式(15-44),并整理可得

$$F = (1-D_0)^{\kappa} \tag{15-47}$$

通过式(15-47),可以计算对应于每一个初始损伤 D_0 的疲劳曲线的失效概率。下面以 LY12CZ 为例,根据式(15-47),可将以初始损伤为参数的疲劳曲线式(15-46)改写为以失效概率为参数的疲劳曲线。



根据15.1.6节计算得到的LY12CZ的参数值，可以极为方便地获得铝合金板材与初始损伤相对应的失效概率，从而可拟合得到对应的$\kappa=10.5302$。根据式(15-47)，计算对应初始损伤的失效概率，结果如表15-1所列。

表15-1 初始损伤对应的计算失效概率

初始损伤 D_0	q	存活个数	计算失效概率 $F(p)/(\%)$
0	0	0	100
0.05	0.022	3	58.27
0.10	0.046	8	32.97
0.15	0.071	31	18.06
0.20	0.097	43	9.54
0.25	0.125	51	4.83
0.30	0.155	53	2.34

进一步可绘制LY12CZ的概率疲劳曲线，如图15-3所示。

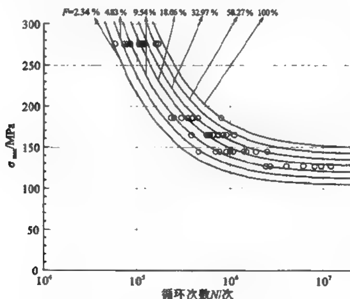


图15-3 由初始损伤确定的概率疲劳曲线族



15.1.8 结 论

本节通过损伤力学方法，在无应力集中的条件下，根据损伤演化方程，获得计及初始损伤的理论疲劳曲线。进一步通过相应的理论中值疲劳曲线以及理论理想疲劳曲线，根据有限的试验数据即可确定理论疲劳曲线中的参量，从而获取疲劳曲线计算公式。根据计算公式，可以方便地得到一组以初始损伤为参数的疲劳曲线族，并由此得到以失效概率为参数的疲劳曲线族，从而，大大降低所需的试验数据，并为结构抗疲劳设计和寿命估算提供必要的基础。

15.2 裂纹形成与扩展分析的损伤力学方法

15.2.1 引 言

在疲劳分析中，一般来说，构件的疲劳失效过程可以分为裂纹形成与裂纹扩展两个阶段。对于裂纹形成阶段，目前的分析方法主要建立在试验与统计相结合的基础上[15.4~15.6]；对于裂纹扩展阶段，则采用断裂力学的方法，通过试验，建立由应力强度因子或守恒积分控制的各种类型的裂纹扩展速率经验公式来进行分析[15.7,15.8]。因此，在现行的疲劳分析框架中，不论是在建模上还是在采集试验数据上，均将裂纹形成与裂纹扩展作为两个彼此独立的过程分别进行处理。实质上，从损伤力学的观点出发，两者同属于一个连续的疲劳失效过程[15.2,15.9]。

本节力图通过损伤力学的方法，把疲劳失效的两个阶段有机



地结合在一起。首先，使用裂纹形成阶段的 $S\sim N$ 曲线，拟合损伤演化方程中的材质参量；然后，利用损伤力学——有限元法绘制裂纹扩展阶段 $a\sim N$ 曲线；最后，与断裂力学所得结果作比较，证明本方法的可行性。

15.2.2 疲劳损伤耦合理论

疲劳损伤耦合理论包含如下的基本方程。

1. 平衡方程

小变形情况下，应力与体力的关系为

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + B_i = 0 \tag{15-48}$$

式中，σ_{ij} 为应力分量的变程；B_i 为体力分量的变程。

2. 几何方程

小变形情况下，位移与应变的关系为

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{15-49}$$

式中，u_i 为位移分量的变程；ε_{ij} 为应变分量的变程。

3. 本构关系

含损伤材料的应力与应变关系为

$$\sigma_{ij} = S_{ijkl}(1-D)\varepsilon_{kl} \tag{15-50}$$

式中，S_{ijkl} 为弹性常数；D 为损伤度，金属材料的损伤度可以看作是一个标量，取值范围为[0,1]。

4. 损伤演化方程

引入等效应力

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} \tag{15-51}$$

式中，s_{ij} 是应力偏量分量，其值为



$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{rs}\sigma_{rs} \tag{15-52}$$

根据式(15-18)与式(15-19)，在脉动循环情况下，损伤演化方程具有如下形式：

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}N} = \frac{\alpha}{p+1}\left(\frac{1}{2E}\right)^{p+1}\left(\frac{1}{1-D}\right)^{2p+2}\left[\sigma_{\mathrm{Me}}^{2p+2} - \sigma_{\mathrm{th0}}^{2p+2}(1-D)^{(0.5+\beta)(2p+2)}\right] \tag{15-53}$$

式中，N 为应力循环次数；σ_{Me} 为材料受到最大载荷时对应的等效应力；σ_{th0} 是无初始损伤情况对应的应力门槛值；E 为材料的杨氏弹性模量；β、α 和 p 是材料的损伤力学参数，可由材料的疲劳性能曲线确定。

5. 边界条件

静力的边界条件为

$$\sigma_{ij}l_j = p_i \quad (\text{在 } S_p \text{ 上}) \tag{15-54}$$

式中，p_i 为静力边界 S_p 上给定面力分量的变程；l_j 为静力边界外法线方向余弦。

位移的边界条件为

$$u_i = \bar{u}_i \quad (\text{在 } S_u \text{ 上}) \tag{15-55}$$

式中，$\bar{u}_i$ 是位移边界 S_u 上给定位移分量的变程（为简便起见，以下诸节中各力学量的“变程”二字予以省略）。

15.2.3 损伤力学——有限元法

在应用损伤力学方法解决疲劳裂纹扩展问题时，必然要涉及到两方面的问题：其一，在损伤场已知的情况下，构件应力场、位移场和应变场的分析；其二，在应力场与损伤场已知的情况下，损伤演化场的分析与裂纹扩展寿命的预估。下面对这两方面内容分别进行阐述，并推导出相应的有限元算法。

1. 给定损伤场时应力分析的原理

将式(15-50)展开，有

$$\sigma_{ij} = S_{ijkl}\varepsilon_{kl} - DS_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{15-56}$$

假设无损伤时体元应力为 σ_{ij}^0，即 $\sigma_{ij}^0 = S_{ijkl}\varepsilon_{kl}$。令 $\sigma_{ij}^D = -DS_{ijkl}\varepsilon_{kl}$，则式(15-56)可改写为

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^D \tag{15-57}$$

将式(15-57)代人平衡方程式(15-48)，有

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^0}{\partial x_j} + B_i + B_i^D = 0 \tag{15-58}$$

式中，B_i^D 为由于损伤引起的附加体力，其表达式为

$$B_i^D = \frac{\partial \sigma_{ij}^D}{\partial x_j} \tag{15-59}$$

将式(15-57)代人静力边界条件式(15-54)，有

$$\sigma_{ij}^0 l_j = p_i + p_i^D \qquad (\text{在 } S_p \text{ 上}) \tag{15-60}$$

式中，p_i^D 为由于损伤引起的附加面力，其表达式为

$$p_i^D = -\sigma_{ij}^D l_j \tag{15-61}$$

式(15-58)与式(15-60)表明，对于给定损伤场的应力分析问题，可以通过引入附加体力与附加面力，将问题转化为无损伤的情况加以解决。

2. 给定损伤场时应力分析的附加载荷有限元法

根据上述给定损伤场的应力分析原理，给出其相应的有限元解法——附加载荷有限元法。

对于选定的有限单元，由几何方程可将单元应变表示为

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\delta_e\} \tag{15-62}$$

式中，$\{\varepsilon\}$是单元应变列阵；$\{\delta_e\}$是单元节点位移列阵；$[B]$是单元几何矩阵。

单元应力可通过本构关系式(15-56)表示为

$$\{\sigma\} = [E][B]\{\delta_e\} + \{\sigma\}^D \tag{15-63}$$

式中，$\{\sigma\}$为单元应力列阵；$[E]$为材料的弹性矩阵；$\{\sigma\}^D$ 为由损伤



引起的单元附加应力列阵，即

$$\{\sigma\}^D = -D_e[E][B]\{\delta_e\} \quad (15-64)$$

式中，D_e 为单元的损伤度。

利用虚功原理，单元节点力可表示为

$$\{f_e\} = [K_e]\{\delta_e\} - \{f_e\}^D \quad (15-65)$$

式中，$\{f_e\}$为单元节点力列阵；$[K_e]$为单元的无损伤弹性刚度矩阵。对于损伤力学分析中所采用的常应变元，$[K_e]$的表达式为

$$[K_e] = V_e[B]^T[E][B] \quad (15-66)$$

式中，V_e 为单元体积。$\{f_e\}^D$ 为由损伤引起的单元附加节点力列阵，即

$$\{f_e\}^D = D_e[K_e]\{\delta_e\} \quad (15-67)$$

令$\{\delta\}$为总体位移列阵，则通过位移协调条件可以建立单元位移列阵与总体位移列阵的关系：

$$\{\delta_e\} = [A_e]\{\delta\} \quad (15-68)$$

式中，$[A_e]$为协调矩阵。

进一步，根据虚功原理可以得出总体外力的表达式

$$\{f\} = [K]\{\delta\} - \{f\}^D \quad (15-69)$$

式中，$\{f\}$为总体外力列阵；$[K]$为总体无损伤弹性刚度矩阵，其表达式为

$$[K] = \sum_e [A_e]^T[K_e][A_e] \quad (15-70)$$

$\{f\}^D$ 表示由损伤引起的总体附加外力列阵，即

$$\{f\}^D = (\sum_e D_e[A_e]^T[K_e][A_e])\{\delta\} \quad (15-71)$$

整理式(15-69)，有

$$[K]\{\delta\} = \{f\} + \{f\}^D \quad (15-72)$$

由此可见，给定损伤场的位移分析问题，在引入附加外力列阵 $\{f\}^D$ 后，可以转化为无损伤的位移分析问题。



3. 给定损伤场与应力场时的损伤演化分析以及裂纹形成与扩展寿命预估

假设临界单元 e_i 的损伤度及其增长量分别用 $D(e_i)$ 与 $\Delta D(e_i)$ 表示，某单元 x 的损伤度及其增长量分别用 $D(x)$ 与 $\Delta D(x)$ 表示，则根据式(15－53)，有

$$\Delta D(x)=\Delta D(e_i)\left[\frac{1-D(e_i)}{1-D(x)}\right]^{2p+2}\cdot \left\{\frac{\sigma_{\mathrm{Me}}(x)^{2p+2}-\sigma_{\mathrm{th0}}^{2p+2}\left[1-D(x)\right]^{(0.5+\beta)(2p+2)}}{\sigma_{\mathrm{Me}}(e_i)^{2p+2}-\sigma_{\mathrm{th0}}^{2p+2}\left[1-D(e_i)\right]^{(0.5+\beta)(2p+2)}}\right\} \tag{15-73}$$

若将 $\left(\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}N}\right)_i$ 视为单元 i 的绝对损伤演化率，那么 $\left(\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}N}\right)_i\Big/(1-D_i)$ 就是单元 i 的相对损伤演化率。在一个损伤场中，如果某个单元的相对损伤演化率较其他所有单元的相应值都要大，那么该单元必然损伤演化最快，此单元即为临界单元。因此，临界单元的判别准则可表示为

$$\max_{i\in[1,n]}\left[\left(\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}N}\right)_i\Big/(1-D_i)\right] \tag{15-74}$$

式中，n 为构件划分的单元个数。

对于临界单元损伤度的每一次增长，所需要的相应载荷循环次数可通过式(15－53)计算，即

$$\Delta N=\Delta D\Big/\left\{\frac{a}{p+1}\left(\frac{1}{2E}\right)^{p+1}\left(\frac{1}{1-D}\right)^{2p+2}\cdot \left[\sigma_{\mathrm{me}}^{2p+2}-\sigma_{\mathrm{th0}}^{2p+2}(1-D)^{(0.5+\beta)(2p+2)}\right]\right\} \tag{15-75}$$

在预估疲劳裂纹扩展寿命时，往往要从裂纹形成开始计算，以便获得构件完整的损伤场。

假设所需计算的损伤单元个数为 m，构件划分的单元个数为 n。在算法中所使用符号的具体含义说明如下：

① 带括号的上标表示损伤演化序列，如 $\Delta D_0^{(1)}(e_1)$ 中的(1)表



示第一个临界单元的损伤演化，上标(m)则表示第m个临界单元的损伤演化；

② 不带括号的下标则为在一个临界单元的损伤演化过程中损伤步长的编号；

③ 右边括号表示构件的单元序列。

下面给出具体的算法。

第1步　应用附加载荷有限元法，对于具有初始损伤的构件，分析相应的位移场、应变场和应力场，分别以$u_{i0}^{(1)}$，$\varepsilon_{ij0}^{(1)}$和$\sigma_{ij0}^{(1)}$表示。根据判别准则式(15-74)，确定临界单元，记为e_1。

第2步　确定临界单元损伤度的增长量步长$\Delta D_0^{(1)}(e_1)$（该步长远小于1，下同）。由式(15-75)可确定相应的载荷循环次数为

$$\Delta N_0^{(1)} = \Delta D_0^{(1)}(e_1) \Big/ \left\{ \frac{\alpha}{p+1}\left(\frac{1}{2E}\right)^{p+1}\left[\frac{1}{1-D_0^{(1)}(e_1)}\right]^{2p-2} \cdot \left\{ \sigma_{\text{Me0}}^{(1)}(e_1)^{2p+2} - \sigma_{\text{th0}}^{2p-2}\left[1-D_0^{(1)}(e_1)\right]^{(0.5-\beta)(2p+2)} \right\} \right\} \tag{15-76}$$

由式(15-73)确定任意单元的损伤度增长量为

$$\Delta D_0^{(1)}(x) = \Delta D_0^{(1)}(e_1)\left[\frac{1-D_0^{(1)}(e_1)}{1-D_0^{(1)}(x)}\right]^{2p+2} \cdot \left\{ \frac{\sigma_{\text{Me0}}^{(1)} x^{2p+2} - \sigma_{\text{th0}}^{2p+2}\left[1-D^{(1)}{}_0(x)\right]^{(0.5+\beta)(2p-2)}}{\sigma_{\text{Me0}}^{(1)}(e_1)^{2p+2} - \sigma_{\text{th0}}^{2p-2}\left[1-D_0^{(1)}(e_1)\right]^{(0.5+\beta)(2p-2)}} \right\} \tag{15-77}$$

第3步　分析损伤场

$$\left.\begin{aligned} D_1^{(1)}(e_1) &= D_0^{(1)}(e_1) + \Delta D_0^{(1)}(e_1) \\ D_1^{(1)}(x) &= D_0^{(1)}(x) + \Delta D_0^{(1)}(x) \end{aligned}\right\} \tag{15-78}$$

由此应用附加载荷有限元法分析损伤演化后的位移场、应变场与应力场，并以$u_{i1}^{(1)}$，$\varepsilon_{ij1}^{(1)}$和$\sigma_{ij1}^{(1)}$表示。

第4步　确定临界单元损伤度的增长量步长$\Delta D_1^{(1)}(e_1)$。由式(15-75)可确定相应的载荷循环次数为



$$\Delta N_1^{(1)} = \Delta D_1^{(1)}(e_1) \Big/ \left\{ \frac{\alpha}{p+1} \left(\frac{1}{2E} \right)^{p+1} \left[\frac{1}{1+D_1^{(1)}(e_1)} \right]^{2p+2} \cdot \right.$$
$$\left. \{ \sigma_{\mathrm{Me1}}^{(1)}(e_1)^{2p+2} - \sigma_{\mathrm{th0}}^{2p+2} [1 - D_1^{(1)}(e_1)]^{(0.5+\beta)(2p+2)} \} \right\} \tag{15-79}$$

由式(15-73)确定任意单元的损伤度增长量为

$$\Delta D_1^{(1)}(x) = \Delta D_1^{(1)}(e_1) \left[\frac{1 - D_1^{(1)}(e_1)}{1 - D_1^{(1)}(x)} \right]^{2p+2} \cdot$$
$$\left\{ \frac{\sigma_{\mathrm{Me1}}^{(1)}(x)^{2p+2} - \sigma_{\mathrm{th0}}^{2p+2} [1 - D_1^{(1)}(x)]^{(0.5+\beta)(2p+2)}}{\sigma_{\mathrm{Me1}}^{(1)}(e_1)^{2p+2} - \sigma_{\mathrm{th0}}^{2p+2} [1 - D_1^{(1)}(e_1)]^{(0.5+\beta)(2p+2)}} \right\} \tag{15-80}$$

第 5 步　重复第 3 步和第 4 步，此时有

$$D_{k_1}^{(1)}(x) = D_{k_1-1}^{(1)}(x) + \Delta D_{k_1-1}^{(1)}(x) \tag{15-81}$$

由此应用附加载荷有限元法分析损伤演化后的位移场、应变场与应力场，并以 $u_{ik_1}^{(1)}$，$\varepsilon_{ijk_1}^{(1)}$ 和 $\sigma_{ijk_1}^{(1)}$ 表示。一直计算到 $D_{k_1}^{(1)}(e_1)=1$ 为止，第一个临界单元 e_1 完全损伤时的载荷循环次数即为裂纹形成寿命 N_1，则

$$N_1 = \sum_{i=0}^{k_1} \Delta N_i^{(1)} \tag{15-82}$$

第 6 步　根据判别准则式(15-74)，确定第二个临界单元，记为 e_2。这时的损伤场就是上述裂纹形成所对应的损伤场，即

$$\left. \begin{aligned} D_0^{(2)}(e_2) &= D_{k_1}^{(1)}(e_2) \\ D_0^{(2)}(x) &= D_{k_1}^{(1)}(x) \end{aligned} \right\} \tag{15-83}$$

同样，此时的位移场、应变场与应力场也分别是裂纹形成所对应的位移场、应变场与应力场，即

$$\left. \begin{aligned} u_{i0}^{(2)}(x) &= u_{ik_1}^{(1)}(x) \\ \varepsilon_{ij0}^{(2)}(x) &= \varepsilon_{ijk_1}^{(1)}(x) \\ \sigma_{ij0}^{(2)}(x) &= \sigma_{ijk_1}^{(1)}(x) \end{aligned} \right\} \tag{15-84}$$

第 7 步　确定临界单元损伤度的增长量步长 $\Delta D_0^{(2)}(e_2)$。由



式(15－75)可确定相应的载荷循环次数为

$$\Delta N_0^{(2)} = \Delta D_0^{(2)}(e_2) \Big/ \left\{ \frac{a}{p+1} \left(\frac{1}{2E} \right)^{p+1} \left[\frac{1}{1 - D_0^{(2)}(e_2)} \right]^{2p+2} \cdot \left\{ \sigma_{\mathrm{Me0}}^{(2)}(e_2)^{2p+2} - \sigma_{\mathrm{th0}}^{2p+2} [1 - D_0^{(2)}(e_2)]^{(0.5+\beta)(2p+2)} \right\} \right\} \tag{15-85}$$

由式(15－73)确定任意单元的损伤度增长量为

$$\Delta D_0^{(2)}(x) = \Delta D_0^{(2)}(e_2) \left[\frac{1 - D_0^{(2)}(e_2)}{(1 - D_0^{(2)}(x))} \right]^{2p+2} \cdot \left[\frac{\sigma_{\mathrm{Me0}}^{(2)}(x)^{2p+2} - \sigma_{\mathrm{th0}}^{2p+2} [1 - D_0^{(2)}(x)]^{(0.5+\beta)(2p+2)}}{\sigma_{\mathrm{Me0}}^{(2)}(e_2)^{2p+2} - \sigma_{\mathrm{th0}}^{2p+2} [1 - D_0^{(2)}(e_2)]^{(0.5+\beta)(2p+2)}} \right] \tag{15-86}$$

应当指出，此后第一个临界单元的损伤度保持为1。

第8步　重复类似第3步和第4步的步骤，此时有

$$D_{k_2}^{(2)}(x) = D_{k_2-1}^{(2)}(x) + \Delta D_{k_2-1}^{(2)}(x) \tag{15-87}$$

由此应用附加载荷有限元法分析损伤演化后的位移场、应变场与应力场，并以 $u_{ik_2}^{(2)}$，$\epsilon_{ijk_2}^{(2)}$ 和 $\sigma_{ijk_2}^{(2)}$ 表示。一直计算到 $D_{k_2}^{(2)}(e_2)=1$ 为止，临界单元 e_2 完全损伤时的载荷循环次数为

$$N_2 = \sum_{i=0}^{k_2} \Delta N_i^{(2)} \tag{15-88}$$

第9步　根据判别准则式(15－74)确定第三个临界单元，记为 e_3。采用类似的方法，可以计算临界单元 e_3 完全损伤时的载荷循环次数 N_3。

第10步　重复以上步骤，直到第 m 个临界单元 e_m，其完全损伤时的载荷循环次数为 N_m。

对于具有初始裂纹 a_0 的构件，裂纹扩展寿命的估算方法如下：

① 按照上述方法从无损伤算起，得到与裂纹长度 a 对应的载荷循环次数 N_a；

② 从以上计算过程中选出与初始裂纹长度 a_0 对应的载荷循



环次数 N_0；

③ 通过简单减法得到与裂纹扩展 $\Delta a=a-a_0$ 对应的载荷循环次数 $N=N_a-N_0$。

15.2.4 损伤演化方程参量确定

本节研究的目的是利用疲劳裂纹形成寿命曲线(简称疲劳曲线)——$S\sim N$ 曲线，获得损伤演化方程中的损伤参量，从而通过损伤力学——有限元法预估疲劳裂纹扩展寿命，并将计算结果与已有的根据裂纹扩展速率经验公式，即$\frac{da}{dN}\sim\Delta K$ 公式的所得结果进行比较，以便对所提出的计算方法进行验证。但目前手册提供的疲劳裂纹形成和裂纹扩展试验数据较少，而且试验条件也难以满足一致性的要求；另一方面，疲劳试验成本高，试验周期长，因此直接通过试验获取所有的参数几乎是不可能的。因此，为了满足计算工作的需要，采取一些工程上简便而可靠的方法对试验数据进行必要的补充。

1. 裂纹形成寿命曲线——$S\sim N$ 曲线

针对同等条件下的同一类材料，大多数手册[15.3,15.10]提供的裂纹形成寿命曲线是基于不同的应力比或者不同的平均应力给出的。但是，裂纹扩展速率试验一般都是基于不同的应力比进行的。因此，对于 $S\sim N$ 曲线，根据平均应力下的疲劳数据计算特定应力比下的疲劳数据，以及根据已知几种应力比对应的疲劳数据计算其他应力比对应的疲劳数据，就成为必须要解决的问题。下面分别进行讨论。

(1) 由已知几种应力比的疲劳数据计算其他应力比的疲劳数据

首先给出疲劳试验中各参数的关系。



1）平均应力

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} \tag{15-89}$$

2）应力幅

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \tag{15-90}$$

3）应力比

$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} \tag{15-91}$$

利用等寿命图 $\sigma_a \sim \sigma_m$ 分析不同应力比之间的相互关系，等寿命示意图如图 15－4 所示。

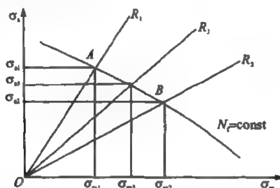


图 15－4　不同应力比下的等寿命示意图

从图上可以看出，若将 AB 段近似按线性处理，可以得出如下比例关系式：

$$\frac{\sigma_{a3} - \sigma_{a2}}{\sigma_{m2} - \sigma_{m3}} = \frac{\sigma_{a1} - \sigma_{a2}}{\sigma_{m2} - \sigma_{m1}} \tag{15-92}$$

根据上述疲劳试验中各参数的关系，将平均应力与应力幅分别以应力比和最大应力表示，有

$$\left.\begin{aligned} \sigma_m &= \frac{1+R}{2}\sigma_{max} \\ \sigma_a &= \frac{1-R}{2}\sigma_{max} \end{aligned}\right\} \tag{15-93}$$



将式(15-93)代入式(15-92),则有

$$\frac{(1-R_3)\sigma_{max3}-(1-R_2)\sigma_{max2}}{(1+R_2)\sigma_{max2}-(1+R_3)\sigma_{max3}}=\frac{(1-R_1)\sigma_{max1}-(1-R_2)\sigma_{max2}}{(1+R_2)\sigma_{max2}-(1+R_1)\sigma_{max1}} \tag{15-94}$$

在 R_1,σ_{max1} 与 R_2,σ_{max2} 已知的条件下,通过式(15-94),可求得特定应力比 R_3 在与 R_1,R_2 同疲劳寿命情况下所对应的 σ_{max3}。这样,由已知对应几种应力比的疲劳数据就可以推得其他应力比下的疲劳数据。

(2) 由已知几种平均应力下的疲劳数据绘制等寿命图

根据等寿命图,可以方便地得到针对某一个特定应力比在不同寿命下所对应的(σ_m,σ_a)数据,如图 15-5 所示。

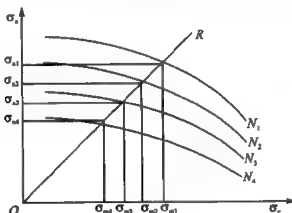


图 15-5　由特定平均应力时的疲劳数据计算特定应力比下疲劳数据的等寿命示意图

这样,通过特定应力比下一系列的(σ_m,σ_a)数据,利用 $\sigma_{max}=\sigma_m+\sigma_a$,就可以获得该应力比下的一组($\sigma_{max}$,$N$)数据。

2. 裂纹扩展曲线——$a\sim N$ 曲线

对于裂纹扩展速率曲线,试验手册[15.10,15.11]一般只提供$\left(\Delta K,\frac{da}{dN}\right)$数据。但是,考虑到裂纹扩展速率数据的分散性,采用相应的 $a\sim N$ 曲线进行比较更为方便可靠。为此,首先通过裂纹



扩展速率公式，依据$\left(\Delta K, \frac{da}{dN}\right)$数据反推出相应的$(a, N)$数据。

根据 Paris 公式，裂纹扩展速率可表示如下：

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^n \tag{15-95}$$

式中，C 和 n 为材料常数。将式(15－95)进行变量分离，有

$$\frac{da}{C(\Delta K)^n} = dN \tag{15-96}$$

对式(15－96)两边作积分，可知

$$\int_{a_0}^{a_i} \frac{da}{C(\Delta K)^n} = \int_{N_0}^{N_i} dN = N_i - N_0 \tag{15-97}$$

式中，a_0 为初始裂纹长度；N_0 为初始裂纹长度 a_0 对应的载荷循环次数；a_i 为裂纹扩展长度；N_i 为裂纹长度 a_i 对应的载荷循环次数。

由式(15－97)可以看出，对应每一个裂纹长度 a_i，都可以由式(15－97)通过数值积分计算出相应的裂纹扩展寿命，从而即可得到一系列的(a, N)数据。

15.2.5 裂纹形成与扩展寿命的损伤力学分析与验证

选取 LY12 铝合金板材[15.10]与 LC4 高强度铝合金板材[15.3,15.11]两种材料作为算例进行上述计算方法的验证。

1. LY12 铝合金板材

① 根据 $S\sim N$ 曲线，拟合损伤演化方程中的参数值。手册提供了几组 $S\sim N$ 曲线，选用 $K_t=1$ 时的数据进行参数拟合，并使用 $K_t=2$ 时的数据进行参数验证。

- 在 $K_t=1$ 时，手册提供了 $R=0.02$ 与 $R=0.6$ 两组 $S\sim N$ 曲线。由于裂纹扩展试验是在 $R=0.2$ 情况下进行的，所以需要 $R-0.2$ 下的(σ_{max}, N)数据。使用前述由已知几种



应力比疲劳数据计算其他应力比疲劳数据的方法，计算 $R=0.2$ 下的(σ_{max}，N)数据，如表 15-2 所列。

表 15-2 LY12 的疲劳数据($K_t=1$，$R=0.2$)

项　目	σ_{max}/MPa	N/次
1	193.2	6E5
2	183.8	8E5
3	177.6	1E6
4	163.6	2E6
5	147.4	1E7

根据手册[15.10]，选取 $\sigma_{thm}=147.4$ MPa 与距中值疲劳曲线的最远点坐标(215.7 MPa，8×10^5 次)，拟合损伤演化方程中的参数。考虑 β 值的不同对计算结果的影响，选择了 $\beta=0.5$ 与 $\beta=1.0$ 两种情况分别进行计算。计算结果如表 15-3 和表 15-4 所列。

表 15-3 LY12 铝合金板材的损伤演化方程参数表($\beta=0.5$)

β	$2p+2$	α	D_{0m}	σ_{th0}/MPa
0.5	2.764 5	4.124 5E-6	0.128 0	169.04

表 15-4 LY12 铝合金板材的损伤演化方程参数表($\beta=1.0$)

β	$2p+2$	α	D_{0m}	σ_{th0}/MPa
1.0	2.764 5	4.538 3E-6	0.105 6	174.26

- 使用 $K_t=2$ 时的数据进行上述参数的验证。在 $K_t=2$ 时，手册提供了 $\sigma_m=70$ MPa 与 $\sigma_m=210$ MPa 两组 $S\sim N$ 曲线。使用前述由几种平均应力疲劳数据计算特定应力比下疲劳数据的方法，计算 $R=0.2$ 下的(σ_{max}，N)数据。



下面针对 $K_t=2$ 的情况，利用损伤力学——有限元法进行疲劳裂纹形成寿命的预估，并将相应的估算结果与试验获得数据进行比较。$\beta=0.5$ 与 $\beta=1.0$ 两种情况的比较结果分别见图 15-6 和图 15-7。

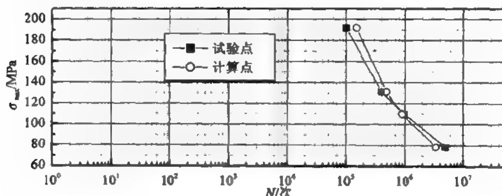


图 15-6 LY12，$K_t=2$ 试件的计算与试验疲劳曲线比较（$\beta=0.5$）

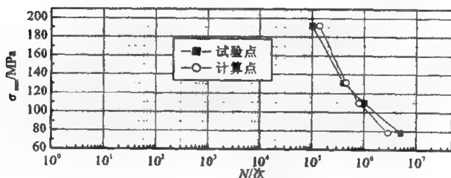


图 15-7 LY12，$K_t=2$ 试件的计算与试验疲劳曲线比较（$\beta=1.0$）

从图 15-6 和图 15-7 可以看出，根据 $K_t=1$ 试件的疲劳试验数据拟合的损伤演化方程中的参数，利用损伤力学——有限元法计算出的 $K_t=2$ 试件的疲劳数据，两种 β 值对应的计算结果与试验数据相比都基本吻合，可以证明上述方法所拟合的参数皆适用于疲劳计算。



② 基于上述拟合的损伤演化方程参数，利用裂纹扩展的损伤力学　　有限元法进行计算，获取裂纹扩展尺寸与载荷循环次数的关系，即 $a\sim N$ 曲线。

根据手册提供试件的尺寸，建立相应的有限元计算模型，如图 15－8所示。孔边的有限元网格划分如图 15－9 所示。

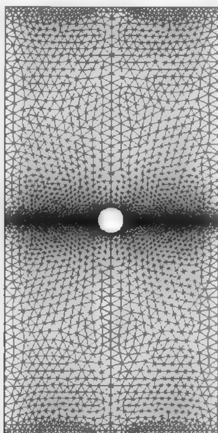


图 15－8　裂纹扩展有限元计算模型

为了验证由以上损伤力学方法预估裂纹疲劳扩展规律的可行性，根据断裂力学方法，利用手册提供的试验数据及 Paris 公式拟合曲线，通过积分的方法计算出相应的(a,N)数据，并将由此所得的计算结果与由损伤力学所得的结果进行比较。$\beta=0.5$ 与



$\beta=1.0$两种情况的比较结果分别如图 15-10 和图 15-11 所示。

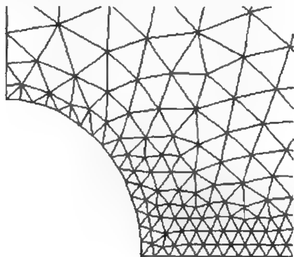


图 15-9 裂纹扩展模型的孔边有限元网格划分

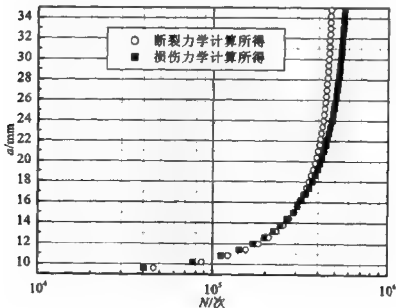


图 15-10 LY12 裂纹扩展曲线比较($\beta=0.5$)

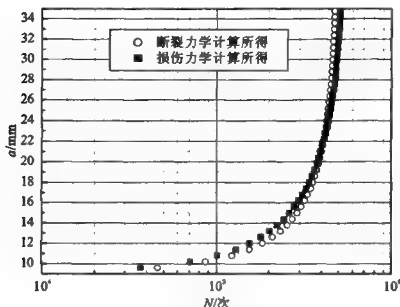


图 15-11 LY12 裂纹扩展曲线比较($\beta=1.0$)

$\beta=0.5$ 与 $\beta=1.0$ 两种情况下损伤力学计算结果与断裂力学计算结果的误差见表 15-5。

表 15-5 LY12 铝合金板材裂纹扩展损伤力学计算结果与断裂力学计算结果的相对误差

裂纹扩展长度 a/mm	载荷循环次数相对误差/(%)	
	$\beta=0.5$	$\beta=1.0$
10.8	9.23	17.45
15.6	0.265	8.75
22.2	9.90	0.066
27.6	14.88	4.62
34.8	18.92	8.32

从图 15-10、图 15-11 以及表 15-5 可以看出，通过损伤力学——有限元法所得的裂纹扩展 $a\sim N$ 的计算结果与断裂力学相



应结果相比，相对误差较小，完全处在工程计算许可范围之内。比较 $\beta=0.5$ 与 $\beta=1.0$ 两种情况，发现 $\beta=1.0$ 时计算结果与试验结果相比的误差更小，尤其是在裂纹扩展长度已经达到 34.8 mm 时，其相对误差仍然小于 10 %。

2. LC4 高强度铝合金板材

以 LC4 高强度铝合金板材为例进行计算，计算步骤如同 LY12 铝合金板材。

使用前述疲劳数据处理方法，计算 $R=0.1$ 下的(σ_{max}, N)数据，如表 15-6 所列。

表 15-6 LC4 高强度铝合金板材的疲劳数据($K_t=1, R=0.1$)

项 目	σ_{max}/MPa	N/次
1	320	5E4
2	257	1E5
3	188	3E5
4	145	1E6
5	123	1E7

根据手册[15.3]，选取 $\sigma_{thm}=123$ MPa 与距中值疲劳曲线的最远点坐标(250.2 MPa, 1.8×10^5 次)，拟合损伤演化方程中的参数。取 $\beta=0.5$，计算结果如表 15-7 所列。

表 15-7 LC4 高强度铝合金板材的损伤演化方程参数表($\beta=0.5$)

β	$2p+2$	a	D_{0m}	σ_{th0}/MPa
0.5	2.582 6	7.002 3E-6	0.118 2	139.49

同样，利用 $K_t=2$ 试件的试验数据对上述参数进行验证。将损伤力学——有限元法所得的疲劳裂纹形成寿命估算结果与由疲劳试验获得数据进行比较，如图 15-12 所示。

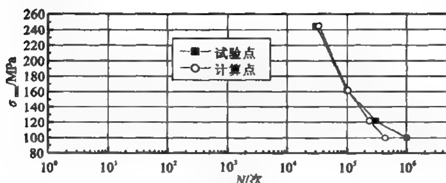


图 15－12　LC4，K_t＝2 试件的计算与试验疲劳曲线比较（β＝0.5）

由图 15－12 可以看出，对于 LC4 高强度铝合金板材而言，若将 β 值取为 0.5，所得计算结果与试验结果也是一致的。

采用与 LY12 铝合金板材同样的有限元模型，计算 LC4 的裂纹扩展性能。损伤力学与断裂力学计算结果的比较以及相对误差分别如图 15－13 所示和表 15－8 所列。

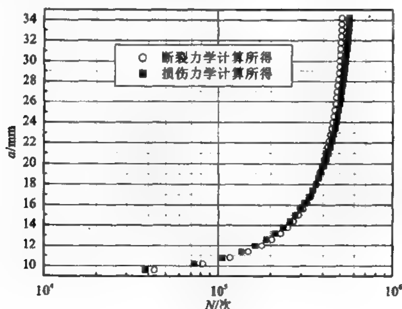


图 15－13　LC4 高强度铝合金板材裂纹扩展曲线比较（β＝0.5）



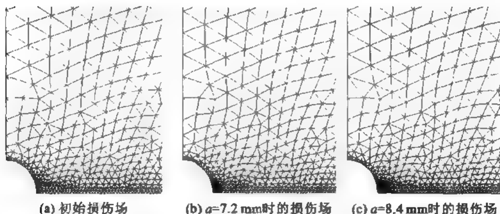
表 15-8 LC4 裂纹扩展损伤力学计算结果
与断裂力学计算结果的相对误差

裂纹扩展长度 a/mm	载荷循环次数相对误差/(%)
10.8	9.69
15.0	4.00
18.6	0.09
25.2	5.73
34.2	9.86

从图 15-13 和表 15-8 可以看出，在 $\beta=0.5$ 时，通过损伤力学——有限元法所获得的 LC4 高强度铝合金板材裂纹扩展特性的计算结果与断裂力学相应结果相比，相对误差已非常小，是在工程许可的误差范围之内。

从以上两例可以发现，在 $\beta=0.5$ 情况下计算的裂纹扩展性能数据已经能够满足工程需要。同时，可以通过调节 β 值的大小，达到更高的精度要求。

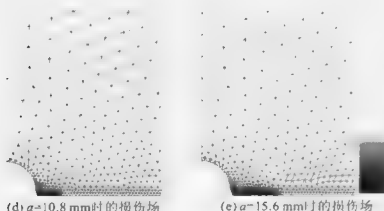
为了形象地显示裂纹扩展过程，给出一组反映上述计算过程中的损伤场演化的有限元图形，如图 15-14 所示。



(a) 初始损伤场 (b) a=7.2 mm时的损伤场 (c) a=8.4 mm时的损伤场

图 15-14 裂纹扩展过程中损伤场的变化





(d) a=10.8 mm时的损伤场　　(e) a=15.6 mm时的损伤场

图 15-14　裂纹扩展过程中损伤场的变化(续)

15.2.6　结　论

首先，利用裂纹形成阶段的疲劳寿命试验数据，拟合损伤演化方程中的损伤参量；然后，通过损伤力学　　有限元法，继续进行有关裂纹扩展的运算，获得反映扩展性能的(a，N)数据；最后，将计算结果与裂纹扩展试验进行了比较，验证了整个分析计算过程的可行性，从而改变了裂纹形成与裂纹扩展两个阶段被单独处理的现状，而使其成为一个完整的统一的分析过程。这就有可能利用疲劳裂纹形成的实验结果，通过损伤力学方法预估疲劳裂纹扩展寿命，从而达到缩短研究周期与降低研究成本的目的。

参考文献

[15.1]　LEMAITRE J, CHABOCHE J L. Mechanics of Solid Materials. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

[15.2]　张行，赵军. 金属构件应用疲劳损伤力学. 北京：国防工业出版社，1998.

[15.3]　吴学仁主编. 飞机结构金属材料力学性能手册. 第1卷. 北京：航空工业出版社，1996.



[15.4] BANNANTINE J A, COMER J J, HANDROCK J L. Fundamentals of Metal Fatigue Analysis. New Jersey: Prentice Hall Englewood Cliffs, 1990.

[15.5] 徐灏.疲劳强度.北京:高等教育出版社,1988.

[15.6] 姚卫星.结构疲劳寿命分析.北京:国防工业出版社,2003.

[15.7] BROEK D. Elementary Engineering Fracture Mechanics. Leyden: Noordhoff International Publishing, 1974.

[15.8] 张行.断裂力学.北京:宇航出版社,1990.

[15.9] 余寿文,冯西桥.损伤力学.北京:清华大学出版社,1997.

[15.10] 高镇同,蒋新桐,熊峻江,等.疲劳性能试验设计和数据处理.北京:北京航空航天大学出版社,1999.

[15.11] 吴学仁主编.飞机结构金属材料力学性能手册.第2卷.北京:航空工业出版社,1996.

[15.12] 杨继运,张行,张琨.基于疲劳裂纹形成曲线的裂纹扩展分析数值方法.机械工程学报,2004,40(7):55-62.

第16章　正交铺层层合板的二维分层力学研究

复合材料层合板具有很高的面内比强度，但其层间强度很低，所以在层合板中容易出现分层现象。在本章中，讨论正交铺层层合板的二维分层问题，包括反平面剪切型分层、平面剪切型分层以及由面内拉伸引起的平面复合型分层。本章所采用的分析方法是本书作者提出的解析变分解法。

16.1　反平面剪切型分层问题解析变分解法

16.1.1　支配方程与复变函数通解

图16-1表示含边缘分层正交铺层复合材料层板，层板受反平面Ⅲ型载荷作用。首先，采用位移法来确定每一层中位移与应力的一般解答。大家知道，对于反平面问题，每一层板中只有一个z向位移w，且w只与x和y坐标有关，即

$$u = 0, \qquad v = 0, \qquad w = w(x,y) \tag{16-1}$$

根据几何方程，只存在两个反平面切应变

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x}, \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} \tag{16-2}$$

代入物理方程，可得不为零的应力分量如下：

$$\tau_{xz} = \mu_x \gamma_{xz} = \mu_x \frac{\partial w}{\partial x}, \qquad \tau_{yz} = \mu_y \gamma_{yz} = \mu_y \frac{\partial w}{\partial y} \tag{16-3}$$



式中，μ_x 和 μ_y 分别为层板在 xz 平面和 yz 平面内的切变模量（剪切弹性模量）。

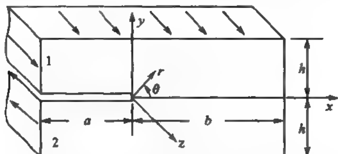


图 16-1 受反平面剪切载荷作用的含分层正交层板

在反平面问题中，有效的平衡方程只有一个。在无体力情况下可将此方程表示为

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}=0 \tag{16-4}$$

将式(16-3)代入式(16-4)，得到以位移表示的平衡方程

$$\mu_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0 \tag{16-5}$$

这就是反平面问题中位移 w 所应满足的支配微分方程。

采用复变函数解法求解式(16-5)。引人如下广义复变量 z_1 与复函数 $f(z_1)$，即

$$z_1=x+py \tag{16-6}$$

式中，p 为复常数，并将位移表示为

$$w=f(z_1)+\overline{f}(\overline{z}_1) \tag{16-7}$$

将式(16-7)代入式(16-5)，可得

$$p=\mathrm{i}\sqrt{\frac{\mu_x}{\mu_y}} \tag{16-8}$$

这就是使式(16-5)得以满足的充分条件。此时，式(16-7)给出的位移可使几何、物理与平衡方程得到满足。将式(16-7)代入式(16-3)，可得到满足三类基本方程的切应力表达式：

$$\left.\begin{aligned}\tau_{xz} &= \mu_x\{f'(z_1)+\bar{f}'(z_1)\}\\ \tau_{yz} &= \mu_y\{pf'(z_1)+\bar{p}\,\bar{f}'(\bar{z}_1)\}\end{aligned}\right\} \tag{16-9}$$

至此，得到了每层板中满足基本方程的位移与应力的一般表达式。

16.1.2 基本条件与本征展开

大家知道，使式(16－7)与式(16－9)给出的位移与应力满足所有的边界条件，就可以得到问题的解析解。但是，对于有限大结构而言，精确满足所有边界条件是不可能的，只能精确满足主要的条件而近似满足一些次要的条件。在分层问题中，分层前沿的应力场是问题的主要方面，是人们关注的焦点。因此，在精确满足基本方程的同时，应使分层表面的边界条件与层间连续条件得到精确满足，这样才能既使问题的求解成为可能，又保证了解答的足够精确。

引入极坐标

$$\left.\begin{aligned}x &= r\cos\theta\\ y &= r\sin\theta\end{aligned}\right\} \tag{16-10}$$

式中，θ 为从 x 正半轴量起的极角，逆时针为正。由图 16－1 可见，分层表面边界条件与层间连续条件表示成

$$\left.\begin{aligned}\theta &= \pi, & \tau_{yz1} &= 0\\ \theta &= -\pi, & \tau_{yz2} &= 0\end{aligned}\right\} \tag{16-11}$$

$$\left.\begin{aligned}\theta &= 0, & \tau_{yz1} &= \tau_{yz2}\\ \theta &= 0, & w_1 &= w_2\end{aligned}\right\} \tag{16-12}$$

式中，应力与位移下标中的 1 和 2 表示层号，如图 16－1 所示。

将式(16－7)中的复变函数 $f(z_1)$ 取成如下幂函数形式：

$$f(z_1) = \frac{A}{\lambda+1}z_1^{\lambda+1} \tag{16-13}$$

式中，$A = A^R + iA^I$ 为复常数；λ 为实数。根据式(16－8)，将式(16－6)中的复变量改写成



$$z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1, \quad x_1 = x, \quad y_1 = y\sqrt{\frac{\mu_x}{\mu_y}} \tag{16-14}$$

考虑到式(16-10),可得

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1) = r_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} \tag{16-15}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} & r_1 = r\sqrt{\cos^2\theta + \frac{\mu_x}{\mu_y}\sin^2\theta}, \qquad \tan\theta_1 - \sqrt{\frac{\mu_x}{\mu_y}}\tan\theta \\ & \sin\theta_1 = \sqrt{\frac{\mu_x}{\mu_y}}\frac{\sin\theta}{\sqrt{\cos^2\theta + \frac{\mu_x}{\mu_y}\sin^2\theta}} \\ & \cos\theta_1 = \frac{\cos\theta}{\sqrt{\cos^2\theta + \frac{\mu_x}{\mu_y}\sin^2\theta}} \end{aligned}\right\} \tag{16-16}$$

可见

$$\theta = 0\text{时},\theta_1 = 0, r_1 = r; \qquad \theta = \pm\pi\text{时}, \theta_1 = \pm\pi, r_1 = r \tag{16-17}$$

考虑到式(16-15),将式(16-13)代入式(16-7)和式(16-9),可将位移与应力表示为

$$w = \frac{2r_1^{\lambda+1}}{\lambda+1}[A^R\cos(\lambda+1)\theta_1 - A^I\sin(\lambda+1)\theta_1] \tag{16-18}$$

$$\tau_{xz} = 2\mu_x r_1^{\lambda}(A^R\cos\lambda\theta_1 - A^I\sin\lambda\theta_1) \tag{16-19}$$

$$\tau_{yz} = -2\sqrt{\mu_x\mu_y}r_1^{\lambda}(A^R\sin\lambda\theta_1 + A^I\cos\lambda\theta_1) \tag{16-20}$$

这里所给出的位移与应力对两层板都适用,只要将其中的切变模量换成相应层的即可。

将式(16-18)至式(16-20)代入式(16-11)、式(16-12),使应力与位移满足分层表面边界条件与层间连续条件,可得

$$\left.\begin{aligned} & -A_1^R\sin\lambda\pi - A_1^I\cos\lambda\pi = 0 \\ & A_2^R\sin\lambda\pi - A_2^I\cos\lambda\pi = 0 \\ & \xi A_1^I = A_2^I \\ & A_1^R = A_2^R \end{aligned}\right\} \tag{16-21}$$

这里

$$\xi = \sqrt{\frac{\mu_{x1}\mu_{y1}}{\mu_{x2}\mu_{y2}}} \tag{16-22}$$

式中，下标中的 1 和 2 表示层号。

式(16-21)可化简为

$$\left.\begin{aligned} -A_1^R \sin \lambda\pi - A_1^I \cos \lambda\pi = 0 \\ A_1^R \sin \lambda\pi - \xi A_1^I \cos \lambda\pi = 0 \end{aligned}\right\} \tag{16-23}$$

该式具有非零解的条件是

$$\sin 2\lambda\pi = 0 \tag{16-24}$$

由此可得本征值

$$\lambda = \frac{n}{2} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{16-25}$$

可见，本征值与复变函数中的待定系数有两种情况：

(1) 当 n 为偶数，即 $n=2m, m=0,1,2,\cdots$ 时

由式(16-25)可知：$\lambda=m$，$\sin \lambda\pi=0$，代入式(16-23)，可得

$$A_1^I = A_2^I = 0 \tag{16-26}$$

不为零的系数为

$$A_1^R = A_2^R$$

(2) 当 n 为奇数，即 $n=2m-1$ 时

由式(16-25)可知：$\lambda=m-\frac{1}{2}$，$\cos \lambda\pi=0$，代入式(16-23)，可得

$$A_1^R = A_2^R = 0 \tag{16-27}$$

不为零的系数为

$$A_1^I = \frac{A_2^I}{\xi}$$

根据式(16-21)给出的系数间关系，引入以下新的待定系数：

$$\left.\begin{aligned} P_m = A_1^R = A_2^R \\ Q_m = A_1^I = \frac{A_2^I}{\xi} \end{aligned}\right\} \tag{16-28}$$



这两个系数分别对应本征值取整数和半整数的两种情况。由式(16-18)至式(16-20)与式(16-26)、式(16-27)并考虑到应变能有界条件，得到两层板中位移与应力的本征展开式：

$$w_1=\sum_{m=0}^{M}\frac{2r_1^{m+1}}{m+1}\cos\,(m+1)\theta_1P_m-\sum_{m=0}^{M}\frac{2r_1^{m+\frac{1}{2}}}{m+\frac{1}{2}}\sin\,\left(m+\frac{1}{2}\right)\theta_1Q_m \tag{16-29}$$

$$\tau_{xz1}=2\mu_{x1}\left\{\sum_{m=0}^{M}r_1^m\cos\,m\theta_1P_m-\sum_{m=0}^{M}r_1^{m-\frac{1}{2}}\sin\,\left(m-\frac{1}{2}\right)\theta_1Q_m\right\} \tag{16-30}$$

$$\tau_{yz1}=-2\sqrt{\mu_{x1}\mu_{y1}}\left\{\sum_{m=0}^{M}r_1^m\sin\,m\theta_1P_m+\sum_{m=0}^{M}r_1^{m-\frac{1}{2}}\cos\,\left(m-\frac{1}{2}\right)\theta_1Q_m\right\} \tag{16-31}$$

$$w_2=\sum_{m=0}^{M}\frac{2r_1^{m+1}}{m+1}\cos\,(m+1)\theta_1P_m-\xi\sum_{m=0}^{M}\frac{2r_1^{m+\frac{1}{2}}}{m+\frac{1}{2}}\sin\,\left(m+\frac{1}{2}\right)\theta_1Q_m \tag{16-32}$$

$$\tau_{xz2}=2\mu_{x2}\left\{\sum_{m=0}^{M}r_1^m\cos\,m\theta_1P_m-\xi\sum_{m=0}^{M}r_1^{m-\frac{1}{2}}\sin\,\left(m-\frac{1}{2}\right)\theta_1Q_m\right\} \tag{16-33}$$

$$\tau_{yz2}=-2\sqrt{\mu_{x2}\mu_{y2}}\left\{\sum_{m=0}^{M}r_1^m\sin\,m\theta_1P_m+\xi\sum_{m=0}^{M}r_1^{m-\frac{1}{2}}\cos\,\left(m-\frac{1}{2}\right)\theta_1Q_m\right\} \tag{16-34}$$

式中，M 为展开式中所取项数。

可见，在式(16-31)、式(16-34)中，$m=0$ 的项在分层前沿具有$-1/2$ 次方的奇异性，该项系数可被定义为应力强度因子 K_{III}，即

$$K_{\mathrm{III}}=\lim_{\substack{r\to0\\ \theta\to0}}\frac{-\tau_{yz1}}{r_1^{-\frac{1}{2}}\cos\dfrac{\theta_1}{2}}=\lim_{\substack{r\to0\\ \theta\to0}}\frac{-\tau_{yz2}}{r_1^{-\frac{1}{2}}\cos\dfrac{\theta_1}{2}} \tag{16-35}$$

将式(16-31)、式(16-34)代入，得



$$K_{Ⅲ} = 2\sqrt{\mu_{x1}\mu_{y1}}Q_0 - 2\sqrt{\mu_{x2}\mu_{y2}}\xi Q_0 \qquad (16-36)$$

至此，得到了两层板中满足所有基本方程、分层表面边界条件与层间连续条件的位移场与应力场的本征展开式。其中的待定系数 P_m 与 Q_m 由其余边界条件确定，系数 Q_0 为分层前沿奇异项系数，可用来定义应力强度因子。

16.1.3 应力强度因子变分解法

如前所述，分层表面以外的边界条件已无法得到精确满足，故采用变分方法来使其近似满足。由于分层两侧材料的位移场和应力场的表达式不同，需用分区广义变分原理[16.1,16.2]。在基本方程、分层表面边界条件与层间连续条件得到精确满足，同时位移边界又不存在的情况下（原点位移为零），分层表面以外边界上的力的边界条件可表示为

$$\sum_{k=1}^{2}\int_{S_{pk}}(\tau_{xzk}n_{xk} + \tau_{yzk}n_{yk})\delta w_k \mathrm{d}s = 0 \qquad (16-37)$$

式中，S_{pk} 表示第 k 层的力的边界；n_{xk} 与 n_{yk} 表示相应的方向余弦。将位移与应力表达式代入式(16－37)，得到关于所有待定系数的线性方程组，求解即得所有待定系数。当应力与位移展开式中的项数 M 足够多时，奇异应力场系数（即应力强度因子）趋于收敛。由此即可确定应力强度因子与应力场、位移场。应当指出，由于在式(16－37)中只有线积分而没有面积分，因此计算效率很高。

以高模量石墨/环氧树脂复合材料为例。设第一层为正交各向异性层，第二层为横观各向同性层，两层材料的切变模量为

$$\mu_{x1} = 3.45\ \text{kPa}, \qquad \mu_{y1} = 1.38\ \text{kPa}$$
$$\mu_{x2} = 3.45\ \text{kPa}, \qquad \mu_{y2} = 3.45\ \text{kPa}$$

算例一　分层端部表面上承受单位均布剪力的层板（如图 16－2所示）。



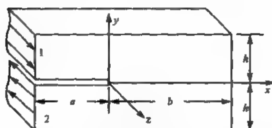


图 16-2 端部表面承受均布载荷

几种不同分层长度下的应力强度因子随项数增加的收敛情况如表 16-1 至表 16-3 所列。

表 16-1 应力强度因子收敛情况之一($a = 0.5\times h, b=1.0\times h$)

M	1	2	3	4	5	6	7	8
K_{II}	1.233 58	1.295 41	1.354 74	1.339 28	1.336 55	1.334 05	1.333 08	1.330 67

表 16-2 应力强度因子收敛情况之二($a=0.5\times h, b=3.0\times h$)

M	1	2	3	4	5	6	7	8
K_{II}	0.880 53	1.180 23	1.232 14	1.226 89	1.216 20	1.212 07	1.211 32	1.210 29

表 16-3 应力强度因子收敛情况之三($a=0.5\times h, b=5.0\times h$)

M	2	3	4	5	6	7	8
K_{II}	1.132 11	1.224 60	1.231 96	1.222 73	1.213 18	1.210 27	1.209 92

可见，当项数达到 6 时，应力强度因子在小数点后两位已经基本稳定。

算例二 上下表面上承受单位均布剪力的层板(如图 16-3 所示)。

几种不同分层长度下的应力强度因子随项数增加的收敛情况如表 16-4 至表 16-5 所列。



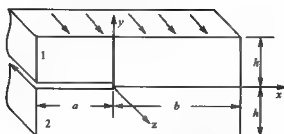


图 16-3　上下表面承受均布载荷

表 16-4　应力强度因子收敛情况之四($a=0.5\times h, b=1.0\times h$)

M	1	2	3	4	5	6	7	8
K_{III}	1.697 81	1.471 40	1.374 45	1.352 41	1.335 67	1.329 46	1.325 34	1.323 24

表 16-5　应力强度因子收敛情况之五($a=0.5\times h, b=5.0\times h$)

M	1	2	3	4	5	6	7	8
K_{III}	2.547 53	1.531 41	1.395 47	1.356 50	1.331 27	1.313 49	1.303 28	1.297 61

同样，在项数达到 6 时，应力强度因子基本收敛。

16.2　平面剪切型分层问题解析变分解法

16.2.1　力学模型的建立

考虑含边缘穿透分层复合材料层合梁受横向载荷的情况，如图 16-4(a)所示。为便于分析，将其分解为对称⟨α⟩与反对称⟨β⟩两种载荷状态，如图 16-4(b)，(c)所示。在⟨β⟩状态中，层合梁在反对称载荷作用下产生反对称变形，使得上下层间出现相互错动的趋势。分层的产生与扩展就源于此状态。而在⟨α⟩状态中，层板受对称载荷作用，上下层之间相互压紧而没有错动趋势。当然，由于两层材料纤维取向的不同，在对称横向载荷作用下各层的纵向



应变是不同的，所以层间有可能产生切应力，具有分层的可能。但与反对称状态相比，对称状态的分层趋势要小得多。可以认为，层板横向受载下的分层是由反对称状态引起的*。

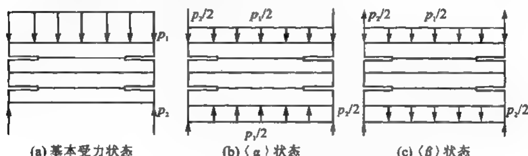


图 16－4　正交铺层复合材料层合梁受力分析

在反对称状态中，分层属于平面剪切型层间裂纹。假定分层表面无摩擦，并假设分层在层板横截面内是双对称的，如图 16－4(c)所示，取结构的 1/4，可建立力学模型如图 16－5 所示。图中模型下部的约束表示该面上的水平位移为零，而铅垂位移不受限制。对于正交对称铺层层合梁，设第一层（分层以上部分）为正交各向异性层，第二层（分层以下部分）为横观各向同性层。

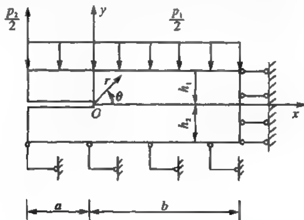


图 16－5　层合梁分层的力学模型

* 至于对称状态的影响，可采用与分析反对称状态相类似的方法进行分析。

16.2.2 应力与位移的复变函数表达式

根据 Muskhelishvili(穆什海里什维里)求解各向同性平面问题的复变函数理论[16.3]，横观各向同性层(层 2)的位移与应力(无体力情况)表示为

$$2\mu(u_{x2}+\mathrm{i}u_{y2})=\kappa\varphi_2(z)-(z-\bar{z})\overline{\varphi_2'(z)}-\overline{\Omega_2(z)} \tag{16-38}$$

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{yy2}-\mathrm{i}\sigma_{xy2}&=\varphi_2'(z)+(z-\bar{z})\overline{\varphi_2''(z)}+\overline{\Omega_2'(z)}\\ \sigma_{xx2}+\sigma_{yy2}&=2[\varphi_2'(z)+\overline{\varphi_2'(z)}]\end{aligned}\right\} \tag{16-39}$$

式中，$\varphi_2(z)$，$\Omega_2(z)$为解析函数；下标 2 表示层号；μ 为切变模量；

$$\kappa=3-4\nu\quad(\text{平面应变}),\qquad \kappa=\frac{3-\nu}{1+\nu}\quad(\text{平面应力})$$

式中，ν 为泊松比。

引入极坐标如图 16-5 所示，则复变量 $z=x+\mathrm{i}y=re^{\mathrm{i}\theta}$。

定义广义复变量

$$z_j=x_j+\mathrm{i}y_j=x+\mathrm{i}\beta_jy=r_je^{\mathrm{i}\theta_j}\qquad(j=1,2) \tag{16-40}$$

β_j 为与材料有关的常数。根据 Lekhnistkii(列赫尼兹基)求解各向异性平面问题的复变函数理论[16.4]，正交各向异性层(层 1)的位移与应力(无体力情况)表示为

$$\left.\begin{aligned}u_{x1}&=[p_1\varphi_1(z_1)+\bar{p}_1\overline{\varphi_1(z_1)}]+[p_2\psi_1(z_2)+\bar{p}_2\overline{\psi_1(z_2)}]\\ u_{y1}&=[q_1\varphi_1(z_1)+\bar{q}_1\overline{\varphi_1(z_1)}]+[q_2\psi_1(z_2)+\bar{q}_2\overline{\psi_1(z_2)}]\end{aligned}\right\} \tag{16-41}$$

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{xx1}&=[\mu_1^2\varphi_1'(z_1)+\bar{\mu}_1^2\overline{\varphi_1'(z_1)}]+[\mu_2^2\psi_1'(z_2)+\bar{\mu}_2^2\overline{\psi_1'(z_2)}]\\ \sigma_{yy1}&=[\varphi_1'(z_1)+\overline{\varphi_1'(z_1)}]+[\psi_1'(z_2)+\overline{\psi_1'(z_2)}]\\ \sigma_{xy1}&=-[\mu_1\varphi_1'(z_1)+\bar{\mu}_1\overline{\varphi_1'(z_1)}]-[\mu_2\psi_1'(z_2)+\bar{\mu}_2\overline{\psi_1'(z_2)}]\end{aligned}\right\} \tag{16-42}$$



式中，$\varphi_1(z_1)$，$\psi_1(z_2)$等为解析函数；函数的下标1对应层号；复常数μ_1，μ_2满足以下方程：

$$a_{22}+(2a_{12}+a_{66})\mu^2+a_{11}\mu^4=0 \tag{16-43}$$

式中，a_{ij}为平面应力状态下正交各向异性板的柔度系数。对于平面应变状态，将a_{ij}换成b_{ij}即可。

对于多种工程常用复合材料来说，求解式(16－43)后可以发现，方程的两个根μ_1，μ_2为纯虚数*，即

$$\mu_1=\mathrm{i}\beta_1,\qquad \mu_2=\mathrm{i}\beta_2 \tag{16-44}$$

于是，式(16－41)和式(16－42)中的位移与应力可改写为

$$\left.\begin{aligned} u_{x1}&=p_1\{\varphi_1(z_1)+\overline{\varphi_1(z_1)}\}+p_2\{\psi_1(z_2)+\overline{\psi_1(z_2)}\}\\ u_{y1}&=-\mathrm{i}t_1\{\varphi_1(z_1)-\overline{\varphi_1(z_1)}\}-\mathrm{i}t_2\{\psi_1(z_2)-\overline{\psi_1(z_2)}\}\end{aligned}\right\} \tag{16-45}$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{xx1}&=-\beta_1^2\{\varphi_1'(z_1)\,\overline{\varphi'_1(z_1)}\}-\beta_2^2\{\psi_1'(z_2)+\overline{\psi_1'(z_2)}\}\\ \sigma_{yy1}&=\{\varphi_1'(z_1)+\overline{\varphi_1'(z_1)}\}+\{\psi_1'(z_2)+\overline{\psi_1'(z_2)}\}\\ \sigma_{xy1}&=-\mathrm{i}\beta_1\{\varphi_1'(z_1)-\overline{\varphi_1'(z_1)}\}-\mathrm{i}\beta_2\{\psi_1'(z_2)-\overline{\psi_1'(z_2)}\}\end{aligned}\right\} \tag{16-46}$$

式中

$$p_j=-a_{11}\beta_j^2+a_{12},\qquad t_j=-a_{12}\beta_j+a_{22}/\beta_j\qquad (j=1,2)$$

16.2.3 基本条件与本征展开

由图16－5可知，层间连续条件为

当$\theta=0$时，有

$$(u_x+\mathrm{i}u_y)_1=(u_x+\mathrm{i}u_y)_2,\qquad (\sigma_{yy}-\mathrm{i}\sigma_{xy})_1=(\sigma_{yy}-\mathrm{i}\sigma_{xy})_2 \tag{16-47}$$

由于对称状态⟨α⟩的存在与分层表面无摩擦的假定，在反对称状态

---

* 文献[16.5]给出同样的结论。



(β)中，分层上下表面没有相对法向位移和切向面力，所以在分层上下表面上有以下条件：

$$\left.\begin{aligned} u_{y1}\Big|_{\theta=\pi} &= u_{y2}\Big|_{\theta=-\pi} \\ \sigma_{xy1}\Big|_{\theta=\pi} &= \sigma_{xy2}\Big|_{\theta=-\pi} = 0 \\ \sigma_{yy1}\Big|_{\theta=\pi} &= \sigma_{yy2}\Big|_{\theta=-\pi} \end{aligned}\right\} \tag{16-48}$$

为保证层间裂纹尖端附近应力场解答的精确度，这两类条件必须得到精确满足。

下面用本征展开方法确定位移场与应力场的本征展开式。

由于力学模型中存在位移边界，所以位移与应力解答中的复变函数应包含幂函数与指数函数这两类，即令

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(z_1) &= \varphi_{11}(z_1) + \varphi_{21}(z_1), \qquad \psi_1(z_2) = \psi_{11}(z_2) + \psi_{21}(z_2) \\ \varphi_2(z) &= \varphi_{12}(z) + \varphi_{22}(z), \qquad \Omega_2(z) = \Omega_{12}(z) + \Omega_{22}(z) \end{aligned}\right\} \tag{16-49}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{11}(z_1) &= A_1' z_1^{\lambda} + B_1' z_1^{\bar{\lambda}}, \qquad \psi_{11}(z_2) = C_1' z_2^{\lambda} + D_1' z_2^{\bar{\lambda}} \\ \varphi_{12}(z) &= A_2' z^{\lambda} + B_2' z^{\bar{\lambda}}, \qquad \Omega_{12}(z) = C_2' z^{\lambda} + D_2' z^{\bar{\lambda}} \end{aligned}\right\} \tag{16-50}$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{21}(z_1) &= E_1' e^{\lambda z_1} + F_1' e^{\bar{\lambda} z_1}, \qquad \psi_{21}(z_2) = G_1' e^{\lambda z_2} + H_1' e^{\bar{\lambda} z_2} \\ \varphi_{22}(z) &= E_2' e^{\lambda z} + F_2' e^{\bar{\lambda} z}, \qquad \Omega_{22}(z) = G_2' e^{\lambda z} + H_2' e^{\bar{\lambda} z} \end{aligned}\right\} \tag{16-51}$$

式中，函数的第一个下标表示函数类型，第二个下标表示层号；λ 为复数，A_1'，B_1'，…为待定复系数，表示为 α_k，则

$$\alpha_k = \alpha_k^{(R)} + i\alpha_k^{(I)}, \qquad \alpha = A', B', C', D', E', F', G', H' \tag{16-52}$$

式中，$k=1,2$，表示层号。

将式(16 50)代入式(16－38)、式(16－39)和式(16－45)、式(16－46)，得到以幂函数表示的位移和应力。使其满足分层表面边界条件与层间连续条件式(16－47)、式(16－48)，可得关于幂



函数待定系数的齐次线性方程组：

$$4\mu(p_1 A_1' + p_1 \overline{B_1'} + p_2 C_1' + p_2 \overline{D_1'}) = \kappa A_2' + \kappa \overline{B_2'} - C_2' - \overline{D_2'} \tag{16-53}$$

$$4\mu(t_1 A_1' - t_1 \overline{B_1'} + t_2 C_1' - t_2 \overline{D_1'}) = \kappa A_2' - \kappa \overline{B_2'} + C_2' - \overline{D_2'} \tag{16-54}$$

$$2(A_1' + \overline{B_1'} + C_1' + \overline{D'_1}) = A_2' + \overline{B_2'} + C_2' + \overline{D_2'} \tag{16-55}$$

$$2(\beta_1 A_1' - \beta_1 \overline{B_1'} + \beta_2 C_1' - \beta_2 \overline{D_1'}) = - A_2' + \overline{B_2'} + C_2' - \overline{D_2'} \tag{16-56}$$

$$(\beta_1 A_1' + \beta_1 C_1')e^{2\pi\lambda} - \beta_1 \overline{B_1'} - \beta_2 \overline{D_1'} = 0 \tag{16-57}$$

$$(A_2 - C_2)e^{-2\pi\lambda} - (\overline{B}_2 - \overline{D}_2) = 0 \tag{16-58}$$

$$2(A_1 + C_1)e^{2\pi\lambda} + 2(\overline{B}_1 + \overline{D}_1) = A_2 + C_2 + (\overline{B}_2 + \overline{D}_2)e^{2\pi\lambda} \tag{16-59}$$

$$4\mu\{(t_1 A_1 + t_2 C_1)e^{2\pi i\lambda} - (t_1 \overline{B}_1 + t_2 \overline{D}_1)\} = \kappa A_2 + C_2 - (\kappa\overline{B}_2 + \overline{D}_2)e^{2\pi i\lambda} \tag{16-60}$$

类似可得关于指数函数待定系数的齐次线性方程组：

$$4\mu(p_1 E_1' + p_1 \overline{F_1'} + p_2 G_1' + p_2 \overline{H_1'}) = \kappa E_2' + \kappa \overline{F_2'} - G_2' - \overline{H_2'} \tag{16-61}$$

$$4\mu(t_1 E_1' - t_1 \overline{F_1'} + t_2 G_1' - t_2 \overline{H_1'}) = \kappa E_2' - \kappa \overline{F_2'} + G_2' - \overline{H_2'} \tag{16-62}$$

$$2(E_1' + \overline{F_1'} + G_1' + \overline{H_1'}) = E_2' + \overline{F_2'} + G_2' + H_2' \tag{16-63}$$

$$2(\beta_1 E_1' - \beta_1 \overline{F_1'} + \beta_2 G_1' - \beta_2 \overline{H_1'}) = E_2' - \overline{F_2'} - G_2' + \overline{H_2'} \tag{16-64}$$

$$\beta_1 E_1' - \beta_1 \overline{F}_1' + \beta_2 G_1' - \beta_2 \overline{H}_1' = 0 \tag{16-65}$$

$$E_2' - \overline{F}_2' - \overline{G}_2' + \overline{H}_2' = 0 \tag{16-66}$$

$$2(E_1' + \overline{F}_1' + G_1' + \overline{H}_1') - E_2' + \overline{F}_2' + G_2' + \overline{H}_2' - 0 \tag{16-67}$$

$$4\mu(t_1 E_1' - t_1 \overline{F}_1' + t_2 G_1' - t_2 \overline{H}_1') - \kappa E_2' - \kappa \overline{F}_2' + G_2' - \overline{H}_2' \tag{16-68}$$



根据上述两组方程具有非零解的条件与应变能有界条件，可分别得到幂函数和指数函数中的本征值以及相关待定系数间的关系，并最终确定位移场与应力场的本征展开式。

首先，求解关于幂函数待定系数的齐次线性方程组式(16－53)至式(16－60)，得到两组实本征值：

$$\lambda_1 = \frac{n}{2} \qquad (n = 1,3,5,\cdots) \tag{16-69}$$

$$\lambda_2 = n \qquad (n = 1,2,3,\cdots) \tag{16-70}$$

于是，式(16－50)中的幂函数改写为

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{11}(z_1) &= A_1 z_1^{\lambda_1} + C_1 z_1^{\lambda_2}, \qquad \psi_{11}(z_1) = B_1 z_1^{\lambda_1} + D_1 z_1^{\lambda_2} \\ \varphi_{12}(z) &= A_2 z^{\lambda_1} + C_2 z^{\lambda_2}, \qquad \Omega_{12}(z) = B_2 z^{\lambda_1} + D_2 z^{\lambda_2} \end{aligned}\right\} \tag{16-71}$$

式中，$A_1, C_1, \cdots$ 为新的待定复系数，其实部和虚部仍表示为式(16－52)的形式。将式(16－71)代入式(16－38)、式(16－39)和式(16－44)、式(16－45)以及式(16－47)、式(16－48)，可得各待定系数间的关系如下：

$$\left.\begin{aligned} & A_1^{(R)} = B_1^{(R)} = A_2^{(R)} = B_2^{(R)} = 0 \\ & A_1^{(I)} = f_2 A_2^{(I)}, \qquad B_1^{(I)} = f_4 A_2^{(I)}, \qquad B_2^{(I)} = f_8 A_2^{(I)} \\ & C_1^{(R)} = g_{15} C_2^{(R)} + g_{17} D_2^{(R)}, \qquad D_1^{(R)} = g_{35} C_2^{(R)} + g_{37} D_2^{(R)} \\ & C_1^{(I)} = g_2 C_2^{(I)}, \qquad D_1^{(I)} = g_4 C_2^{(I)}, \qquad D_2^{(I)} = C_2^{(I)} \end{aligned}\right\} \tag{16-72}$$

这就是对应于每一个本征值，待定系数所需满足的关系。其中的系数为

$$f_2 = f_{26} + f_{28} f_8, \qquad f_4 = f_{46} + f_{48} f_8$$

$$f_8 = -\frac{4\mu(t_1 f_{26} + t_2 f_{46}) - \kappa}{4\mu(t_1 f_{28} + t_2 f_{48}) - 1}$$

$$f_{26} = \frac{\beta_2 - 1}{2(\beta_1 - \beta_2)}, \qquad f_{28} = \frac{\beta_2 + 1}{2(\beta_1 - \beta_2)}$$

$$f_{46} = \frac{\beta_1 - 1}{2(\beta_2 - \beta_1)}, \qquad f_{48} = \frac{\beta_1 + 1}{2(\beta_2 - \beta_1)}$$



$$g_2 = \frac{\beta_2(\kappa+1)}{4\mu(t_1\beta_2 - t_2\beta_1)}, \qquad g_4 = -\frac{\beta_1(\kappa+1)}{4\mu(t_1\beta_2 - t_2\beta_1)}$$

$$g_{15} = \frac{\kappa - 2\mu p_2}{4\mu(p_1 - p_2)}, \qquad g_{17} = -\frac{1 + 2\mu p_2}{4\mu(p_1 - p_2)}$$

$$g_{35} = \frac{\kappa - 2\mu p_1}{4\mu(p_2 - p_1)}, \qquad g_{37} = -\frac{1 + 2\mu p_1}{4\mu(p_2 - p_1)}$$

可见,对于半整数本征值 $\lambda_1 = n/2$,独立的待定系数为 $A_2^{(1)}$;对于整数本征值 $\lambda_2 = n$,独立的待定系数为 $C_2^{(R)}$,$C_2^{(1)}$ 和 $D_2^{(1)}$。

其次,求解关于指数函数待定系数的齐次线性方程组式(16-61)至式(16-68)。可以看出以上方程中不含 λ,即对于任意 $\lambda \neq 0$,只要式(16-61)至式(16-68)所确定的系数间的关系成立,分层表面与层间的条件即可得到满足。不妨取 $\lambda = 1$,式(16-51)中的指数函数改写为

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{21}(z_1) = E_1 e^{z_1}, \qquad \psi_{21}(z_2) = F_1 e^{z_2} \\ \varphi_{22}(z) = E_2 e^{z}, \qquad \Omega_{22}(z) = F_2 e^{z} \end{aligned}\right\} \tag{16-73}$$

式中,$E_1, E_2, \cdots$ 为新的待定复系数,其实部和虚部仍表示为式(16-52)的形式。将式(16-73)代入式(16-38)、式(16-39)、式(16-44)、式(16-45)以及式(16-47)、式(16-48),可得各待定系数间的关系如下:

$$\left.\begin{aligned} E_1^{(R)} = g_{15}E_2^{(R)} + g_{17}F_2^{(R)}, \qquad F_1^{(R)} = g_{35}E_2^{(R)} + g_{37}F_2^{(R)} \\ E_1^{(1)} = g_2 E_2^{(1)}, \qquad F_1^{(1)} = g_4 E_2^{(1)}, \qquad F_2^{(1)} = E_2^{(1)} \end{aligned}\right\} \tag{16-74}$$

可见指数函数中的独立待定系数为 $E_2^{(R)}$,$E_2^{(1)}$ 和 $F_2^{(R)}$。

引入新的待定系数,根据式(16-72)和式(16-74),将两类复变函数中的独立待定系数表示为

$$\left.\begin{aligned} A_{2,2m-1}^{(1)} = P_m^{(1)}, \qquad C_{2m}^{(R)} + iC_{2m}^{(1)} = Q_m^{(R)} + iQ_m^{(1)} \\ D_{2m}^{(R)} = T_m \qquad (m = 1,2,3,\cdots) \\ E_2^{(R)} + iE_2^{(1)} = R^{(R)} + iR^{(1)}, \qquad F_2^{(R)} = S^{(R)} \end{aligned}\right\} \tag{16-75}$$



将式(16－72)与式(16－74)分别代入式(16－71)、式(16－73)，再代入式(16－38)、式(16－39)和式(16－44)、式(16－45)，并考虑到式(16－75)，得到位移场与应力场的本征展开式如下：

$$u_{jk}=\sum_{m=1}^{M} r^{m-\frac{1}{2}} P_m^{(1)} s_{jkm}^{(1)}(\theta)+\sum_{m=1}^{M} r^m\left[Q_m^{(R)} t_{jkm}^{(R)}(\theta)+Q_m^{(1)} t_{jkm}^{(1)}(\theta)+T_m r_{jkm}(\theta)\right]+R^{(R)} b_{jk}^{(R)}(r,\theta)+R^{(1)} b_{jk}^{(1)}(r,\theta)+S^{(R)} d_{jk}(r,\theta) \tag{16-76}$$

$$\sigma_{ijk}=\sum_{m=1}^{M} r^{m-\frac{3}{2}} P_m^{(1)} g_{ijkm}^{(1)}(\theta)+\sum_{m=1}^{M} r^{m-1}\left[Q_m^{(R)} h_{ijkm}^{(R)}(\theta)+Q_m^{(1)} h_{ijkm}^{(1)}(\theta)+T_n e_{ijkm}(\theta)\right]+R^{(R)} a_{ijk}^{(R)}(r,\theta)+R^{(1)} a_{ijk}^{(1)}(r,\theta)+S^{(R)} c_{ijk}(r,\theta) \tag{16-77}$$

式中，函数 $g_{ijkm}^{(1)}(\theta)$ 等为已知函数；k 为层号；M 为展开式所取项数。位移场和应力场的本征展开式精确满足了所有基本方程、分层表面边界条件以及层间连续条件。

由式(16－77)可见，$m=1$ 的项即为奇异项，分层前沿的奇异应力场为

$$\sigma_{yy1}\Big|_{\theta=0}=\sigma_{yy2}\Big|_{\theta=0}=0,\qquad \sigma_{xy1}\Big|_{\theta=0}=r^{-\frac{1}{2}}(\beta_1 f_2+\beta_2 f_4)P_1^{(1)} \tag{16-78}$$

可见，只存在单调奇异的切应力，相应的应力强度因子定义为

$$K_{\text{II}}=\lim_{r\to 0}\sqrt{2\pi r}\sigma_{xy1}\Big|_{\theta=0}=\sqrt{2\pi}(\beta_1 f_2+\beta_2 f_4)P_1^{(1)} \tag{16-79}$$

16.2.4 应力强度因子变分解法

与 16.1 节相同，采用分区广义变分原理近似满足分层表面以外的边界条件。由于所有基本方程、分层表面静力边界条件、位移连续条件与层间连续条件预先精确满足，分层表面以外的边界条件可表示为



$$\sum_{k=1}^{2}\int_{S_{pk}}(\sigma_{ij}n_j-\bar{p}_i)_k\delta u_{ik}\mathrm{d}s-\sum_{k=1}^{2}\int_{S_{uk}}(u_{ik}-\bar{u}_{ik})\delta\sigma_{ijk}n_{jk}\mathrm{d}s=0$$

(16－80)

式中,$k=1,2$,为层号;$\bar{p}_{ik}$为静力边界S_{pk}上的已知边界力;$\bar{u}_{ik}$为位移边界S_{uk}上的已知位移。上式中只有线积分而无面积分,计算简单、方便。

由式(16－80)可得关于位移场和应力场中所有待定系数的线性方程组,求解可得所有待定系数。当项数M足够时,奇异应力场的系数随项数的增加呈稳定态势,这就是收敛的应力强度因子。同时,也可确定位移场与应力场收敛解答。

计算例题:

在图16－5中,取外载荷为

$$p_1=-p,\qquad p_2=(a+b)p$$

式中,p为载荷因子。

每层材料常数(1方向表示纤维方向)为

$$E_{11}=137.9\ \text{GPa},\qquad E_{22}=E_{33}=14.48\ \text{GPa}$$

$$G_{12}=5.86\ \text{GPa},\qquad \nu_{12}=\nu_{13}=\nu_{23}=0.21$$

考虑到应力与载荷呈线性关系,将应力强度因子写成

$$K_{\text{II}}=\sqrt{2\pi}pX,\qquad X=(\beta_1f_2+\beta_2f_1)\frac{P_1^{(1)}}{p}$$

层合梁及其分层大小以量纲为1的尺寸形式给出。不同情况下X随项数M增加的收敛情况如表16－6至表16－8所列。在式(16－80)中所取数值积分收敛精度为10^{-4}。

表16－6 应力强度因子K_{II}的收敛情况之一

($a=0.257\ 1,b=0.514\ 1,h_1=h_2=0.128\ 8$)

M	2	3	4	5	6
X	−1.171 4	−1.296 9	−1.340 0	−1.325 3	−1.452 6
M	7	8	9	10	15
X	−1.453 7	−1.442 5	−1.402 9	−1.378 3	−1.397 0

表 16-7 应力强度因子 K_I 的收敛情况之二
(a=0.257 1,b=0.386 4,$h_1=h_2$=0.128 8)

M	1	2	3	4	5	6
X	−0.446 0	−0.901 4	−1.365 2	−1.058 3	−1.094 0	−1.160 3
M	7	8	9	10	11	12
X	−1.166 0	−1.133 4	−1.039 5	−1.026 1	−1.107 0	−1.090 2

表 16-8 应力强度因子 K_I 的收敛情况之三
(a=0.257 1,b=0.386 4,$h_1=h_2$=0.128 8)

M	1	2	3	4	5	6
X	−0.462 5	−0.498 3	−0.686 6	−0.774 8	−0.811 1	−0.796 6
M	7	8	9	10	11	12
X	−0.794 0	−0.786 3	−0.732 9	0.783 3	−0.795 8	−0.770 6

以上计算表明,当取到4,5项时,所得应力强度因子即可满足收敛精度要求。

16.3 复合材料层合板平面复合型分层问题解析变分解法

16.3.1 力学模型的建立

图16-6(a)表示对称正交铺层复合材料层板受轴向拉力作用的情况,层间分层为边缘穿透分层。由于层板沿厚度方向的非均匀性,通过施加面内附加载荷,可将其受力状态分为⟨α⟩与⟨β⟩两种状态,如图16-6(b),(c)所示。在⟨α⟩状态中,在原有外力与附加载荷作用下,经典的直法线假设成立,层板中不存在层间应力;在⟨β⟩状态中,层板具有层间应力,这是产生分层以及导致分层扩



展的原因。下面对〈β〉状态进行研究。附加载荷集度 p_0 可由经典层合板理论确定。这里从略，请读者自行推导。

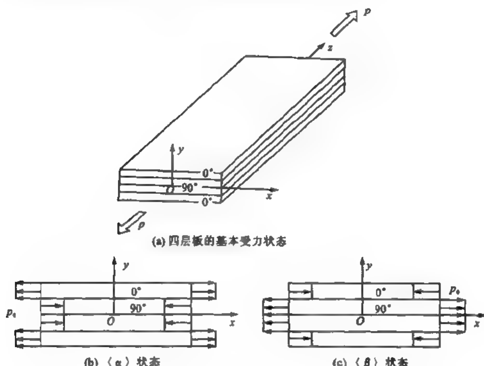


图 16-6 对称正交铺层复合材料四层板受力状态的分解

在图 16-6(c)中，利用四层板横截面的双对称性，取其 1/4 建立力学模型，如图 16-7 所示。第一层(分层以上部分)为正交各向异性层，第二层(分层以下部分)为横观各向同性层。

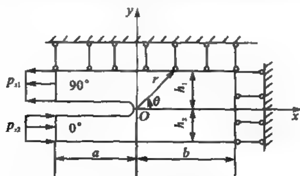


图 16-7 对称正交四层板受拉分层力学模型



16.3.2 基本条件与本征展开

与 16.2 节中平面剪切型分层问题相比可见，在平面复合型分层问题中，只是边界条件(包括需精确满足的分层表面边界条件与只能近似满足的其他条件)发生了变化。因此，两层板内位移与应力的复变函数表达式仍由式(16－38)、式(16－39)和式(16－45)、式(16－46)表示。

根据图 16－7 所示模型，层间连续条件与分层表面边界条件为

$$\left.\begin{aligned}(u_x+\mathrm{i}u_y)_1&=(u_x+\mathrm{i}u_y)_2\\(\sigma_{yy}-\mathrm{i}\sigma_{xy})_1&=(\sigma_{yy}-\mathrm{i}\sigma_{xy})_2\end{aligned}\quad(\theta=0)\right\}\tag{16-81}$$

$$\left.\begin{aligned}(\sigma_{yy}-\mathrm{i}\sigma_{xy})_1&=0\qquad(\theta=\pi)\\(\sigma_{yy}-\mathrm{i}\sigma_{xy})_2&=0\qquad(\theta=-\pi)\end{aligned}\right\}\tag{16-82}$$

下面用本征展开方法确定位移场与应力场的本征展开式。

由于力学模型中存在位移边界，所以位移与应力解答的复变函数应包含幂函数与指数函数这两类，即令

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1(z_1)&=\varphi_{11}(z_1)+\varphi_{21}(z_1),\qquad\psi_1(z_2)=\psi_{11}(z_2)+\psi_{21}(z_2)\\\varphi_2(z)&=\varphi_{12}(z)+\varphi_{22}(z),\qquad\Omega_2(z)=\Omega_{12}(z)+\Omega_{22}(z)\end{aligned}\right\}\tag{16-83}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}\varphi_{11}(z_1)&=A_1z_1^{\lambda}+B_1z_1^{\bar\lambda},\qquad\psi_{11}(z_2)=C_1z_2^{\lambda}+D_1z_2^{\bar\lambda}\\\varphi_{12}(z)&=A_2z^{\lambda}+B_2z^{\bar\lambda},\qquad\Omega_{12}(z)=C_2z^{\lambda}+D_2z^{\bar\lambda}\end{aligned}\right\}\tag{16-84}$$

$$\left.\begin{aligned}\varphi_{21}(z_1)&=E_1e^{\lambda z_1}+F_1e^{\bar\lambda z_1},\qquad\psi_{21}(z_2)=G_1e^{\lambda z_2}+H_1e^{\bar\lambda z_2}\\\varphi_{22}(z)&=E_2e^{\lambda z}+F_2e^{\bar\lambda z},\qquad\Omega_{22}(z)=G_2e^{\lambda z}+H_2e^{\bar\lambda z}\end{aligned}\right\}\tag{16-85}$$

式中，函数的第一个下标表示函数类型，第二个下标表示层号；λ 为复数；A_1，B_1，… 为待定复系数，其实部和虚部表示成



式(16－52)的形式。

定义如下的实常数：

$$b_1 = \frac{1-\beta_2}{2(\beta_1-\beta_2)}, \qquad b_2 = \frac{\beta_2+1}{2(\beta_1-\beta_2)}$$

$$d_1 = -\frac{1-\beta_1}{2(\beta_1-\beta_2)}, \qquad d_2 = \frac{\beta_1+1}{2(\beta_2-\beta_1)}$$

$$s_{11} = 2(p_1 b_2 + p_2 d_2), \qquad s_{12} = 2(p_1 b_1 + p_2 d_1)$$

$$s_{21} = 2(t_1 b_2 + t_2 d_2), \qquad s_{22} = -2(t_1 b_1 + t_2 d_1)$$

$$Q_1 = (2\mu s_{12} - \kappa)(2\mu s_{21} - 1) + (2\mu s_{11} - 1)(2\mu s_{22} - \kappa)$$

$$Q_2 = 2[(2\mu s_{11} - 1)(2\mu s_{21} - 1) + (2\mu s_{12} - \kappa)(2\mu s_{22} - \kappa)]$$

采用与16.2节相同的做法，将式(16－84)、式(16－85)分别代入式(16－38)、(16－39)和式(16－45)、(16－46)，得到以幂函数、指数函数表示的位移和应力分量。使其满足分层表面与层间的条件式(16－81)、式(16－82)，可得关于幂函数、指数函数中待定系数的齐次线性方程组。这一推导过程与16.2节类似，这里不再赘述。

根据上述两类关于待定系数的齐次线性方程组具有非零解的条件，可得本征值以及待定系数间的关系。现分别叙述如下。

第一，关于幂函数待定系数的齐次线性方程组具有非零解的条件共有两个。

(1) 第一个条件

$$Q_1 \eta^2 + Q_2 \eta + Q_1 = 0 \tag{16-86}$$

式中，系数 η 与本征值 λ_1 表示为

$$\eta = e^{2\pi i\lambda_1}, \qquad \eta = \eta_R + i\eta_I, \qquad \lambda_1 = \lambda_R + i\lambda_I \tag{16-87}$$

从而，本征值表示为

$$e^{-2\pi\lambda_I}\cos(2\pi\lambda_R) = \eta_R, \qquad e^{-2\pi\lambda_I}\sin(2\pi\lambda_R) = \eta_I \tag{16-88}$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_R &= \epsilon + \frac{n}{2} = \frac{1}{2\pi}\arctan\frac{\eta_I}{\eta_R} + \frac{n}{2} \qquad (n = 1,3,5,\cdots) \\ \lambda_I &= -\frac{1}{4\pi}\ln(\eta_R^2 + \eta_I^2) \end{aligned}\right\} \tag{16-89}$$



求解式(16-86),可得

$$\eta_{1,2}=\frac{-Q_2\pm\sqrt{Q_2^2-4Q_1^2}}{2Q_1} \tag{16-90}$$

上式又可分为两种情况:

① $f=Q_2^2-4Q_1^2>0$。此时,η 具有两个互为倒数的实根 η_1,η_2,而 λ_1 具有两个互为共轭的复根 λ_{11},λ_{12},即

$$\eta_I=0,\qquad \eta_1\eta_2=1,\qquad \lambda_{11}=\overline{\lambda_{12}},\qquad \varepsilon=0$$

由于对应于 λ_{11},λ_{12} 的复变函数表达式具有相同的形式,所以只取 λ_{11},λ_{12} 中的一个即可,并用 λ_1 表示。

② $f=Q_2^2-4Q_1^2<0$。此时,η 具有两个复根,而 λ_1 为实数,即

$$\eta_I\neq 0,\qquad \eta_R^2+\eta_I^2=1,\qquad \lambda_I=0,\qquad \varepsilon\neq 0 \tag{16-91}$$

可见,当 $\lambda_I\neq 0$ 时,$\lambda_R=\dfrac{n}{2}$;而当 $\lambda_I=0$ 时,$\lambda_R=\dfrac{n}{2}+\varepsilon$。

(2) 第二个条件

$$e^{2\pi i\lambda}-1=0 \tag{16-92}$$

求解得

$$\lambda_2=\frac{n}{2}\qquad (n=2,4,6,\cdots) \tag{16-93}$$

可以证明,应变能有界条件要求式(16-89)、式(16-93)中的 $n>0$。

对应于 λ_1,在系数间存在如下关系:

$$\left.\begin{aligned}&A_2=f_5\overline{B}_2,\qquad C_2=-\eta\overline{B}_2,\qquad D_2=-f_5/\eta B_2=\overline{\varepsilon}B_2\\&A_1=f_1\overline{B_2},\qquad B_1=f_2B_2,\qquad C_1=f_3\overline{B}_2,\qquad D_1=f_4B_2\end{aligned}\right\} \tag{16-94}$$

式中

$$f_5=-\eta\frac{(2\mu s_{12}-\kappa)+(2\mu s_{11}-1)\eta}{(2\mu s_{11}-1)+(2\mu s_{12}-\kappa)\eta},\qquad f_1=b_2f_5/\eta+b_1$$

$$f_2=b_1f_5+b_2\eta,\qquad f_3=d_2f_5/\eta+d_1,\qquad f_4=d_1f_5+d_2\eta$$



对应于λ_2，系数间关系为

$$\left.\begin{aligned}
(A_1^{(R)}+B_1^{(R)}) &= h_1(A_2^{(R)}+B_2^{(R)})\\
(A_1^{(I)}+B_1^{(I)}) &= h_2(A_2^{(I)}+B_2^{(I)})\\
(C_1^{(R)}+D_1^{(R)}) &= h_3(A_2^{(R)}+B_2^{(R)})\\
(C_1^{(I)}+D_1^{(I)}) &= h_4(A_2^{(I)}+B_2^{(I)})\\
(C_2^{(R)}+D_2^{(R)}) &= -(A_2^{(R)}+B_2^{(R)})\\
(C_2^{(I)}+D_2^{(I)}) &= (A_2^{(I)}+B_2^{(I)})
\end{aligned}\right\}\qquad(16-95)$$

式中

$$h_1=\frac{\kappa+1}{4\mu(p_1-p_2)},\qquad h_3=h_1$$

$$h_2=\frac{\beta_2(\kappa+1)}{4\mu(t_1\beta_2-t_2\beta_1)},\qquad h_4=-\frac{\beta_1}{\beta_2}h_2$$

第二，关于指数函数中待定系数的方程组中不包含λ，表明只要$\lambda\neq0$，以指数函数表示的位移和应力即可满足分层表面边界条件和层间连续条件。同时，该方程组中有两个方程是不独立的，求解可得各待定系数间存在如下关系：

$$\left.\begin{aligned}
&\overline{H}_2=-E_2,\qquad \overline{G}_2=-F_2,\qquad G_1+\overline{H}_1=-(E_1+\overline{F}_1)\\
&G_1-H_1=-\beta_1/\beta_2(E_1-\overline{F}_1)\\
&E_1+\overline{F}_1=h_1(E_2+\overline{F}_2),\qquad E_1-\overline{F}_1=h_2(E_2-\overline{F}_2)
\end{aligned}\right\}\qquad(16-96)$$

不妨取$\lambda=1$，并令

$$E_2+F_2=R=R^{(R)}+\mathrm{i}R^{(I)}\qquad(16-97)$$

于是，指数函数中的待定系数表示为

$$\left.\begin{aligned}
&G_2+H_2=-\overline{R}_2,\qquad E_1+F_1=h_1R^{(R)}+\mathrm{i}h_2R^{(I)}\\
&G_1+H_1=h_3R^{(R)}+\mathrm{i}h_4R^{(I)}
\end{aligned}\right\}\qquad(16-98)$$

为了表述方便，将幂函数中的待定系数表示为

$$\left.\begin{aligned}
&B_{2,2m-1}=P_m=P_m^{(R)}+\mathrm{i}P_m^{(I)}\\
&A_{2,2m}+B_{2,2m}=Q_m=Q_m^{(R)}+\mathrm{i}Q_m^{(I)}
\end{aligned}\quad(m=1,2,3,\cdots)\right\}\qquad(16-99)$$



这样，就得到了本征值以及相应的系数间关系。根据式(16-84)、式(16-85)与式(16-38)、式(16-39)、式(16-45)、式(16-46)，并考虑到

$$z^{i\lambda_I} = [\cos(\lambda_I \ln r) + i\sin(\lambda_I \ln r)]e^{-\lambda_I \theta} \quad (16-100)$$

可得位移场与应力场本征展开式

$$\begin{aligned} u_{ik} = &\sum_{m=1}^{M} r^{s+m-\frac{1}{2}} \{[P_m^{(R)} s_{ikm}^{(R)}(\theta) + P_m^{(I)} s_{ikm}^{(I)}(\theta)]\cos(\lambda_I \ln r) + \\ &[-P_m^{(R)} s_{ikm}^{(I)}(\theta) + P_m^{(I)} s_{ikm}^{(R)}(\theta)]\sin(\lambda_I \ln r)\} + \\ &\sum_{m=1}^{M} r^m [Q_m^{(R)} t_{ikm}^{(R)}(\theta) + Q_m^{(I)} t_{ikm}^{(I)}(\theta)] + \\ &R^{(R)} q_{ik}^{(R)}(r,\theta) + R^{(I)} q_{ik}^{(I)}(r,\theta) \end{aligned} \quad (16-101)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ijk} = &\sum_{m=1}^{M} r^{s+m-\frac{3}{2}} \{[P_m^{(R)} g_{ijkm}^{(R)}(\theta) + P_m^{(I)} g_{ijkm}^{(I)}(\theta)]\cos(\lambda_I \ln r) + \\ &[-P_m^{(R)} g_{ijkm}^{(I)}(\theta) + P_m^{(I)} g_{ijkm}^{(R)}(\theta)]\sin(\lambda_I \ln r)\} + \\ &\sum_{m=1}^{M} r^{m-1} [Q_m^{(R)} h_{ijkm}^{(R)}(\theta) + Q_m^{(I)} h_{ijkm}^{(I)}(\theta)] + \\ &R^{(R)} p_{ijk}^{(R)}(r,\theta) + R^{(I)} p_{ijk}^{(I)}(r,\theta) \end{aligned} \quad (16-102)$$

式中，关于θ的函数为已知函数。式(16-102)中$m=1$的项为奇异项，系数$P_1^{(R)}$，$P_1^{(I)}$即为奇异应力场的控制量(广义应力强度因子)。

以下讨论式(16-89)中本征值的两种情况。

① 当材料常数满足$f=Q_2^2-4Q_1^2>0$时，本征值λ_I为复数，分层尖端延长线上的奇异应力场为

$$\begin{aligned} \sigma_{yy1}\big|_{\theta=0} = \sigma_{yy2}\big|_{\theta=0} = &r^{-\frac{1}{2}}(f_1+f_2+f_3+f_4)\cdot \\ &[(P_1^{(R)}+2\lambda_I P_1^{(I)})\cos(\lambda_I \ln r) + \\ &(P_1^{(R)}-2\lambda_I P_1^{(R)})\sin(\lambda_I \ln r)] \end{aligned} \quad (16-103)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xy1}\big|_{\theta=0} = \sigma_{xy2}\big|_{\theta=0} = &r^{-\frac{1}{2}}[\beta_1(f_1-f_2)+\beta_2(f_3-f_4)]\cdot \\ &[(P_1^{(I)}-2\lambda_I P_1^{(I)})\cos(\lambda_I \ln r) + \\ &(P_1^{(R)}+2\lambda_I P_1^{(I)})\sin(\lambda_I \ln r)] \end{aligned} \quad (16-104)$$



可见，应力场具有振荡奇异性，奇异性阶次为 $-1/2$。

显而易见，分层尖端附近应力场的振荡奇异性必然导致分层表面法向位移的"互相穿入"，这显然是不合理的。但是，就所讨论的平面复合型分层问题而言，这个问题属于小范围问题，并且可以通过在裂尖附近引入"接触区模型"予以解决。详细讨论见16.4节。

② 当材料常数使得 $f=Q_2^2-4Q_1^2<0$ 时，由式(16-91)知 $\lambda_{\mathrm{I}}=0$，而 $\epsilon\neq0$。可见，此时分层尖端附近应力场仅具有单调奇异性，且奇异性阶次由 $-\frac{1}{2}$ 变为 $\epsilon-\frac{1}{2}$。应力强度因子可定义为

$$K_{\mathrm{I}}=\lim_{r\to0}\sqrt{2\pi}r^{\frac{1}{2}-\epsilon}\sigma_{yy1}\Big|_{\theta=0}=\sqrt{2\pi}(f_1+f_2+f_3+f_4)P_1^{(R)} \tag{16-105}$$

$$K_{\mathrm{II}}=\lim_{r\to0}\sqrt{2\pi}r^{\frac{1}{2}-\epsilon}\sigma_{xy1}\Big|_{\theta=0}=-\sqrt{2\pi}[\beta_1(f_1-f_2)+\beta_2(f_3-f_4)]P_1^{(I)} \tag{16-106}$$

16.3.3　应力强度因子变分解法

根据16.2节介绍的分区广义变分原理，对于同时存在静力与位移边界的情况，分层表面以外的边界条件可表示为

$$\sum_{k=1}^{2}\int_{S_{pk}}(\sigma_{ij}n_j-\bar{p}_i)_k\delta u_{ik}\,\mathrm{d}s-\sum_{k=1}^{2}\int_{S_{uk}}(u_{ik}-\bar{u}_{ik})\delta\sigma_{ijk}n_{jk}\,\mathrm{d}s=0 \tag{16-107}$$

式中，$k=1,2$，表示层号；$\bar{p}_{ik}$ 为静力边界 S_{pk} 上的已知边界力；$\bar{u}_{ik}$ 为位移边界 S_{uk} 上的已知位移。

由上式可得关于位移场和应力场中所有待定系数的线性方程组，求解这个方程组可得所有待定系数。当项数 M 足够时，奇异应力场的系数随项数的增加呈稳定态势，这样就得到了收敛的奇异应力场控制量(广义应力强度因子)。同时，也可确定位移场与应力场的收敛解答。



计算例题

在图 16-7 的力学模型中，外载荷表示为

$$p_{x1} = -p, \qquad p_{x2} = p$$

式中，p 为与载荷相关的常量。

每层材料常数(1 方向表示纤维方向)为

$$E_{11} = 137.9 \text{ GPa}, \quad E_{22} = E_{33} = 14.48 \text{ GPa}$$

$$G_{12} = 5.86 \text{ GPa}, \qquad \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.21$$

计算求得特征值的虚部为

$$\lambda_1 = 0.069\,015$$

在这种情况下，分层尖端附近应力场具有振荡奇异性。考虑到应力与载荷呈线性关系，将奇异应力场控制量表示为

$$P_1^{(R)} = pX, \qquad P_1^{(I)} = pY$$

假定分层尖端邻域处于平面应变状态。下面给出层板的量纲为 1 的尺寸取不同值时，X，Y 随项数 M 增加的收敛情况，如表 16-9至表 16-11 所列。在式(16-107)中所取数值积分收敛精度为 EPS$=10^{-4}$。

表 16-9　奇异应力场控制量的收敛情况之一

(a=0.082 2，b=0.164 5，h_1=h_2=0.164 5)

M	2	3	4	5	6	7
$X\times100$	−0.596 6	−0.032 4	−1.890 1	−0.317 9	−0.310 9	−0.312 3
$Y\times100$	0.886 8	0.678 0	0.709 6	0.837 9	0.837 3	0.832 5
M	8	9	10	11	12	13
$X\times100$	−0.314 4	0.305 7	−0.314 8	−0.311 6	−0.327 0	−0.318 8
$Y\times100$	0.833 2	0.838 0	0.837 3	0.838 0	0.833 6	0.832 8



表 16-10 奇异应力场控制量的收敛情况之二

(a=0.082 2,b=0.329 0,$h_1=h_2$=0.164 5)

M	2	3	4	5	6
X×100	-0.385 4	-1.266 7	-0.687 0	-0.737 2	-0.733 0
Y×100	0.939 4	1.256 4	0.994 5	1.021 8	1.013 4
M	7	8	9	10	11
X×100	-0.725 0	-0.727 8	-0.717 0	-0.725 3	-0.724 7
Y×100	1.018 6	1.016 5	1.018 3	1.011 6	1.008 3

表 16-11 奇异应力场控制量的收敛情况之三

(a=0.257 1,b=0.386 4,$h_1=h_2$=0.128 8)

M	1	2	3	4	5	6
X×100	-1.229 6	-0.061 9	-0.715 4	-0.944 1	-0.728 0	-0.742 4
Y×100	-3.829 4	-0.811 4	1.160 9	1.089 7	1.049 4	1.066 2
M	7	8	9	10	11	12
X×100	-0.747 0	-0.742 7	-0.861 5	-0.772 2	-0.774 1	-0.760 3
Y×100	1.036 6	1.040 0	0.925 8	1.042 3	1.047 6	1.042 1

由上述计算结果可以看出,当应力与位移展开式取 5 项左右后,奇异应力场控制量已基本收敛。尤其是数值较大的一个,收敛得更好。计算中还发现,当取 9 项时,奇异应力场控制量出现比较大的“跳动”,但此后结果并未发散,而是“波动”地趋于稳定。为此,上述计算中在 $M=9$ 之后,提高了式(16-107)中数值积分的收敛精度,取 EPS-5×10^{-5}。结果表明,数值积分精度的提高,使得奇异应力场控制量在“跳动”之后能够很快地趋于平稳,从而保证了结果的收敛性。

16.4 振荡奇异性与小范围接触研究

在前面的分析中，将层板内的分层看成层间裂纹，采用界面断裂力学方法进行了分析。在层板受轴拉分层问题中发现，所得层间裂纹尖端附近应力场具有振荡奇异性，且分层表面法向位移将产生互相“穿入”现象。这一现象在界面裂纹问题中经常会遇到。这一问题在物理上是无法解释与不可接受的。它的存在表明所建立的力学模型对裂纹尖端附近应力与位移场的描述是存在欠缺的。

在界面断裂力学中，对这一问题的研究可分为两类：一是研究互相穿入区的范围，并分析穿入区的存在对解答的影响，从而确定解答的可信程度。如 Rice 和 Sih[16.6] 指出在一般情况下，穿入区远远小于裂纹尺寸。可以认为存在一个包围着穿入区的 K 控制区，在这个区域内断裂力学的解答是正确的；但是对于纯剪状态下的界面裂纹来说，穿入区比较大，其影响不可忽略。另一类研究则侧重于建立新的力学模型以消除振荡奇异性，如接触区模型(Comninou 模型[16.7])、界面层模型等。

就所研究的分层问题而言，反平面剪切型分层问题中无振荡奇异性。层合梁的分层属于平面剪切型的，由于横向压力的作用使得分层上下表面接触，故不存在振荡奇异性，只有正交层板的分层问题中存在应力场的振荡奇异性与分层表面法向位移的互相穿入问题。

下面从两方面进行研究：① 对正交层板受拉分层问题，研究分层表面法向位移互相穿入区的大小；② 在裂纹尖端附近引入接触区，分析接触区大小对解的影响。



16.4.1 正交层板分层表面位移穿入区分析

根据16.3节的分析，正交层板分层表面法向位移为

$$u_{y1}=\sum_{m=1}^{M} r^{m-\frac{1}{2}}a_1[\cos(\lambda_1\ln r)P_m^{(I)}+\sin(\lambda_1\ln r)P_m^{(R)}]\cos(m\pi)+\sum_{m=1}^{M} r^m b_1\cos(m\pi)Q_m^{(1)}+b_1e^{-r}R^{(1)} \tag{16-108}$$

$$u_{y2}=\sum_{m=1}^{M} r^{m-\frac{1}{2}}a_2[\cos(\lambda_1\ln r)P_m^{(I)}+\sin(\lambda_1\ln r)P_m^{(R)}]\cos(m\pi)+\sum_{m=1}^{M} r^m b_1\cos(m\pi)Q_m^{(1)}+b_1e^{-r}R^{(1)} \tag{16-109}$$

式中，a_1，a_2 和 b_1 为与材料相关的常数。由此可得分层表面法向位移差

$$\Delta u_y=u_{y1}-u_{y2}=r^{-\frac{1}{2}}(a_1-a_2)[\cos(\lambda_1\ln r)P_1^{(R)}+\sin(\lambda_1\ln r)P_1^{(I)}] \tag{16-110}$$

式中，下标1，2表示分层上下表面。对于上节计算的层板，$a_1=-1.966\,7$，$a_2=2.200\,6$。

令

$$\tan\psi=P_1^{(R)}/P_1^{(I)} \tag{16-111}$$

则

$$\Delta u_y=r^{-\frac{1}{2}}(a_1-a_2)\sqrt{(P_1^{(R)})^2+(P_1^{(I)})^2}\sin(\lambda_1\ln r+\psi) \tag{16-112}$$

令 Δu_y，可得

$$r=\exp\left[\frac{1}{\lambda_1}(k\pi-\psi)\right]\qquad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots) \tag{16-113}$$

由此式即可求出穿入区的大小。

下面对表16-9、表16-10给出的结果进行讨论。

算例一 裂纹的量纲为1的长度 $a=0.082\,2$。取奇异场控制

量的收敛值为

$$P_1^{(R)} = -0.31 \times 10^{-2}, \qquad P_1^{(1)} = 0.83 \times 10^{-2}$$

则

$$\psi = -0.357\ 4$$

代入式(16 - 113)可得 Δu_y 的零点位置，如表 16 - 12 所列。为简便起见，只给出大于和小于分层区长度的两点位置。

表 16 - 12　分层上下表面接触点的位置

k	-1	0
r	3.018×10^{-18}	1.774×10^{2}

同时，计算给出，在 $3.018 \times 10^{-18} < r < 1.774 \times 10^2$ 上，$\Delta u_y > 0$。由此可见，穿入区的尺寸为

$$r_c = 3.018 \times 10^{-18}$$

算例二　裂纹的量纲为 1 的长度 $a = 0.257\ 1$。取奇异场控制量的收敛值为

$$P_1^{(R)} = -0.74 \times 10^{-2}, \qquad P_1^{(1)} = 1.04 \times 10^{-2}$$

则

$$\psi = -0.618\ 4$$

代入式(16 - 113)可得 Δu_y 的零点位置，如表 16 - 13 所列。

表 16 - 13　分层上下表面接触点的位置

k	-1	0
r	1.32×10^{-16}	7.79×10^{3}

同时，计算可知，在 $1.32 \times 10^{-16} < r < 7.79 \times 10^3$ 上，$\Delta u_y > 0$。由此可见，穿入区的尺寸为

$$r_c = 1.32 \times 10^{-16}$$

可见，分层上下表面接触点到分层前沿的距离，或远大于分层长度，或远小于分层长度，且在 $r > r_c$ 的分层表面上恒有 $\Delta u_y > 0$。由此可见，振荡奇异性与位移穿入区的影响范围非常小，对解的影响可以忽略。



16.4.2 正交层板分层问题的接触区修正

为进一步分析应力的振荡奇异性与位移的互相穿入对解答的影响，在正交层板层间裂纹尖端附近引入接触区，如图 16－8 所示。Ⅰ区为裂纹表面接触区，Ⅱ区为非接触区(K 控制区)；第一层为正交各向异性层，第二层为横观各向同性层。

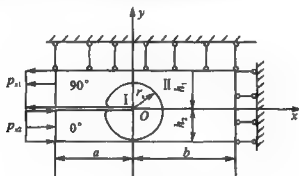


图 16－8 含接触区的正交层板分层力学模型

假定接触区内裂纹表面无摩擦，则接触区内位移场和应力场的本征展开式与层合梁受侧压分层情况相同。考虑到接触区非常小，根据式(16－76)、式(16－77)，接触区位移与应力表示为

$$u_{jk}^{1}=r^{\frac{1}{2}}f_{jk}^{(1)}(\theta)U^{(1)}+b_{jk}^{(R)}(r,\theta)V^{(R)}+b_{jk}^{(1)}(r,\theta)V^{(1)}+d_{jk}^{(R)}(r,\theta)W^{(R)} \quad (16-114)$$

$$\sigma_{ijk}^{1}=r^{-\frac{1}{2}}e_{ijk}^{(1)}(\theta)U^{(1)}+a_{ijk}^{(R)}(r,\theta)V^{(R)}+a_{ijk}^{(1)}(r,\theta)V^{(1)}+c_{ijk}^{(R)}(r,\theta)W^{(R)} \quad (16-115)$$

式中，$U^{(1)}$，$V^{(R)}$，…为待定系数；函数 $e_{ijk}^{(1)}(\theta)$，$f_{jk}^{(1)}(\theta)$，$a_{ijk}^{(R)}(r,\theta)$，…为已知函数；$k=1,2$，表示层号，位移与应力函数的上标Ⅰ表示接触区。根据16.2 节的分析，接触区内不存在应力的振荡奇异性与位移的互相穿入问题。

非接触区内的位移场 u_{jk}^{II} 和应力场 $\sigma_{ijk}^{\mathrm{II}}$ 由式(16－101)、式(16－102)给出。



上述两区位移场和应力场已经满足所有基本方程、分层表面边界条件与层间连续条件。以下利用变分解法确定位移和应力本征展开式中的待定系数，除了要使裂纹表面以外的边界条件得以满足，还要满足两区之间的交界条件。

根据分区广义变分原理，裂纹表面以外的边界条件与两区之间的交界条件表示为

$$\sum_{k=1}^{2}\left\{\int_{S_{pk}}[\sigma_{ij}n_j-\bar{p}_i]_k^{\mathrm{II}}\delta u_{ik}^{\mathrm{II}}\mathrm{d}s-\int_{S_{uk}}[u_i-\bar{u}_i]_k^{\mathrm{II}}\delta\sigma_{ijk}^{\mathrm{II}}n_{jk}\mathrm{d}s+\right.$$
$$\left.\int_{S_k^*}[\sigma_{ijk}^{\mathrm{I}}n_{jk}^{\mathrm{I}}-\sigma_{ijk}^{\mathrm{II}}n_{jk}^{\mathrm{II}}]\delta u_{ik}^{\mathrm{I}}\mathrm{d}s+\int_{S_k^*}[u_{ik}^{\mathrm{I}}-u_{ik}^{\mathrm{II}}]\delta\sigma_{ijk}^{\mathrm{II}}n_{jk}^{\mathrm{II}}\mathrm{d}s\right\}=0$$

(16－116)

式中，S_{pk}和S_{uk}分别为Ⅱ区的静力与位移边界，S_k^*表示两区在第k层中的交界。

将位移场与应力场展开式代入上式，得到关于所有待定系数的线性方程组，求解可得所有待定系数。当项数足够多后，可得到收敛的非接触区奇异场控制量和接触区应力强度因子K_{II}。

应当指出，所引入的接触区主要是保证裂纹表面接触，至于接触区形状则无特别要求。为计算简便，取接触区为以裂尖为圆心、r_0为半径的圆，如图16－8所示。

取两区的材料参数、非接触区的外载荷与16.3节相同，非接触区的奇异应力场控制量与接触区应力强度因子表示为

$$P_1^{(R)}=pX,\qquad P_1^{(1)}=pY$$

$$K_{\mathrm{II}}=\sqrt{2\pi}pZ,\qquad Z=(\beta_1 f_2+\beta_2 f_4)\frac{U_1^{(1)}}{p}$$

前面的分析已经表明接触区非常小。但是，为保证数值计算得以正常进行，应将接触区尺寸放大。表16－14、表16－15给出了层板的量纲为1的尺寸与接触区尺寸取不同值时，X,Y,Z随项数M增加的收敛情况。



表 16-14 非接触区奇异场控制量与接触区应力强度因子的收敛情况之一
($a=0.0822$, $b=0.1645$, $h_1=h_2=0.1645$, $r_0=a/1000$)

M	5	6	7	8	9	10
X×100	−0.314 4	−0.325 3	0.314 9	0.305 2	−0.310 7	−0.311 2
Y×100	0.838 1	0.832 3	0.837 5	0.834 7	0.835 4	0.837 2
Z×100	5.990 9	5.905 4	5.984 3	5.994 3	5.980 9	5.994 0

表 16-15 非接触区奇异场控制量与接触区应力强度因子的收敛情况之二
($a=0.2571$, $b=0.3864$, $h_1=h_2=0.1288$, $r_0=a/1000$)

M	1	2	3	4	5	6
X×100	−1.227 1	−0.058 9	−0.712 9	−0.936 5	−0.724 0	−0.738 6
Y×100	−3.811 0	0.809 0	1.160 3	1.088 7	1.048 6	1.065 6
Z×100	−216.03	6.583 6	7.463 0	6.160 2	6.493 4	6.589 6
M	7	8	9	10	11	12
X×100	−0.740 0	−0.737 1	−0.768 0	−0.647 6	−0.774 2	−0.763 3
Y×100	1.038 6	1.041 8	1.024 3	1.327 1	1.026 8	1.057 1
Z×100	6.359 2	6.395 4	6.151 8	9.065 7	6.152 8	6.396 1

与表16-9、表16-11相比可见，所得非接触区的奇异应力场控制量与接触区应力强度因子是收敛的，并且在$r_0=a/1\,000$的情况下，接触区对解答的影响已经非常小。如果根据前面的分析将接触区的尺寸实际大小(10^{-16}左右)代入，那么可以推断所得结果必与不含接触区的情况相同，接触区的影响可以略去。

在采用解析变分方法分析分层问题时，基本方程、分层表面边界条件与层间连续条件预先得到满足，在变分方程中只有沿外部边界的线积分。因此，与一般变分方法相比，解析变分方法可以显著提高计算效率。有关内容可见参考文献[16.8～16.14]。如果

分层区长度与界面长度远大于铺层厚度，可进一步采用分区广义变分原理求解，详见参考文献[16.15]，[16.16]。解析变分解法所得解答的正确性，除进行收敛性验证外，还可采用守恒积分进行验证，详见参考文献[16.17]，[16.18]。

参考文献

[16.1] 钱伟长. 变分法与有限元. 上册. 北京：科学出版社，1980.

[16.2] 胡海昌. 弹性力学的变分原理及其应用. 北京：科学出版社，1981.

[16.3] MUSKKELISHVILI N I. Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity. Radok J R M, Trans. Noordhoff, Groningen, Holland, 1953.

[16.4] 列赫尼兹基 C Г. 各向异性板. 胡海昌译. 北京：科学出版社，1963.

[16.5] WANG S S. Edge Delamination in Angle-Ply Composite Laminates. AIAA Journal, 1984, 22(2):256-264.

[16.6] RICE J R, SIH G C. Plane Problems of Cracks in Dissimilar Media. Journal of Applyed Mechanics, 1965, 32:418-423.

[16.7] COMNINOU M. The Interface Crack. J. Appl. Mech., 1977, 44:631-636.

[16.8] 张行，陈宜歆. 反平面载荷作用下带界面的不同正交异性层板的应力分析. 复合材料学报，1989，6(2):1-8.

[16.9] MENG QINGCHUN, ZHANG XING. Analytical - Generalized Variational Method of Solution for Delaminations of Laminates. Engineering Fracture Mechanics, 1993, 46(5):797-805.

[16.10] 孟庆春，张行，王俊奎. 复合材料层合梁在横向载荷作用下分层问题的解析——广义变分解法. 复合材料学报，1991，8(3):53-60.

[16.11] 孟庆春，张行. 复合材料层合梁分层问题中应力强度因子与守恒积分的解析变分解法. 航空学报，1993，14(3):A147 A154.

[16.12] ZHANG XING, MENG QINGCHUN. Analytical Variational Method about Solution of SIF and Conservative Integral for Delaminations of Laminates Beam. Chinese Journal of Aeronautics, 1994, 7(1):23-31.



[16.13] 孟庆春,张行. 对称正交铺层复合材料层板分层(剥离)问题的解析——广义变分解法. 复合材料学报, 1990,7(3):51-59.

[16.14] 孟庆春,张行. 界面裂纹问题的解析-变分解法及其在复合材料盖板胶接件中之应用. 固体力学学报, 1993, 14(1):45-53.

[16.15] 孟庆春,张行. 含层间短裂纹的对称正交层合板的解析——分区广义变分解法. 力学学报,1995,27(2):1-7.

[16.16] 孟庆春,张行. 含层间长裂纹的对称正交层合板的解析——分区广义变分解法. 计算结构力学及其应用,1995, 12(2):152-159.

[16.17] MENG QINGCHUN, ZHANG XING. Analytical-Variational and Generalized Weighted Conservative Integral Method on Solution of Interfacial Cracks with Their Applications to Bi-Metal Glued Joints. Engineering Fracture Mechanics, 1995, 52(6):1127-1137.

[16.18] 张行,孟庆春. 含界面裂纹的不可压缩双金属胶接件的解析变分守恒积分解法. 力学学报,1994,26(4):416-423.

第 17 章　斜交铺层层合板的二维分层力学研究

本章采用解析变分解法研究斜交铺层复合材料层合板受轴拉、侧压的分层问题。与正交铺层情况不同的是，斜交层板中存在拉剪耦合效应，这使得斜交铺层情况下的分层不仅具有平面张开与平面剪切形式的分层，还具有反平面剪切形式的分层。与 16 章相同，这里仍讨论层板边缘穿透分层问题。

Wang[17.1]，Sou[17.2]对这一问题的奇异场进行过分析，Wang 还利用边界配置法求得了应力强度因子。但由于他们均是以三向应力状态为基础，在广义平面变形情况下进行分析，所要求解的特征方程比较复杂，对上述三种分层形式的应力奇异性的分析也很笼统。为此，根据叠加原理，采用参考文献[17.3]中分析层间应力的方法将引起分层的状态分离出来，再将这一状态分解为平面变形与反平面变形两种状态。这不仅使分析大为简化，而且对奇异应力场的分析也变得更加清晰。同时，对于对称角铺层层板的分层问题，给出了更为简单合理的结果。

17.1　反平面剪切型分层问题解析变分解法

17.1.1　力学模型的建立

对称斜交层板的受力状态如图 17－1(a)所示。与正交铺层情况相同，可将图 17－1(a)所示状态分解为⟨α⟩与⟨β⟩这两种状态，



如图 17－1(b),(c)所示。在$\langle\alpha\rangle$状态中,在原有载荷的基础上施加附加外力,使得经典的直法线假设成立,以保证层板中无层间应力;在$\langle\beta\rangle$状态中,由于附加外力的单独作用,使得直法线假设不再成立,层板具有层间应力,它将导致层板在工作中产生分层。本章中,只研究能导致分层的$\langle\beta\rangle$状态。

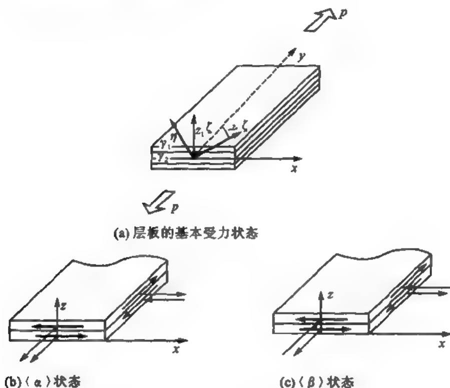


图 17－1　对称斜交铺层复合材料层板受力状态分解

由于斜交层板在受拉过程中存在拉剪耦合效应,所以进一步将$\langle\beta\rangle$状态分解为$\langle\beta_1\rangle$与$\langle\beta_2\rangle$两种子状态,如图 17－2(a),(b)所示。在$\langle\beta_1\rangle$状态中只有反平面变形,即只有 y 方向的离面位移u_y,而 $u_x=0$,$u_z=0$;在$\langle\beta_2\rangle$状态中只有平面变形,即只有 x 与 z 方向的面内位移u_x 与u_z,而 $u_y=0$。由于层板 y 向较长,故$\langle\beta_1\rangle$状态可看成是反平面剪切(Ⅲ)型界面裂纹问题,而$\langle\beta_2\rangle$状态可看成是平面张开与平面剪切(Ⅰ－Ⅱ)复合型界面裂纹问题。本节研究反平



面剪切问题，而$\langle\beta_2\rangle$状态中的平面剪切与平面复合型分层问题在17.2节和17.3节研究。

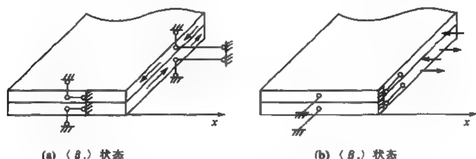


图 17-2　导致层板分层的两种载荷状态

对于代表反平面变形的$\langle\beta_1\rangle$状态，利用层板变形的双对称性建立力学模型，如图17-3所示。在每一层板中建立材料主轴坐标系$O\xi\eta\zeta$，其中ξ轴与该层材料的纤维方向平行，而ζ轴与z轴重合。可见，ξ轴与y轴夹角即为铺层角，设为γ。下面将$Oxyz$称为结构主轴坐标系或总体坐标系。

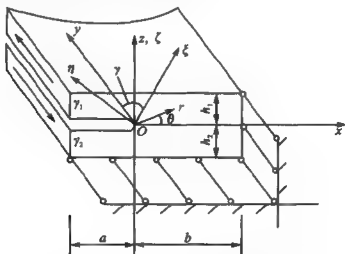


图 17-3　层板反平面分层的力学模型



17.1.2　支配方程与复变函数通解

首先，采用弹性力学的位移解法，建立斜交层板反平面变形状态下位移与应力的表达式。

在结构主轴坐标系中，只有 y 向位移分量不为零

$$u_y = u_y(x,z) \tag{17-1}$$

根据几何方程，相应的应变分量为

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z}\right), \qquad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right) \tag{17-2}$$

利用位移的转换关系，在材料主轴坐标系中，位移分量为

$$\left.\begin{aligned} u_\xi &= u_y\cos\gamma = u_\xi(x,z) \\ u_\eta &= u_y\sin\gamma = u_\eta(x,z) \\ u_\zeta &= u_z = 0 \end{aligned}\right\} \tag{17-3}$$

根据几何方程，相应的应变分量具有如下形式：

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_{\xi\xi} = \frac{\partial u_\xi}{\partial \xi}, \qquad \varepsilon_{\xi\eta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\xi}{\partial \eta} + \frac{\partial u_\eta}{\partial \xi}\right), \qquad \varepsilon_{\xi\zeta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\xi}{\partial \zeta} + \frac{\partial u_\zeta}{\partial \xi}\right) \\ &\varepsilon_{\eta\eta} = \frac{\partial u_\eta}{\partial \eta}, \qquad \varepsilon_{\eta\zeta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\eta}{\partial \zeta} + \frac{\partial u_\zeta}{\partial \eta}\right) \\ &\varepsilon_{\zeta\zeta} = \frac{\partial u_\zeta}{\partial \zeta} \end{aligned}\right\} \tag{17-4}$$

将式(17-3)代入式(17-4)，并考虑到式(17-2)，可得

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_{\xi\xi} = 2\varepsilon_{xy}\sin\gamma\cos\gamma, \qquad \varepsilon_{\eta\eta} = -2\varepsilon_{xy}\sin\gamma\cos\gamma, \qquad \varepsilon_{\zeta\zeta} = 0 \\ &\varepsilon_{\eta\zeta} = \varepsilon_{yz}\sin\gamma, \qquad \varepsilon_{\zeta\xi} = \varepsilon_{yz}\cos\gamma, \qquad \varepsilon_{\xi\eta} = \varepsilon_{xy}(\sin^2\gamma - \cos^2\gamma) \end{aligned}\right\} \tag{17-5}$$

由于应变能密度是与坐标转换无关的标量，故以下等式成立，即

$$\begin{aligned} 2\sigma_{yz}\varepsilon_{yz} + 2\sigma_{xy}\varepsilon_{xy} = &\sigma_{\xi\xi}\varepsilon_{\xi\xi} + \sigma_{\eta\eta}\varepsilon_{\eta\eta} + \sigma_{\zeta\zeta}\varepsilon_{\zeta\zeta} + 2\sigma_{\eta\zeta}\varepsilon_{\eta\zeta} + \\ &2\sigma_{\zeta\xi}\varepsilon_{\zeta\xi} + 2\sigma_{\xi\eta}\varepsilon_{\xi\eta} \end{aligned} \tag{17-6}$$



将式(17－5)代入式(17－6)，有结构主轴坐标系中的应变分量如下：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{yz} &= \sigma_{\eta\zeta}\sin\gamma + \sigma_{\zeta\xi}\cos\gamma \\ \sigma_{xy} &= (\sigma_{\xi\xi} - \sigma_{\eta\eta})\sin\gamma\cos\gamma + \sigma_{\xi\eta}(\sin^2\gamma - \cos^2\gamma)\end{aligned}\right\} \tag{17-7}$$

在材料主轴坐标系中，由于材料具有正交性，以应变表示应力的物理方程为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{\xi\xi} &= c_{11}\varepsilon_{\xi\xi} + c_{12}\varepsilon_{\eta\eta} + c_{13}\varepsilon_{\zeta\zeta}, \quad & \sigma_{\eta\zeta} &= c_{44}\varepsilon_{\eta\zeta} \\ \sigma_{\eta\eta} &= c_{21}\varepsilon_{\xi\xi} + c_{22}\varepsilon_{\eta\eta} + c_{23}\varepsilon_{\zeta\zeta}, \quad & \sigma_{\zeta\xi} &= c_{55}\varepsilon_{\zeta\xi} \\ \sigma_{\zeta\zeta} &= c_{31}\varepsilon_{\xi\xi} + c_{32}\varepsilon_{\eta\eta} + c_{33}\varepsilon_{\zeta\zeta}, \quad & \sigma_{\xi\eta} &= c_{66}\varepsilon_{\xi\eta}\end{aligned}\right\} \tag{17-8}$$

式中，系数 c_{ij} 可以用单层板的柔度系数 a_{ij} 表示。

将式(17－8)代入式(17－7)，考虑到式(17－2)与式(17－5)，可得

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{xy} &= 2\mu_x\varepsilon_{xy} = \mu_x\frac{\partial u_y}{\partial x} \\ \sigma_{yz} &= 2\mu_z\varepsilon_{yz} = \mu_z\frac{\partial u_y}{\partial z}\end{aligned}\right\} \tag{17-9}$$

式中，系数 μ_x，μ_z 为单层板的剪切弹性模量。

$$\left.\begin{aligned}\mu_x &= \frac{1}{2}(c_{11} - 2c_{12} + c_{22})\sin^2 2\gamma + c_{66}\cos^2 2\gamma \\ \mu_z &= c_{44}\sin^2\gamma + c_{55}\cos^2\gamma\end{aligned}\right\} \tag{17-10}$$

可见，当两层板的铺层角 $|\gamma_1| = |\gamma_2|$ 时，两层板的 μ_x，μ_z 相同。这种情况与含边缘裂纹均匀介质的反平面剪切型裂纹问题相同，这里不予讨论。以下仅考虑 $|\gamma_1| \neq |\gamma_2|$ 的情况。

对于所讨论的反平面问题，结构主轴坐标系中的有效平衡方程为

$$\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial z} = 0 \tag{17-11}$$

将式(17－9)代入，得到以位移表示的平衡方程



$$\mu_x \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \mu_z \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} = 0 \tag{17-12}$$

为求解上式，令

$$u_{yk} = f_k(y_k) + \overline{f_k(y_k)} \tag{17-13}$$

这里，$f_k(y_k)$为解析函数，y_k 为如下的广义复变量

$$y_k = x_k + \mathrm{i}z_k = x + p_k z = r_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k} \tag{17-14}$$

式中，$k=1,2$，表示层号。将式(17-13)代入式(17-12)，可得复参数

$$p_k = \mathrm{i}\beta_k = \mathrm{i}\sqrt{\frac{\mu_{xk}}{\mu_{zk}}} \tag{17-15}$$

上述推导表明，只要复参数 p_k 满足上式，以任意二阶可导的广义复变函数 $f_k(y_k)$表示的位移均可满足平衡方程式(17-12)。

将式(17-13)代入式(17-9)，可得两层的应力表达式

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{xyk} &= \mu_{xk}[f'_k(y_k) + \overline{f'_k(y_k)}] \\ \sigma_{yzk} &= \mathrm{i}\mu_{zk}\beta_k[f'_k(y_k) - \overline{f'_k(y_k)}] \end{aligned}\right\} \tag{17-16}$$

引入极坐标 $y = x + \mathrm{i}z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

则由式(17-14)可得

$$\left.\begin{aligned} r_k &= r\sqrt{\cos^2\theta + \beta_k^2\sin^2\theta} \\ \theta_k &= \arctan(\beta_k \tan\theta) + n\pi \qquad (n = 2,4,6,\cdots) \end{aligned}\right\} \tag{17-17}$$

17.1.3 基本条件与本征展开

层间连续条件与分层表面静力边界条件为

$\theta=0$ 处 $\quad u_{y1} = u_{y2}, \quad \sigma_{yz1} = \sigma_{yz2}$ (17-18)

$$\left.\begin{aligned} \theta=\pi \text{ 处} \quad & \sigma_{yz1} = 0 \\ \theta=-\pi \text{ 处} \quad & \sigma_{yz2} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{17-19}$$

一般而言，由于存在混合边界条件，分层尖端位移不为零，所以复变函数应分为幂函数与指数函数这两类，即令

$$f_k(y_k) = f_{1k}(y_k) + f_{2k}(y_k) \tag{17-20}$$

式中

$$f_{1k}(y_k) = A_k y_k^{\lambda} + B_k y_k^{\bar{\lambda}} \tag{17-21}$$

$$f_{2k}(y_k) = C_k e^{\lambda y_k} + D_k e^{\bar{\lambda} y_k} \tag{17-22}$$

式中的待定系数 A_k, B_k, C_k, D_k 以及 λ 为复数，函数的第一个下标 1 和 2 表示函数类型，第二个下标 $k(k=1,2)$表示层号。

将式(17-21)、式(17-22)分别代入式(17-13)和式(17-16)，再代入式(17-18)和式(17-19)可得关于幂函数待定系数和指数函数待定系数的两组齐次线性方程组。

根据关于幂函数待定系数的齐次线性方程组具有非零解的条件可知，只有特征值 λ 为实数，解才有意义。于是，式(17-21)中的幂函数应改写为

$$f_{1k}(y_k) = A_k y_k^{\lambda} \tag{17-23}$$

相应的方程组具有非零解的条件为

$$\sin 2(\lambda - 1)\pi = 0 \tag{17-24}$$

求解并考虑到应变能有界条件，可得特征值

$$\lambda = \frac{n}{2} \qquad (n = 1,2,3,\cdots) \tag{17-25}$$

当 n 为奇数时，特征值为半整数，待定系数关系为

$$\lambda_1 = m - \frac{1}{2} \qquad (m = 1,2,3,\cdots) \tag{17-26}$$

$$A_{1m1}^{(R)} = A_{2m1}^{(R)} = 0, \qquad A_{1m1}^{(I)} = \zeta A_{2m1}^{(I)} \tag{17-27}$$

而 $\zeta = \frac{\mu_{z2}\beta_2}{\mu_{z1}\beta_1}$。当 n 为偶数时，特征值为整数，待定系数关系为

$$\lambda_2 = m \qquad (m = 1,2,3,\cdots) \tag{17-28}$$

$$A_{1m2}^{(I)} = A_{2m2}^{(I)} = 0, \qquad A_{1m2}^{(R)} = A_{2m2}^{(R)} \tag{17-29}$$

通过观察可以发现，在关于指数函数待定系数的齐次线性方程组中不含有 λ。这说明只要指数函数的待定系数之间满足一定的关系，任意的 $\lambda \neq 0$ 均可使边界条件式(17-18)、式(17-19)得以满足。不妨将特征值取为 $\lambda_3 = 1$，则式(17-22)中的指数函数改写为



$$f_{2k}(y_k) = C_k e^{\gamma_k} \tag{17-30}$$

求解与此相应的线性方程组可得

$$C_1^{(1)} = C_2^{(1)} = 0, \qquad C_1^{(R)} = C_2^{(R)} \tag{17-31}$$

将上述待定系数表示为

$$A_{2m1}^{(1)} = P_m, \qquad A_{2m2}^{(R)} = Q_m, \qquad C_1^{(R)} = C_2^{(R)} = R \tag{17-32}$$

则可得复变函数的特征展开式，并进而得到位移与应力的特征展开式如下：

$$u_{yk} = \sum_{m=1}^{M} [r^{m-\frac{1}{2}} s_{ykm}(\theta) P_m + r^m t_{ykm}(\theta) Q_m] + q_{yk}(r,\theta) R \tag{17-33}$$

$$\sigma_{xyk} = \sum_{m=1}^{M} [r^{m-\frac{3}{2}} g_{xykm}(\theta) P_m + r^{m-1} h_{xykm}(\theta) Q_m] + p_{xyk}(r,\theta) R \tag{17-34}$$

$$\sigma_{yzk} = \sum_{m=1}^{M} [r^{m-\frac{3}{2}} g_{yzkm}(\theta) P_m + r^{m-1} h_{yzkm}(\theta) Q_m] + p_{yzk}(r,\theta) R \tag{17-35}$$

式中，$s_{ykm}(\theta)$，…为已知函数，$m=1$ 的项即为奇异项。可见，分层前沿附近应力只具有单调奇异性，相应的应力强度因子定义为

$$K_{\mathrm{III}} = \lim_{r\to 0} \sqrt{2\pi}\sigma_{yz1} \Big|_{\theta=0} = -\sqrt{2\pi}\mu_{z1}\beta_1 \zeta P_1 \tag{17-36}$$

17.1.4 应力强度因子变分解法

为确定待定系数 P_m，Q_m，R，要应用变分方法满足裂纹表面以外的边界条件。考虑到所有基本方程、层间连续条件与裂纹表面静力边界条件均已预先满足，根据式(16-80)，裂纹表面以外的边界条件可以用分区广义变分原理表示为

$$\delta\Pi_g = \sum_{k=1}^{2}\int_{S_{pk}} (\sigma_{yj}n_j - \overline{p}_j)_k \delta u_{yk} \mathrm{d}s - \sum_{k=1}^{2}\int_{S_{uk}} (u_y - \overline{u}_y)_k \delta\sigma_{yjk} n_{jk} \mathrm{d}s = 0 \qquad (17-37)$$

式中，S_{pk}，S_{uk}分别代表力与位移边界。

由于应力与位移的变分是任意的，上式与静力边界条件、位移边界条件是等价的。求解由此而得的线性方程组，即得收敛的应力强度因子，进而求得上述待定系数。

计算例题

取每层板的材料参数为

$$E_{11} = 137.9\ \text{GPa}, \quad E_{22} = E_{33} = 13.48\ \text{GPa}, \quad G_{12} = 5.86\ \text{GPa}$$

$$\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.21$$

应力强度因子可表示为

$$K_{\mathrm{III}} = \sqrt{2\pi}qX, \qquad X = -\mu_{z1}\beta_1\zeta P_1$$

式中，q 为与载荷相关的常量。

考虑两种载荷情况。

① 剪切载荷均匀分布，即

$$\left.\begin{aligned} \overline{q}_{y1} &= q, \quad x = -a, \quad y > 0 \\ \overline{q}_{y2} &= -q, \quad x = -a, \quad y < 0 \end{aligned}\right\}$$

表 17－1 至表 17－4 给出层板的铺层角与量纲为 1 的尺寸取不同值时，X 随项数 M 增加的收敛情况。数值积分精度 EPS$=10^{-4}$。

算例一 $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = \dfrac{\pi}{4}$。

表 17－1 $a=0.257\ 1, b=0.514\ 1, h_1 = h_2 = 0.128\ 8$

M	1	2	3	4	5
X	−0.181 0	0.200 7	0.178 3	0.182 3	0.183 5
M	6	7	8	9	10
X	0.181 7	0.175 2	0.185 0	0.184 8	0.185 0



表 17-2 $a=0.05, b=0.1, h_1=h_2=0.1$

M	1	2	3	4	5	6	7
X	0.159 2	0.154 0	0.149 0	0.148 4	0.147 5	0.147 6	0.147 3

算例二 $\gamma_1=0, \gamma_2=\frac{\pi}{2}$。

表 17-3 $a=0.257\,1, b=0.514\,1, h_1=h_2=0.128\,8$

M	2	3	4	5	6	7	8
X	0.215 9	0.148 5	0.138 4	0.145 9	0.156 5	0.138 7	0.147 7
M	9	10	11	12	13	14	15
X	0.147 6	0.149 4	0.148 4	0.147 3	0.147 3	0.147 3	0.147 3

表 17-4 $a=0.05, b=0.1, h_1=h_2=0.1$

M	5	6	7	8	9	10	11
X	0.134 4	0.136 1	0.135 9	0.138 2	0.137 0	0.136 9	0.137 0

② 剪切载荷线性分布，即

$$\left.\begin{aligned} \bar{q}_{y1} &= \left(1-\frac{r}{h_1}\sin\theta\right)q, \qquad x=-a, \qquad y>0 \\ \bar{q}_{y2} &= -\left(1+\frac{r}{h_2}\sin\theta\right)q, \qquad x=-a, \qquad y>0 \end{aligned}\right\}$$

表 17-5 至表 17-8 给出层板的铺层角与量纲为 1 的尺寸取不同值时，X 随项数 M 增加的收敛情况。

算例三 $\gamma_1=0, \gamma_2=\frac{\pi}{4}$。

表 17-5 $a=0.257\,1, b=0.514\,1, h_1=h_2=0.128\,8$

M	4	5	6	7	8	9	10	11
$X\times10$	0.921 2	0.902 2	0.930 3	0.880 6	0.987 7	0.934 5	0.934 7	0.933 0

表 17-6　$a=0.05, b=0.1, h_1=h_2=0.1$

M	4	5	6	7	8	9	10
$X\times10$	0.800 2	0.811 8	0.813 2	0.821 4	0.814 1	0.819 1	0.819 8

算例四　$\gamma_1=0, \gamma_2=\dfrac{\pi}{2}$。

表 17-7　$a=0.257\,1, b=0.514\,1, h_1=h_2=0.128\,8$

M	5	6	7	8	9	10	11
$X\times10$	0.731 2	0.757 1	0.773 2	0.738 9	0.738 5	0.735 5	0.738 0

表 17-8　$a=0.05, b=0.1, h_1=h_2=0.1$

M	4	5	6	7	8	9	10
$X\times10$	0.735 7	0.785 8	0.789 0	0.790 4	0.792 9	0.791 5	0.791 5

计算所得线性方程组的系数矩阵是对称的，应力强度因子的收敛性也是令人满意的。

17.2　平面复合型分层问题解析变分解法

在 17.1 节中，斜交层板在纵向拉伸载荷作用下的变形状态被分解成满足直法线假设的状态（$\langle\alpha\rangle$）与引起分层的附加状态（$\langle\beta\rangle$），如图 17-1(b)，(c)所示，并且后者又被进一步分解成反平面变形状态（$\langle\beta_1\rangle$）与平面变形状态（$\langle\beta_2\rangle$），如图 17-2 所示。在 17.1 节中已经对斜交层板反平面变形状态下的分层问题进行了研究，本节将研究斜交层板在平面变形状态下的复合型分层问题。上述分解办法的采用，使得对称角铺层情况下的解答变得非常简单与合理。



根据17.1节与本节的结果，利用叠加方法，可以得到复合材料层板在一般变形情况下分层问题的解答。

17.2.1 力学模型的建立

在平面变形状态(〈β_2〉)(如图17-2(b)所示)，y向位移为零，故〈β_2〉状态属于平面应变问题；而层间裂纹为平面张开与平面剪切复合型裂纹。利用层板变形的双对称性建立计算模型如图17-4所示。与图17-3反平面分层模型相同，在每一层板中建立材料主轴坐标系$O\xi\eta\zeta$，其中ξ轴与该层材料的纤维方向平行，并设ξ轴与y轴夹角(即铺层角)为γ，而ζ轴与z轴重合。下面，将$Oxyz$称为结构主轴坐标系或总体坐标系。

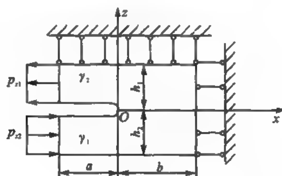


图17-4 斜交层板分层的力学模型

17.2.2 支配方程与复变函数通解

首先，采用弹性力学的位移解法，建立斜交层合板在平面变形状态下位移与应力的复变函数表达式。

在结构主轴坐标系中，位移分量为

$$u_x = u_x(x,z), \qquad u_z = u_z(x,z) \tag{17-38}$$

根据几何方程，相应的应变分量具有如下形式：



$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \qquad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \qquad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) \tag{17-39}$$

利用位移的转换关系，在材料主轴坐标系中，位移分量为

$$\left.\begin{aligned} u_\xi &= u_x \sin\gamma = u_\xi(x,z) \\ u_\eta &= -u_x \cos\gamma = u_\eta(x,z) \\ u_\zeta &= u_z = u_\zeta(x,z) \end{aligned}\right\} \tag{17-40}$$

根据几何方程，相应的应变分量具有如下形式：

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_{\xi\xi} = \frac{\partial u_\xi}{\partial \xi}, \qquad \varepsilon_{\xi\eta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\xi}{\partial \eta} + \frac{\partial u_\eta}{\partial \xi}\right), \qquad \varepsilon_{\xi\zeta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\xi}{\partial \zeta} + \frac{\partial u_\zeta}{\partial \xi}\right) \\ &\varepsilon_{\eta\eta} = \frac{\partial u_\eta}{\partial \eta}, \qquad \varepsilon_{\eta\zeta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\eta}{\partial \zeta} + \frac{\partial u_\zeta}{\partial \eta}\right) \\ &\varepsilon_{\zeta\zeta} = \frac{\partial u_\zeta}{\partial \zeta} \end{aligned}\right\} \tag{17-41}$$

将式(17－40)代入式(17－41)并考虑到式(17－39)，可得

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_{\xi\xi} = \varepsilon_{xx}\sin^2\gamma, \qquad \varepsilon_{\eta\eta} = \varepsilon_{xx}\cos^2\gamma, \qquad \varepsilon_{\zeta\zeta} = \varepsilon_{zz} \\ &\varepsilon_{\eta\zeta} = -\varepsilon_{xz}\cos\gamma, \qquad \varepsilon_{\zeta\xi} = \varepsilon_{xz}\sin\gamma, \qquad \varepsilon_{\xi\eta} = -\varepsilon_{xx}\sin\gamma\cos\gamma \end{aligned}\right\} \tag{17-42}$$

由于应变能密度是与坐标转换无关的标量，故以下等式成立，即

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + 2\sigma_{xz}\varepsilon_{xz} = {}& \sigma_{\xi\xi}\varepsilon_{\xi\xi} + \sigma_{\eta\eta}\varepsilon_{\eta\eta} + \sigma_{\zeta\zeta}\varepsilon_{\zeta\zeta} + 2\sigma_{\eta\zeta}\varepsilon_{\eta\zeta} + \\ & 2\sigma_{\zeta\xi}\varepsilon_{\zeta\xi} + 2\sigma_{\xi\eta}\varepsilon_{\xi\eta} \end{aligned} \tag{17-43}$$

将式(17－42)代入式(17－43)，则结构主轴坐标系中的应力分量如下：

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma_{\xi\xi}\sin^2\gamma + \sigma_{\eta\eta}\cos^2\gamma - 2\sigma_{\xi\eta}\sin\gamma\cos\gamma \\ \sigma_{zz} &= \sigma_{\zeta\zeta} \\ \sigma_{xz} &= -\sigma_{\eta\zeta}\cos\gamma + \sigma_{\zeta\xi}\sin\gamma \end{aligned}\right\} \tag{17-44}$$

在材料主轴坐标系中，由于材料具有正交性，以应变表示应力



的物理方程为

$$\left.\begin{array}{ll}\sigma_{\xi\xi}=c_{11}\varepsilon_{\xi\xi}+c_{12}\varepsilon_{\eta\eta}+c_{13}\varepsilon_{\zeta\zeta}, & \sigma_{\eta\zeta}=c_{44}\varepsilon_{\eta\zeta}\\ \sigma_{\eta\eta}=c_{21}\varepsilon_{\xi\xi}+c_{22}\varepsilon_{\eta\eta}+c_{23}\varepsilon_{\zeta\zeta}, & \sigma_{\zeta\xi}=c_{55}\varepsilon_{\zeta\xi}\\ \sigma_{\zeta\zeta}=c_{31}\varepsilon_{\xi\xi}+c_{32}\varepsilon_{\eta\eta}+c_{33}\varepsilon_{\zeta\zeta}, & \sigma_{\xi\eta}=c_{66}\varepsilon_{\xi\eta}\end{array}\right\} \tag{17-45}$$

式中，c_{ij} 可以用柔度系数 a_{ij} 表示。

将式(17－45)代入式(17－44)，考虑到式(17－39)与式(17－42)，并令

$$\left.\begin{array}{l}l_1=c_{11}\sin^4\gamma+2(c_{12}+c_{66})\sin^2\gamma\cos^2\gamma+c_{22}\cos^4\gamma\\ l_2=c_{13}\sin^2\gamma+c_{23}\cos^2\gamma+\dfrac{1}{2}(c_{44}\cos^2\gamma+c_{55}\sin^2\gamma)\\ l_3=\dfrac{1}{2}(c_{44}\cos^2\gamma+c_{55}\sin^2\gamma)\\ l_4=c_{33}\end{array}\right\} \tag{17-46}$$

可得结构主轴坐标系中应力与位移的关系式

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_{xx}=l_1\dfrac{\partial u_x}{\partial x}+(l_2-l_3)\dfrac{\partial u_z}{\partial z}\\ \sigma_{zz}=(l_2-l_3)\dfrac{\partial u_x}{\partial x}+l_4\dfrac{\partial u_z}{\partial z}\\ \sigma_{xz}=l_3\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial z}+\dfrac{\partial u_z}{\partial x}\right)\end{array}\right\} \tag{17-47}$$

根据虚位移原理(或称虚功原理)并考虑到式(17－38)与式(17－39)，结构主轴坐标系中的有效平衡方程为

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\dfrac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z}=0\\ \dfrac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x}+\dfrac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}=0\end{array}\right\} \tag{17-48}$$

将式(17－47)代入式(17－48)，可得位移 u_x，u_z 所需满足的偏微分方程如下：

$$\left.\begin{aligned}l_1\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+l_2\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial z}+l_3\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}=0\\l_3\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}+l_2\frac{\partial^2 u_x}{\partial x\partial z}+l_4\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}=0\end{aligned}\right\}\tag{17-49}$$

由式(17-46)可见，当铺层角$|\gamma_1|=|\gamma_2|$时，l_j与层号无关。考虑到式(17-47)，可以说上、下两层在xOz平面内具有相同的弹性模量。这种情况与含边缘裂纹均匀介质平面剪切型裂纹问题相同，故这里不予讨论。以下只考虑$|\gamma_1|\neq|\gamma_2|$的情况。

为求解式(17-49)，令

$$\left.\begin{aligned}u_x=U_xf(y)+\overline{U}_x\overline{f}(y)\\u_z=U_zf(y)+\overline{U}_z\overline{f}(y)\end{aligned}\right\}\tag{17-50}$$

式中，$f(y)$为复函数；U_x，U_z为复常数，代表广义位移；y为如下广义复变量

$$y=x+\mu z\tag{17-51}$$

式中，μ为复参数。

将式(17-50)代入式(17-49)，可得

$$\left.\begin{aligned}(l_1+l_3\mu^2)U_x+l_2\mu U_z=0\\l_2\mu U_x+(l_3+l_4\mu^2)U_z=0\end{aligned}\right\}\tag{17-52}$$

根据上式的非零解条件，有

$$l_1l_3+(l_1l_4+l_3^2-l_2^2)\mu^2+l_3l_4\mu^4=0\tag{17-53}$$

上式中，μ有四个复根，且两两共轭，即

$$\mu_1=\alpha_1+\mathrm{i}\beta_1,\qquad\mu_2=\alpha_2+\mathrm{i}\beta_2,\qquad\mu_3=\overline{\mu}_1,\qquad\mu_4=\overline{\mu}_2\tag{17-54}$$

求解式(17-53)可见，对于所计算的工程常用复合材料，其复参数μ_j为纯虚数，即

$$\mu_j=\mathrm{i}\beta_j\qquad(j=1,2)\tag{17-55}$$

式中，β_1与β_2为实数。

满足式(17-52)的广义位移为

$$U_{xjk}=\mathrm{i}p_{jk},\qquad U_{zjk}=\mathrm{i}q_{jk}\tag{17-56}$$



其中，实常数 p_{jk} 与 q_{jk} 分别为

$$p_{jk}=-l_{2k}\beta_{jk},\qquad q_{jk}=l_{k}-l_{3k}\beta_{jk}^{2}\qquad(j,k=1,2)\tag{17-57}$$

式中，j,k 分别表示变量序号与层号。

进一步，令

$$\left.\begin{aligned}r_{jk}&=[-l_{1k}l_{2k}+(l_{2k}-l_{3k})q_{jk}]\beta_{jk}\\s_{jk}&=[-l_{2k}(l_{2k}-l_{3k})+q_{jk}l_{4k}]\beta_{jk}\\t_{jk}&=[l_{1k}+(l_{2k}-l_{3k})\beta_{jk}^{2}]l_{3k}\end{aligned}\right\}\tag{17-58}$$

则由式(17－50)与式(17－47)可得位移与应力的复变函数通解如下：

$$\left.\begin{aligned}u_{xk}&=\mathrm{i}p_{1k}[\varphi_k(y_1)-\overline{\varphi_k(y_1)}]+\mathrm{i}p_{2k}[\psi_k(y_2)-\overline{\psi_k(y_2)}]\\u_{zk}&=q_{1k}[\varphi_k(y_1)+\overline{\varphi_k(y_1)}]+q_{2k}[\psi_k(y_2)+\overline{\psi_k(y_2)}]\end{aligned}\right\}\tag{17-59}$$

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{xxk}&=\mathrm{i}r_{1k}[\varphi_k'(y_1)-\overline{\varphi_k'(y_1)}]+\mathrm{i}r_{2k}[\psi_k'(y_2)-\overline{\psi_k'(y_2)}]\\\sigma_{zzk}&=\mathrm{i}s_{1k}[\varphi_k'(y_1)-\overline{\varphi_k'(y_1)}]+\mathrm{i}s_{2k}[\psi_k'(y_2)-\overline{\psi_k'(y_2)}]\\\sigma_{xzk}&=t_{1k}[\varphi_k'(y_1)+\overline{\varphi_k'(y_1)}]+t_{2k}[\psi_k'(y_2)+\overline{\psi_k'(y_2)}]\end{aligned}\right\}\tag{17-60}$$

式中，φ,ψ 为解析函数，分别用以代替式(17－50)中 y 取 y_1 与 y_2 时的复变函数 $f(y)$，y_1 与 y_2 为广义复变量。

引入极坐标

$$y=x+\mathrm{i}z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\tag{17-61}$$

则广义复变量 y_1 与 y_2 表示为

$$y_j=x+\mathrm{i}\beta_j z=r_j\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_j}\qquad(j=1,2)\tag{17-62}$$

17.2.3 基本条件与本征展开

根据图 17－4 所示模型，层间连续条件与分层表面静力边界条件为



$$\left.\begin{aligned} u_{x1} + \mathrm{i}u_{z1} &= u_{x2} + \mathrm{i}u_{z2} \\ \sigma_{xx1} + \mathrm{i}\sigma_{xz1} &= \sigma_{xx2} + \mathrm{i}\sigma_{xz2} \end{aligned} \quad (\theta = 0) \right\} \qquad (17-63)$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{xx1} + \mathrm{i}\sigma_{xz1} &= 0 \qquad (\theta = \pi) \\ \sigma_{xx2} + \mathrm{i}\sigma_{xz2} &= 0 \qquad (\theta = -\pi) \end{aligned} \right\} \qquad (17-64)$$

一般而言，由于存在混合边界条件，分层尖端位移不为零，所以复变函数应包括幂函数与指数函数这两类，即令

$$\varphi_k(y_1) = \varphi_{1k}(y_1) + \varphi_{2k}(y_1), \qquad \psi_k(y_2) = \psi_{1k}(y_2) + \psi_{2k}(y_2) \qquad (17-65)$$

式中

$$\varphi_{1k}(y_1) = A_k y_1^{\lambda} + B_k y_1^{\bar{\lambda}}, \qquad \psi_{1k}(y_2) = C_k y_2^{\lambda} + D_k y_2^{\bar{\lambda}} \qquad (17-66)$$

$$\varphi_{2k}(y_1) = E_k \mathrm{e}^{\lambda y_1} + F_k \mathrm{e}^{\bar{\lambda} y_1}, \qquad \psi_{2k}(y_2) = G_k \mathrm{e}^{\lambda y_2} + H_k \mathrm{e}^{\bar{\lambda} y_2} \qquad (17-67)$$

式中的常数为复数，函数的第一个下标表示函数类型，第二个下标表示层号。

将式(17-66)代入式(17-59)与式(17-60)，再代入式(17-63)、式(17-64)并考虑到$\beta_j > 0$，可得关于幂函数待定系数的齐次线性方程组；类似地，将式(17-67)代入式(17-59)与式(17-60)，再代入式(17-63)、式(17-64)，可得关于指数函数待定系数的齐次线性方程组。根据以上两个线性方程组具有非零解的条件即可解得特征值以及相应的待定系数间的关系。

关于幂函数待定系数的齐次线性方程组具有非零解的条件有两个。

(1) 第一个非零解条件

$$Q_1 \eta^2 + Q_2 \eta + Q_3 = 0 \qquad (17-68)$$

式中，实常数为

$$Q_1 = (p_{12} + p_{11} f_{25} + p_{21} f_{45})(q_{22} - q_{11} f_{27} - q_{21} f_{47}) - (q_{12} - q_{11} f_{25} - q_{21} f_{45})(p_{22} + p_{11} f_{27} + p_{21} f_{47})$$



$$Q_2=(p_{11}f_{15}+p_{21}f_{35}+p_{12}f_{65}+p_{22}f_{85})(q_{22}-q_{11}f_{27}-q_{21}f_{47})+$$
$$(q_{11}f_{17}+q_{21}f_{37}-q_{12}f_{67}-q_{22}f_{87})(p_{12}+p_{11}f_{25}+p_{21}f_{45})-$$
$$(p_{11}f_{17}+p_{21}f_{37}+p_{12}f_{67}+p_{22}f_{87})(q_{12}-q_{11}f_{25}-q_{21}f_{45})-$$
$$(q_{11}f_{15}+q_{21}f_{35}-q_{12}f_{65}-q_{22}f_{85})(p_{22}+p_{11}f_{27}+p_{21}f_{47})$$

$$Q_3=(p_{11}f_{15}+p_{21}f_{35}+p_{12}f_{65}+p_{22}f_{85})(q_{11}f_{17}+q_{21}f_{37}-$$
$$q_{12}f_{67}-q_{22}f_{87})-(p_{11}f_{17}+p_{21}f_{37}+p_{12}f_{67}+$$
$$p_{22}f_{87})(q_{11}f_{15}+q_{21}f_{35}-q_{12}f_{65}-q_{11}f_{85})$$

$$f_{01}=s_{11}t_{21}-t_{11}s_{21},\qquad f_{02}=s_{12}t_{22}-t_{12}s_{22}$$
$$f_{15}=(s_{12}t_{21}-t_{12}s_{21})/f_{01},\qquad f_{17}=(s_{22}t_{21}-t_{22}s_{21})/f_{01}$$
$$f_{35}=-(s_{12}t_{11}-t_{12}s_{11})/f_{01},\qquad f_{37}=-(s_{22}t_{11}-t_{22}s_{11})/f_{01}$$
$$f_{21}=-(s_{11}t_{21}+t_{11}s_{21})/f_{01},\qquad f_{23}=-2s_{21}t_{21}/f_{01}$$
$$f_{41}=2s_{11}t_{11}/f_{01},\qquad f_{43}=(s_{21}t_{11}+t_{21}s_{11})/f_{01}$$
$$f_{25}=f_{21}f_{15}+f_{23}f_{35},\qquad f_{27}=f_{21}f_{17}+f_{23}f_{37}$$
$$f_{45}=f_{41}f_{15}+f_{43}f_{35},\qquad f_{47}=f_{41}f_{17}+f_{43}f_{37}$$
$$f_{65}=-(s_{12}t_{22}+t_{12}s_{22})/f_{02},\qquad f_{67}=-2s_{22}t_{22}/f_{02}$$
$$f_{85}=2s_{12}t_{12}/f_{02},\qquad f_{87}=(s_{22}t_{12}+t_{22}s_{12})/f_{02}$$

而复常数 η 可用特征值 λ 表示为

$$\eta=\eta_R+i\eta_I=e^{i2(\lambda-1)\pi} \tag{17-69}$$

且

$$\lambda=\lambda_R+i\lambda_I \tag{17-70}$$

由应变能有界条件可知 $\lambda_R>0$。于是，由式(17-69)与式(17-70)可得

$$e^{-2\pi\lambda_I}\cos(2\pi\lambda_R)=\eta_R,\qquad e^{-2\pi\lambda_I}\sin(2\pi\lambda_R)=\eta_I \tag{17-71}$$

$$\lambda_R=\varepsilon+\frac{n}{2},\qquad \lambda_I=-\frac{1}{4\pi}\ln(\eta_R^2+\eta_I^2) \tag{17-72}$$

式中

$$\varepsilon=\frac{1}{2\pi}\arctan\frac{\eta_I}{\eta_R} \tag{17-73}$$



$$\left.\begin{aligned} n &= 1,3,5,\cdots \quad (\text{当 } \eta_R < 0 \text{ 时}) \\ n &= 2,4,6,\cdots \quad (\text{当 } \eta_R > 0 \text{ 时}) \end{aligned}\right\} \tag{17-74}$$

求解式(17－68)，可得

$$\eta_{1,2} = \frac{-Q_2 \pm \sqrt{Q_2^2 - 4Q_1Q_3}}{2Q_1} \tag{17-75}$$

上式又可分为两种情况。

1）情况一

$$f = Q_2^2 - 4Q_1Q_3 > 0 \tag{17-76}$$

本节中计算的复合材料就属于这种情况。计算表明，式(17－75)具有两个小于零且互为倒数的实根 η_1，η_2，即

$$\eta_{1\mathrm{I}} = \eta_{2\mathrm{I}} = 0; \qquad \eta_{1R} < 0, \eta_{2R} < 0; \qquad \eta_{1R}\eta_{2R} = 1$$

由此可得

$$\varepsilon = 0, \qquad n = 1,3,5,\cdots, \qquad \lambda_{11} = -\lambda_{21} \tag{17-77}$$

可见，对应于 η_1，η_2 的两个特征根互为共轭，即 $\lambda_{11} = \bar{\lambda}_{12}$。由式(17－66)可知，对应于这两个特征值的复变函数具有相同的形式，所以只取 λ_{11}，λ_{12} 中的一个即可，并用 λ_1 表示为

$$\lambda_1 = \lambda_R + i\lambda_I = \frac{n}{2} + i\frac{1}{2\pi}\ln \eta_R \tag{17-78}$$

2）情况二

$$f = Q_2^2 - 4Q_1Q_3 < 0 \tag{17-79}$$

这时，η 具有两个复根，即 $\eta_I \neq 0$，且 $\eta_R^2 + \eta_I^2 = 1$，由此可得 $\lambda_I = 0$，$\varepsilon \neq 0$，即 λ_1 为实数

$$\lambda_1 = \varepsilon + \frac{n}{2} \tag{17-80}$$

可见，根据材料参数的不同，待定系数的非零解条件式(17－68)给出两组不同的特征值：当 $\lambda_I \neq 0$ 时，$\varepsilon = 0$，且 $\lambda_R = \frac{1}{2}$；而当 $\lambda_I = 0$ 时，$\varepsilon \neq 0$，且 $|\varepsilon| < \frac{1}{4}$，而 $\lambda_R = \varepsilon + \frac{1}{2}$。

(2) 第二个非零解条件

$$e^{2\pi i(\lambda - 1)} - 1 = 0 \tag{17-81}$$



解得对应的特征根

$$\lambda_2 = \frac{n}{2} \qquad (n = 2,4,6,\cdots) \qquad (17-82)$$

根据以上推导可得,对应于 λ_1,系数间具有如下关系:

$$\left.\begin{aligned} &C_2 = g_{75}A_2, \quad B_2 = g_{65}\bar{A}_2, \quad D_2 = g_{85}\bar{A}_2 \\ &A_1 = g_{15}A_2, \quad B_1 = g_{25}\bar{A}_2, \quad C_1 = g_{35}A_2, \quad D_1 = g_{45}\bar{A}_2 \end{aligned}\right\} \qquad (17-83)$$

式中,实常数

$$g_{75} = -\frac{(q_{12} - q_{11}f_{25} - q_{21}f_{45})\eta + (q_{11}f_{15} + q_{21}f_{35} - q_{12}f_{65} - q_{22}f_{85})}{(q_{22} - q_{11}f_{27} - q_{21}f_{47})\eta + (q_{11}f_{17} + q_{21}f_{37} - q_{12}f_{67} - q_{22}f_{87})}$$

$$g_{15} = -(f_{15} + f_{17}g_{75})/\eta, \qquad g_{35} = -(f_{35} + f_{37}g_{75})/\eta$$

$$g_{25} = f_{25} + f_{27}g_{75}, \qquad g_{45} = f_{45} + f_{47}g_{75}$$

$$g_{65} = -(f_{65} + f_{67}g_{75})/\eta, \qquad g_{85} = -(f_{85} + f_{87}g_{75})/\eta$$

对应于 λ_2,系数间具有如下关系:

$$\left.\begin{aligned} &(A+B)_1^{(R)} = h_{15}(A+B)_2^{(R)}, \qquad (A+B)_1^{(I)} = h_{26}(A+B)_2^{(I)} \\ &(C+D)_1^{(R)} = h_{35}(A+B)_2^{(R)}, \qquad (C+D)_1^{(I)} = h_{46}(A+B)_2^{(I)} \\ &(C+D)_2^{(R)} = h_{75}(A+B)_2^{(R)}, \qquad (C+D)_2^{(I)} = h_{86}(A+B)_2^{(I)} \end{aligned}\right\} \qquad (17-84)$$

式中,实常数

$$h_{15} = \frac{t_{21}(q_{12}t_{22} - t_{12}q_{22})}{t_{22}(q_{11}t_{21} - t_{11}q_{21})}, \qquad h_{26} = \frac{s_{21}(p_{12}s_{22} - s_{12}p_{22})}{s_{22}(p_{11}s_{21} - s_{11}p_{21})}$$

$$h_{35} = -h_{15}\frac{t_{11}}{t_{21}}, \qquad h_{46} = -h_{26}\frac{s_{11}}{s_{21}}, \qquad h_{75} = -\frac{t_{12}}{t_{22}}, \qquad h_{86} = -\frac{s_{12}}{s_{22}}$$

接下来讨论关于指数函数待定系数的齐次线性方程组具有非零解的条件。在这个方程组中有两个方程不是线性独立的。求解其余六个方程,可得

$$\left.\begin{aligned} &E_2 + F_2 = e_{51}(E_1 + F_1) + e_{52}(\bar{E}_1 + \bar{F}_1) \\ &G_1 + H_1 = -e_{31}(E_1 + F_1) - e_{32}(\bar{E}_1 + \bar{F}_1) \\ &G_2 + H_2 = -(e_{75}e_{51} + e_{76}e_{52})(E_1 + F_1) - (e_{75}e_{52} + e_{76}e_{51})(\bar{E}_1 + \bar{F}_1) \end{aligned}\right\} \qquad (17-85)$$

式中

$$e_{31}=\frac{s_{11}t_{21}+t_{11}s_{21}}{2s_{21}t_{21}},\quad e_{32}=\frac{t_{11}s_{21}-s_{11}t_{21}}{2s_{21}t_{21}},\quad e_{75}=\frac{s_{12}t_{22}+t_{12}s_{22}}{2s_{22}t_{22}}$$

$$e_{76}=\frac{t_{12}s_{22}-s_{12}t_{22}}{2s_{22}t_{22}},\quad e_{51}=\frac{a_1b_2+b_1a_2}{2a_2b_2},\quad e_{52}=\frac{a_2b_1-b_2a_1}{2a_2b_2}$$

$$a_1=p_{11}-p_{21}(e_{31}-e_{32}),\quad b_1=q_{11}-q_{21}(e_{31}+e_{32})$$

$$a_2=p_{12}-p_{22}(e_{75}-e_{76}),\quad b_2=q_{12}-q_{22}(e_{76}+e_{75})$$

可见，只要$\lambda_R>0$，任意λ都能使式(17－67)满足以上非零解条件。为不失一般性，取$\lambda=1$，并令

$$E_1+F_1=R=R^{(R)}+\mathrm{i}R^{(I)} \tag{17-86}$$

同时，将幂函数的待定系数表示成

$$\left.\begin{aligned}A_{2,2m-1}&=P_m=P_m^{(R)}+\mathrm{i}P_m^{(I)}\\A_{2,2m}+B_{2,2m}&=Q_m=Q_m^{(R)}+\mathrm{i}Q_m^{(I)}\end{aligned}\quad(m=1,2,3)\right\} \tag{17-87}$$

根据以上所得特征值及待定系数间的关系，可得复变函数的特征展开式，代入式(17－59)、式(17－60)，并考虑到

$$y^{\lambda_I}=[\cos(\lambda_I\ln r)+\mathrm{i}\sin(\lambda_I\ln r)]\mathrm{e}^{-\lambda_I\theta} \tag{17-88}$$

可得位移与应力的特征展开式

$$\begin{aligned}u_k=&\sum_{m=1}^{M}r^{\epsilon+m-\frac{1}{2}}\{[P_m^{(R)}s_{km}^{(R)}(\theta)+P_m^{(I)}s_{km}^{(I)}(\theta)]\cos(\lambda_I\ln r)+\\&[-P_m^{(R)}s_{km}^{(I)}(\theta)+P_m^{(I)}s_{km}^{(R)}(\theta)]\sin(\lambda_I\ln r)\}+\\&\sum_{m=1}^{M}r^m[Q_m^{(R)}t_{km}^{(R)}(\theta)+Q_m^{(I)}t_{km}^{(I)}(\theta)]+R^{(R)}q_k^{(R)}(r,\theta)+\\&R^{(I)}q_k^{(I)}(r,\theta)\end{aligned} \tag{17-89}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{ijk}=&\sum_{m=1}^{M}r^{\epsilon+m-\frac{3}{2}}\{[P_m^{(R)}g_{ykm}^{(R)}(\theta)+P_m^{(I)}g_{ykm}^{(I)}(\theta)]\cos(\lambda_I\ln r)+\\&[-P_m^{(R)}g_{ykm}^{(I)}(\theta)+P_m^{(I)}g_{ykm}^{(R)}(\theta)]\sin(\lambda_I\ln r)\}+\\&\sum_{m=1}^{M}r^{m-1}[Q_m^{(R)}h_{ykm}^{(R)}(\theta)+Q_{ykm}^{(I)}h_{ykm}^{(I)}(\theta)]+R^{(R)}p_{yk}^{(R)}(r,\theta)+\\&R^{(I)}p_{yk}^{(I)}(r,\theta)\end{aligned} \tag{17-90}$$



式(17-90)中 $m=1$ 的项即为奇异项。系数 $P_1^{(R)}, P_1^{(I)}$ 即为奇异应力场的控制量。

当层板的材料参数满足 $f=Q_2^2-4Q_1^2>0$ 时，特征值 λ_1 的虚部 $\lambda_I\neq 0$，分层尖端附近的奇异应力场为

$$\sigma_{zz1}\Big|_{\theta=0}=\sigma_{zz2}\Big|_{\theta=0}=r^{-\frac{1}{2}}k_1[(P_1^{(I)}+2\lambda_I P_1^{(R)})\cos(\lambda_I\ln r)+(P_1^{(R)}-2\lambda_I P_1^{(I)})\sin(\lambda_I\ln r)] \tag{17-91}$$

$$\sigma_{xz1}\Big|_{\theta=0}=\sigma_{xz2}\Big|_{\theta=0}=r^{-\frac{1}{2}}k_2[(P_1^{(I)}-2\lambda_I P_1^{(R)})\cos(\lambda_I\ln r)-(P_1^{(R)}+2\lambda_I P_1^{(I)})\sin(\lambda_I\ln r)] \tag{17-92}$$

式中

$$k_1=s_{11}(g_{25}-g_{15})+s_{21}(g_{45}-g_{35})$$
$$k_2=t_{11}(g_{25}+g_{15})+t_{21}(g_{45}+g_{35})$$

可见，在分层尖端附近，应力具有振荡奇异性。

众所周知，分层尖端附近应力场的振荡奇异性将在分层尖端附近产生位移“互相穿入”。与第 16 章所讨论的正交层板受拉分层情况相同，此问题也可通过在裂尖引入“小范围接触”模型予以解决(详见 16.4 节)。

当层板的材料参数满足 $f=Q_2^2-4Q_1^2<0$ 时，由式(17-80)可知 $\lambda_I=0$，而 $\varepsilon\neq 0$，且 $|\varepsilon|<\frac{1}{4}$。此时，奇异应力场不再是振荡的，而是单调的，且奇异性阶次由 $-\frac{1}{2}$ 变成 $\varepsilon-\frac{1}{2}$。于是，应力强度因子可定义为

$$\left.\begin{aligned}K_I&=\lim_{r\to 0}\sqrt{2\pi}r^{\frac{1}{2}-\varepsilon}\sigma_{zz1}\Big|_{\theta=0}=\sqrt{2\pi}k_1P_1^{(I)}\\K_{II}&=\lim_{r\to 0}\sqrt{2\pi}r^{\frac{1}{2}-\varepsilon}\sigma_{xz1}\Big|_{\theta=0}=\sqrt{2\pi}k_2P_1^{(R)}\end{aligned}\right\} \tag{17-93}$$

17.2.4 应力强度因子变分解法

为确定待定系数 $P_1^{(R)}, P_1^{(I)}, \cdots$，要应用变分方法满足裂纹表

面以外的边界条件。考虑到所有基本方程、层间连续条件与裂纹表面静力边界条件均已预先满足，根据参考文献[17.1]，[17.2]，广义泛函 Π_g 的驻值条件写为

$$\delta\Pi_g = \sum_{k=1}^{2}\int_{S_{pk}} (\sigma_{ij}n_j - \bar{p}_i)_k \delta u_{ik} \mathrm{d}s - \sum_{k=1}^{2}\int_{S_{uk}} (u_i - \bar{u}_i)_k \delta\sigma_{ijk} n_{jk} \mathrm{d}s = 0 \qquad (17-94)$$

式中，S_{pk}，S_{uk} 分别代表力与位移边界。

由于应力与位移的变分是任意的，上式与静力边界条件、位移边界条件是等价的。求解由此而得的线性方程组，即得到上述待定系数，进而可得奇异应力场控制量 $P_1^{(R)}$，$P_1^{(I)}$。

计算例题

对于图 17－4 所示模型，载荷写为

$$p_{z1} = -p, \qquad p_{z2} = p$$

每层材料参数为

$$E_{11} = 137.9\ \text{GPa}, \quad E_{22} = E_{33} = 14.48\ \text{GPa}, \quad G_{12} = 5.86\ \text{GPa}$$

$$\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.21$$

奇异应力场控制量可表示为

$$P_1^{(R)} = pX, \qquad P_1^{(I)} = pY$$

表 17－9 至表 17－12 给出层板的铺层角与量纲为 1 的尺寸取不同值时，λ_1 的数值以及 X 与 Y 随项数 M 增加的收敛情况。数值积分收敛精度 EPS$=10^{-4}$。

算例一 $\gamma_1 = \frac{\pi}{3}$，$\gamma_2 = \frac{\pi}{6}$。

计算求得 $\lambda_1 = -0.031\,673$。



表 17-9 $a=0.0822, b=0.1645, h_1=h_2=0.1645$

M	1	2	3	4	5
$X\times10^3$	−1.122 3	−0.149 3	−0.184 1	−0.154 7	−0.158 1
$Y\times10^3$	−0.166 7	−0.074 8	−0.167 9	−0.044 8	−0.045 5
M	6	7	8	9	10
$X\times10^3$	−0.155 5	−0.156 9	−0.156 1	−0.156 0	−0.155 8
$Y\times10^3$	−0.045 2	−0.044 9	−0.045 9	0.046 2	−0.046 3

表 17-10 $a=0.2571, b=0.5141, h_1=h_2=0.1288$

M	1	2	3	4	5	6
$X\times10^2$	1.295 5	−0.879 4	−0.224 8	−0.213 4	−0.206 8	−0.206 4
$Y\times10^2$	−0.197 9	−0.627 4	−0.138 3	−0.123 9	0.140 9	−0.150 4
M	7	8	9	10	11	12
$X\times10^2$	−0.202 4	−0.202 9	−0.191 6	−0.205 0	−0.203 0	−0.207 4
$Y\times10^2$	−0.151 6	−0.152 5	−0.164 8	−0.147 1	−0.152 7	−0.142 1

算例二 $\gamma_1=\frac{\pi}{4}, \gamma_2=0.0707963$。

计算求得 $\lambda_1=-0.0283566$。

表 17-11 $a=0.0822, b=0.1645, h_1=h_2=0.1645$

M	1	2	3	4	5	6
$X\times10^2$	−2.031 3	−0.244 1	−0.236 0	−0.272 0	−0.276 8	−0.277 9
$Y\times10^2$	−0.099 7	−0.118 0	−0.021 8	−0.109 1	−0.104 4	−0.109 1
M	7	8	9	10	11	12
$X\times10^2$	−0.279 9	−0.274 9	−0.277 7	−0.276 2	−0.275 2	−0.275 1
$Y\times10^2$	−0.094 8	−0.103 5	−0.092 7	−0.106 0	−0.103 9	−0.110 4



表 17-12　$a=0.2571, b=0.5141, h_1=h_2=0.1288$

M	4	5	6	7	8	9
$X\times10^2$	−0.396 8	−0.330 7	−0.326 2	−0.325 2	−0.334 9	−0.321 5
$Y\times10^2$	−0.233 5	−0.225 6	−0.230 5	−0.229 8	−0.237 4	−0.228 1
M	10	11	12	13	14	15
$X\times10^2$	−0.316 5	−0.323 5	−0.322 4	−0.285 8	−0.321 1	−0.321 5
$Y\times10^2$	−0.243 1	−0.231 5	−0.232 7	−0.279 7	−0.225 9	−0.235 8

计算所得线性方程组的系数矩阵是对称的，应力强度因子的收敛性也是令人满意的。

17.3　平面剪切型分层问题解析变分解法

在研究了对称斜交铺层层板在反平面变形与平面变形下的分层问题之后，考虑一个沿长度方向（y 向）两边简支的对称斜交铺层四层板受侧压问题。由于 y 向比较长，可将问题化为垂直于长度方向的平面应变问题，从而略去了由于拉剪耦合效应而产生的反平面剪切。这一问题的工程背景就是斜交铺层层合梁受侧压。与正交铺层情况相同，层间将出现分层，而且层间裂纹是平面剪切型的。

17.3.1　力学模型的建立

平面应变状态下的对称斜交铺层复合材料层合梁的受压状态仍可用图 16-4(a)表示。采用与 16.2 节相同的方法将其变形状态分解为对称与反对称状态，并根据反对称状态建立力学模型如图 17-5 所示。与图 17-3 反平面分层模型相同，在每一层板中



建立材料主轴坐标系 $O\xi\eta\zeta$，其中 ξ 轴与该层材料的纤维方向平行，并设 ξ 与 y 轴夹角(即铺层角)为 γ，而 ζ 轴与 z 轴重合。以下，将 $Oxyz$ 称为结构主轴坐标系或总体坐标系。

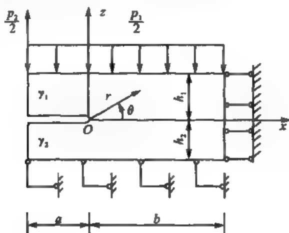


图 17-5 斜交层合梁分层的力学模型

17.3.2 基本条件与本征展开

根据 17.2 节的推导，斜交铺层复合材料层合梁中位移与应力的复变函数通解仍可表示为式(17-59)和式(17-60)。

由图 17-5，层间连续条件与分层表面边界条件为

$$\left.\begin{aligned} u_{x1}+\mathrm{i}u_{z1}&=u_{x2}+\mathrm{i}u_{z2}\\ \sigma_{zz1}+\mathrm{i}\sigma_{xz1}&=\sigma_{zz2}+\mathrm{i}\sigma_{xz2}\end{aligned}\right\}\quad(\theta=0)\qquad(17-95)$$

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_{zz1}\Big|_{\theta=\pi}=\sigma_{zz2}\Big|_{\theta=-\pi}=0\\ &u_{z1}\Big|_{\theta=\pi}=u_{z2}\Big|_{\theta=-\pi},\qquad \sigma_{xz1}\Big|_{\theta=\pi}=\sigma_{xz2}\Big|_{\theta=-\pi}\end{aligned}\right\}\qquad(17-96)$$

由于分层尖端位移不为零，复变函数应包括幂函数与指数函数这两类，即

$$\varphi_k(y_1)=\varphi_{1k}(y_1)+\varphi_{2k}(y_1)\qquad(17-97)$$

$$\psi_k(y_2)=\psi_{1k}(y_2)+\psi_{2k}(y_2)\qquad(17-98)$$



式中

$$\varphi_{1k}(y_1)=A_k y_1^{\lambda}+B_k y_1^{\bar{\lambda}},\qquad \psi_{1k}(y_2)=C_k y_2^{\lambda}+D_k y_2^{\bar{\lambda}} \tag{17-99}$$

$$\varphi_{2k}(y_1)=E_k e^{\lambda y_1}+F_k e^{\bar{\lambda} y_1},\qquad \psi_{2k}(y_2)=G_k e^{\lambda y_2}+H_k e^{\bar{\lambda} y_2} \tag{17-100}$$

这里,所有系数均为复数。

分别将式(17－99)、式(17－100)代入式(17－59)、式(17－60),再代入式(17－95)、式(17－96),可得关于幂函数待定系数与指数函数待定系数的齐次线性方程组。根据方程组具有非零解的条件可得特征值以及相应的待定系数间的关系。

根据关于幂函数待定系数的齐次线性方程组具有非零解的条件,可得两组实特征值

$$\lambda_1=\frac{n}{2}\qquad (n=1,3,5,\cdots) \tag{17-101}$$

$$\lambda_2=n\qquad (n=1,2,3,\cdots) \tag{17-102}$$

由此,将式(17－99)中的幂函数改写如下:

$$\varphi_{1k}(y_1)=A_k y_1^{\lambda_1}+C_k y_1^{\lambda_2},\qquad \psi_{1k}(y_2)=B_k y_2^{\lambda_1}+D_k y_2^{\lambda_2} \tag{17-103}$$

而关于指数函数待定系数的齐次线性方程组中不含有 λ,即对任意的 $\lambda\neq 0$,只要待定系数之间满足一定的条件,式(17－100)均可满足基本方程、裂纹表面边界条件与层间连续条件。不妨取 $\lambda=1$,并将式(17－100)中的指数函数改写为

$$\varphi_{1k}(y_1)=E_k e^{y_1},\qquad \psi_{2k}(y_2)=G_k e^{y_2} \tag{17-104}$$

根据上述特征值、复变函数的表达式以及裂纹表面边界条件与层间连续条件,可得相应系数间的关系

$$\left.\begin{aligned}&A_1^{(I)}=B_1^{(I)}=A_2^{(I)}=B_2^{(I)}=0\\&A_1^{(R)}=g_{15}A_2^{(R)},\qquad B_1^{(R)}=g_{35}A_2^{(R)},\qquad B_2^{(R)}=g_{75}A_2^{(R)}\end{aligned}\right\} \tag{17-105}$$



$$\left.\begin{aligned} &C_1^{(R)} = h_{15}C_2^{(R)}, \quad D_1^{(R)} = h_{35}C_2^{(R)}, \quad D_2^{(R)} = h_{75}C_2^{(R)} \\ &C_1^{(I)} = h_{26}C_2^{(I)} + h_{28}D_2^{(I)}, \quad D_1^{(I)} = h_{46}C_2^{(I)} + h_{48}D_2^{(I)} \end{aligned}\right\} \tag{17-106}$$

$$\left.\begin{aligned} &E_1^{(R)} = h_{15}E_2^{(R)}, \quad G_1^{(R)} = h_{35}E_2^{(R)}, \quad G_2^{(R)} = h_{75}E_2^{(R)} \\ &E_1^{(I)} = h_{26}E_2^{(I)} + h_{28}G_2^{(I)}, \quad G_1^{(I)} = h_{46}E_2^{(I)} + h_{48}G_2^{(I)} \end{aligned}\right\} \tag{17-107}$$

其中的实常数为

$$g_{75} = -\frac{q_{12} - (q_{11}k_{15} + q_{21}k_{35})}{q_{22} - (q_{11}k_{17} + q_{21}k_{37})}, \quad k_0 = t_{11}s_{21} - s_{11}t_{21}$$

$$g_{15} = k_{15} + k_{17}g_{75}, \quad g_{35} = k_{35} + k_{37}g_{75}$$

$$k_{15} = (t_{12}s_{21} + s_{12}t_{21})/k_0, \quad k_{35} = -(t_{12}s_{11} + s_{12}t_{11})/k_0$$

$$k_{17} = (t_{22}s_{21} + s_{22}t_{21})/k_0, \quad k_{37} = -(t_{22}s_{11} + s_{22}t_{11})/k_0$$

$$h_{15} = \frac{t_{21}(q_{12}t_{22} - t_{12}q_{22})}{t_{22}(q_{11}t_{21} - t_{11}q_{21})}, \quad h_{35} = -\frac{t_{11}}{t_{21}}h_{15}, \quad h_{75} = -\frac{t_{12}}{t_{22}}$$

$$h_{26} = \frac{p_{12}s_{21} - s_{12}p_{21}}{p_{11}s_{21} - s_{11}p_{21}}, \quad h_{28} = \frac{p_{22}s_{21} - s_{22}p_{21}}{p_{11}s_{21} - s_{11}p_{21}}$$

$$h_{46} = \frac{p_{12}s_{11} - s_{12}p_{11}}{s_{11}p_{21} - p_{11}s_{21}}, \quad h_{48} = \frac{p_{22}s_{11} - s_{22}p_{11}}{s_{11}p_{21} - p_{11}s_{21}}$$

根据以上推导,可得复变函数的特征展开式。进一步,将待定系数表示为

$$\left.\begin{aligned} &A_{2,2m-1}^{(R)} = P_m^{(R)}, \quad C_{2m}^{(R)} + iC_{2m}^{(I)} = Q_m^{(R)} + iQ_m^{(I)} \\ &D_{2m}^{(I)} = T_m \quad (m = 1,2,3) \\ &E_2^{(R)} + iE_2^{(I)} = R^{(R)} + iR^{(I)}, \quad G_2^{(I)} = S \end{aligned}\right\} \tag{17-108}$$

则可得位移与应力的特征展开式

$$u_k = \sum_{m=1}^{M} r^{m-\frac{1}{2}} P_m^{(R)} s_{km}^{(R)}(\theta) + \sum_{m=1}^{M} r^m [Q_m^{(R)} t_{km}^{(R)}(\theta) + Q_m^{(I)} t_{km}^{(I)}(\theta) + T_m r_{km}(\theta)] + R^{(R)} b_k^{(R)}(r,\theta) + R^{(I)} b_k^{(I)}(r,\theta) + S d_k(r,\theta) \tag{17-109}$$



$$\sigma_{ijk} = \sum_{m=1}^{M} r^{m-\frac{3}{2}} P_m^{(R)} g_{ijkm}^{(R)}(\theta) + \sum_{m=1}^{M} r^{m-1}[Q_m^{(R)} h_{ijkm}^{(R)}(\theta) + Q_m^{(I)} h_{ijkm}^{(I)}(\theta) + T_n e_{ijkm}(\theta)] + R^{(R)} a_{ijk}^{(R)}(r,\theta) + R^{(I)} a_{ijk}^{(I)}(r,\theta) + Sc_{ijk}(r,\theta)$$

(17－110)

式中，$s_{ikm}^{(R)}(\theta)$，$g_{ijkm}^{(R)}(\theta)$，$b_{ki}^{(R)}(r,\theta)$，$a_{kij}^{(R)}(r,\theta)$，…为 r,θ 的已知函数。

由上式可见，$m=1$ 的项就是奇异项，分层尖端应力场为

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{zz1}\Big|_{\theta=0} &= \sigma_{zz2}\Big|_{\theta=0} = 0 \\ \sigma_{xz1}\Big|_{\theta=0} &= \sigma_{xz2}\Big|_{\theta=0} = r^{-\frac{1}{2}}(t_{11}g_{15} + t_{21}g_{35})P_1^{(R)} \end{aligned}\right\}$$

(17－111)

可见应力场只是有单调奇异性而无振荡奇异性，应力强度因子可定义为

$$K_{II} = \lim_{r\to 0}\sqrt{2\pi r}\sigma_{xz1}\Big|_{\theta=0} = -\sqrt{2\pi}(t_{11}g_{15} + t_{21}g_{35})P_1^{(R)}$$

(17－112)

17.3.3 应力强度因子变分解法

利用分区广义变分原理确定应力强度因子与位移、应力特征展开式中的所有待定系数。由于两层中的所有基本方程、裂纹表面边界条件以及层间连续条件均已预先满足，裂纹表面以外的边界条件表示成

$$\sum_{k=1}^{2}\int_{S_{pk}}(\sigma_{ij}n_j - \bar{p}_i)_k\,\delta u_{ik}\,ds - \sum_{k=1}^{2}\int_{S_{uk}}(u_i - \bar{u}_i)_k\,\delta\sigma_{ijk}n_{jk}\,ds = 0$$

(17－113)

随着本征展开式中项数的增加，求解由上式所得线性方程组，即得收敛的应力强度因子，进而得到所有待定系数。

计算例题

载荷为

$$p_1 = -p, \qquad p_2 = (a+b)p$$



每层板的材料常数为

$$E_{11} = 137.9 \text{ GPa}, \quad E_{22} = E_{33} = 15.48 \text{ GPa}, \quad G_{12} = 5.86 \text{ GPa}$$

$$\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.21$$

应力强度因子表示成

$$K_{\mathrm{II}} = \sqrt{2\pi} pX$$

而

$$X = (t_{11} g_{15} + t_{21} g_{35}) P_1^{(R)} / p$$

取数值积分收敛精度 EPS$=10^{-4}$，表 17-13 至表 17-16 给出不同的层板尺寸与铺层角下，X 随项数 M 增加的收敛情况。

算例一 $\gamma_1 = \frac{\pi}{3}, \gamma_2 = \frac{\pi}{6}$。

表 17-13 $a=0.2571, b=0.5141, h_1=h_2=0.1288$

M	5	6	7	8	9	10	11
X	−3.659 1	−3.879 9	−3.781 7	−3.788 7	−3.775 2	−3.778 4	−3.745 3

表 17-14 $a=0.2571, b=0.3864, h_1=h_2=0.1288$

M	4	5	6	7	8	9
X	−2.117 5	−2.215 5	−2.170 8	−2.157 0	−2.187 7	2.145 0

算例二 $\gamma_1 = \frac{\pi}{2}, \gamma_2 = \frac{\pi}{6}$。

表 17-15 $a=0.2571, b=0.5141, h_1=h_2=0.1288$

M	4	5	6	7	8	9
X	−3.343 0	−3.462 1	−3.685 4	−3.428 5	−3.577 8	−3.575 2

表 17-16 $a=0.2571, b=0.2571, h_1=h_2=0.1288$

M	4	5	6	7	8	9
X	−1.957 2	−2.048 8	−1.977 1	−1.991 5	−1.951 6	−1.895 3

计算所得线性方程组的系数矩阵是对称的,应力强度因子的收敛性也是令人满意的。

参考文献

[17.1] 钱伟长. 变分法与有限元. 上册. 北京:科学出版社,1980.

[17.2] 胡海昌. 弹性力学的变分原理及其应用. 北京:科学出版社,1981.

[17.3] 夏焜,张行. 复合材料层板层间应力分析的能量法. 复合材料学报,1986,3(1):45-53.

[17.4] SUO Z. Singularities, Interfaces and Cracks in Dissimilar Anisotropic Media. Proc. R. Soc. Lond, 1990, A427:331-358.

[17.5] WANG S S. Edge Delamination in Angle-Ply Composite Laminates. AIAA Journal, 1984, 22(2):256-264.

[17.6] 孟庆春,张行,王俊奎. 对称角铺层复合材料层板在反平面变形情况下分层问题的解析——广义变分解法. 复合材料学报, 1991,8(1):81-90.

[17.7] 孟庆春,张行,王俊奎. 对称斜交铺层复合材料层板在平面变形情况下分层问题的解析——广义变分解法. 复合材料学报, 1992,9(2):1-12.

第 18 章　复合材料层合板三维分层力学研究

在第 16 章和第 17 章中，采用解析变分解法研究了正交铺层层合板和斜交铺层层合板的二维分层问题。就工程实际问题而言，分层的多数形式并非二维穿透分层，而是形成一个三维的分层区。这使得问题的分析变得非常复杂，如果采用有限元法分析三维问题，则其工作量和难度都大大增加。本章发展了三维裂纹问题分析的能量差率方法，利用片条合成——能量解法求解复合材料层合板的三维分层问题。这种方法充分利用了杆板理论的结果，使得问题的求解非常简单，可以得到闭合解答，大大方便了工程应用。

18.1　层合直梁二维分层问题的解析解法与分层力学分析

18.1.1　力学模型的建立

图 18－1 表示两边简支的复合材料四层层合梁，铺层上下对称，在外层与内层之间存在上下对称的层间穿透分层。

层合梁受横向载荷作用，将图 18－2 所示的原始受力状态分解成对称状态⟨α⟩与反对称状态⟨β⟩，如图 18－3 与图 18－4 所示。在⟨α⟩状态中，结构承受对称载荷，产生对称变形，分层上下表面相互压紧。在⟨β⟩状态中，层合梁承受反对称载荷，产生反对称变形，分层上下表面间存在相对切向位移。可以认为分层仅取决于反对



称载荷状态。

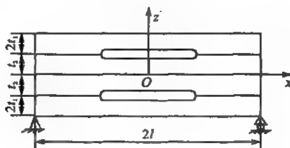


图 18-1　含对称分层的复合材料层合梁

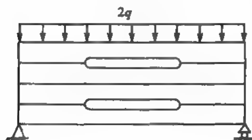


图 18-2 原始受力状态

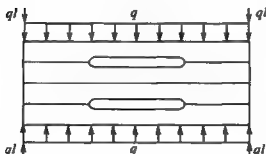


图 18-3　对称状态⟨α⟩

进一步将⟨β⟩状态分解成⟨β_1⟩与⟨β_2⟩状态，如图 18-5、图 18-6所示。在⟨β_1⟩状态中，分层表面受到剪切载荷 $\bar{\tau}_{xz}$，它们等于无分层时，层合梁中该层层间切应力。⟨β_1⟩状态即相当于无分层层合梁，$\bar{\tau}_{xz}$ 就是由层合梁理论求出的层间切应力。在⟨β_2⟩状态中，各分层表面受到与 $\bar{\tau}_{xz}$ 大小相等、方向相反的剪切载荷 τ_{xz}，层



合梁分层的产生与扩展即源于此状态。与分层相关的位移和应力取决于 τ_{xz}。通过以上分析，在考虑梁受横向均布载荷的分层问题时，就只须研究图 18-6 所示的 $\langle\beta_2\rangle$ 状态。

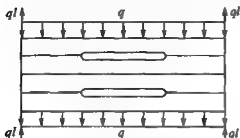


图 18-4 反对称状态 $\langle\beta\rangle$

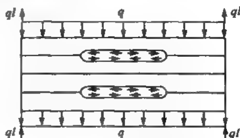


图 18-5 无分层状态 $\langle\beta_1\rangle$

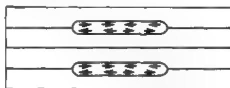


图 18-6 附加分层状态 $\langle\beta_2\rangle$

18.1.2 支配方程与边界条件

在 $\langle\beta_2\rangle$ 状态中，假设未分层段以及分层两侧各层梁中，平面假设与单向受力假设均成立。由于未分层段仅在其与分层段交界处受到自相平衡力系作用，所以可被看成刚体。于是，在图 18-6 中取分层段建立力学模型，如图 18-7所示。由于 $\langle\alpha\rangle$ 状态的存在，可将分层两侧梁段的挠度视为相同。设此挠度为 $w(x)$。

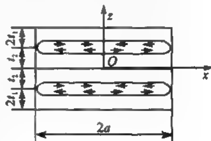


图 18-7 力学模型



1. 几何方程

根据上述的假设，两层的面内位移可表示为

$$\left.\begin{aligned} u_1(x,z) &= u_{10}(x) - (z - t_1 - t_2)\frac{\mathrm{d}w(x)}{\mathrm{d}x} \\ u_2(x,z) &= -\frac{\mathrm{d}w(x)}{\mathrm{d}x}z \end{aligned}\right\} \quad (18-1)$$

纵向应变为

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1(x,z) &= \frac{\partial u_1(x,z)}{\partial x} \\ \varepsilon_2(x,z) &= \frac{\partial u_2(x,z)}{\partial x} \end{aligned}\right\} \quad (18-2)$$

以上各式中，除 t_1 和 t_2 外，下标均表示所在的层数（下同）；$u_{10}(x)$ 代表第一层中面的位移。

2. 物理方程

根据单向受力假设，各层横截面上的正应力为

$$\sigma_1 = E_1\varepsilon_1, \qquad \sigma_2 = E_2\varepsilon_2 \quad (18-3)$$

E_1 和 E_2 为两层材料沿 x 方向的杨氏弹性模量。

3. 平衡方程

在任一处将梁切开，可得横截面上的内力，如图 18－8 所示。两层横截面上的轴力与弯矩分别为

$$\left.\begin{aligned} &N_1 = \int_{t_2}^{t_2+2t_1}\sigma_1\,\mathrm{d}z, \qquad M_1 = -\int_{t_2}^{t_2+2t_1}\sigma_1(z - t_1 - t_2)\mathrm{d}z \\ &N_2 = 0, \qquad M_2 = -2\int_0^{t_2}\sigma_2 z\mathrm{d}z \end{aligned}\right\}$$

$$(18-4)$$

以图 18－8 所示内力方向为正，外层梁段纵向力的平衡条件与整体梁的合力矩平衡条件为

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}x} = \tau_{xz} \\ &2M_1 + M_2 - 2(t_1 + t_2)N_1 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (18-5)$$



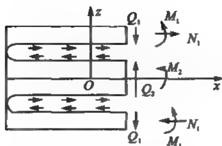


图 18-8 层合梁分层段的内力

4. 边界条件

$$
\left.\begin{aligned}
&x=0\ \text{时} \qquad u_{10}=0,\quad \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}=0\\
&x=a\ \text{时} \qquad u_{10}=-\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}(t_1+t_2),\quad w=0
\end{aligned}\right\} \tag{18-6}
$$

18.1.3 附加位移的解析解法

附加分层状态中，分层表面的剪切载荷总可以表示为幂级数形式，设其通项为

$$
\tau_{xz}(x)=\lambda_m\left(\frac{x}{a}\right)^m \qquad (m=0,1,2,\cdots) \tag{18-7}
$$

由式(18-1)至式(18-5)可得

$$
u_{10}(x)=\frac{1}{2E_1t_1}\left[\frac{\lambda_m}{(m+1)(m+2)a^m}x^{m+2}+Ax+B\right]
$$

$$
\frac{\mathrm{d}w(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{3(t_1+t_2)}{2E_1t_1^3+E_2t_2^3}\left[\frac{\lambda_m}{(m+1)(m+2)a^m}x^{m+2}+Ax+B\right]
$$

$$
w(x)=\frac{3(t_1+t_2)}{2E_1t_1^3+E_2t_2^3}\left[\frac{\lambda_m}{(m+1)(m+2)(m+3)a^m}x^{m+2}+\frac{1}{2}Ax^2+Bx+C\right]
$$

式中，A，B，C 为待定常数。

根据边界条件式(18-6)，可确定待定常数

$$\left.\begin{aligned} A &= -\frac{\lambda_m}{(m+1)(m+2)}a \\ B &= 0 \\ C &= \frac{\lambda_m}{2(m+2)(m+3)}a^3 \end{aligned}\right\} \tag{18-8}$$

将式(18－8)代入式(18－7)中，可得梁内与分层相关的附加位移

$$\left.\begin{aligned} u_{10}(x) &= \frac{\lambda_m a^2}{2E_1 t_1(m+1)(m+2)}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{m+2} - \left(\frac{x}{a}\right)\right] \\ w(x) &= \frac{3(t_1+t_2)}{2E_1 t_1^3 + E_2 t_2^3}\frac{\lambda_m a^3}{2(m+2)(m+3)}\left[1 - \frac{m+3}{m+1}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \right. \\ &\left. \frac{2}{m+1}\left(\frac{x}{a}\right)^{m+3}\right] \end{aligned}\right\} \tag{18-9}$$

由式(18－9)可见，$x=a$ 处，$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}=0, u_{10}=0$。这表明分层段与未分层段的交界面既无平移亦无转动，未分层段可被视为固定端。

式(18－9)给出的位移对应于幂级数剪切载荷的通项。根据此通项解答，利用叠加原理即可得到任意载荷作用下的位移解答。该位移解答形式除了可用于解决梁的问题外，还可用于构造层板的位移模态。

18.1.4 分层力学分析

由式(18－9)，可分别写出分层区的应变能和外力势能的表达式

$$\left.\begin{aligned} U &= A_{11}u_0^2 + A_{33}w_0^2 \\ V &= B_1 u_0 + B_3 w_0 \end{aligned}\right\} \tag{18-10}$$

分层区的总势能为

$$\Pi = U + V \tag{18-11}$$



分层区的能量释放率为

$$G = \frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}a} \tag{18-12}$$

将式(18-10)、式(18-11)代入式(18-12)，即可得出分层区按比例扩展时的能量释放率。

18.2　层合平板三维分层问题的能量解法与分层力学分析

18.2.1　附加位移的片条合成表达式

1. 复合材料层合板的受力状态分解

图18-9表示四边简支复合材料四层板、铺层上下对称，受横向载荷作用，在外层与内层间存在上下对称的椭圆形分层区。分层区边长为 $2a$，$2b$，外层、内层厚度分别为 $2t_1$ 与 t_2。如图建立 $Oxyz$ 坐标系，原点 O 位于两分层区中心连线与层板上下对称面的交点处，x，y 轴平行于分层区的两边。

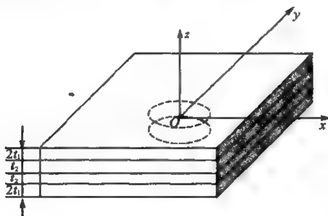


图18-9　含椭圆形内部分层的复合材料层合板

层合板沿 z 方向受到横向分布载荷作用。载荷关于 xz，yz 平面对称，将 xz 平面内层板的受力状态示于图 18－10。将图 18－10所示原始受力状态分解为对称状态〈α〉与反对称状态〈β〉，如图 18－11 与图 18－12 所示。分层的产生与扩展可看成不受对称载荷的影响，而仅取决于反对称载荷状态。

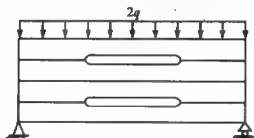


图 18－10　原始受力状态

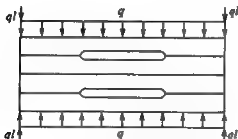


图 18－11　对称状态〈α〉

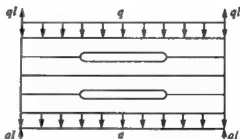


图 18－12　反对称状态〈β〉

进一步将图 18－12 所示的〈β〉状态分解成〈β_1〉与〈β_2〉状态，如图 18－13 与图 18－14 所示。在〈β_1〉状态中，分层表面受到剪切载荷 $\bar{\tau}_{xz}(x,y)$和 $\bar{\tau}_{zy}(x,y)$。它们等于无分层层板中该层层间的切应力。〈β_1〉状态即相当于无分层状态。$\bar{\tau}_{xz}(x,y)$和 $\bar{\tau}_{zy}(x,y)$就是由常规层板理论所求出的层间切应力。由于结构关于三个坐标平面对称，外载荷关于 xOz 与 yOz 平面对称，而关于 xOy 平面反对称，故 $\bar{\tau}_{xz}(x,y)$和 $\bar{\tau}_{zy}(x,y)$关于 xOz 与 yOz 平面对称，而关于 xOy 平面反对称，且分层上下表面的剪切载荷互为作用力与反作用力。在图 18－14 所示的〈β_2〉状态中，各分层表面受到与



$\tau_{zx}(x,y)$和$\tau_{zy}(x,y)$大小相等、方向相反的剪切载荷$\tau_{zx}(x,y)$和$\tau_{zy}(x,y)$。层板分层的产生与扩展即源于此状态。与分层相关的位移和应力取决于$\tau_{zx}(x,y)$和$\tau_{zy}(x,y)$。通过以上分析，在考虑板受横向分布载荷的分层问题时，就只须研究图 18-14 所示的附加分层状态(β_2)，从而使问题大为简化。

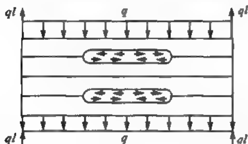


图 18-13　无分层状态(β_1)

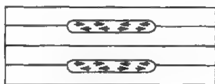


图 18-14　附加分层状态(β_2)

2. 位移函数的设立

在图 18-14 所示的附加分层状态中，假设分层部分在 xOz，yOz 平面内无剪切变形。对于未分层区，在未分层的层板表面与边界上没有外力，在它与分层区的交界面上也无合力，根据经典的层合板理论，板的未分层区可被视为刚体。若在层合板中取出一与 zx 平面或 yz 平面平行、厚度为无限小的切片，则该切片可看成是含分层的层合梁，在分层表面上受到互相垂直的剪切载荷作用。在切片平面内的剪切载荷作用下，切片的受力状态与图 18-7 所示梁的受力状态相同，切片平面内的剪切载荷引起挠度与面内位移；在与切片平面垂直方向上的剪切载荷作用下，切片可看成在横向载荷作用下梁的弯曲问题，其弯曲产生的挠度即为切片在层板平面内的面内位移。由此，来构造层合板的位移模态。

与 18.1 节类似，设剪切载荷以幂级数形式给出，其通项表示为

$$\left.\begin{aligned}&\tau_{zx}=\lambda_{mn}\left(\frac{x}{a}\right)^{m}\left(\frac{y}{b}\right)^{n},\qquad \tau_{zy}=\mu_{pq}\left(\frac{x}{a}\right)^{p}\left(\frac{y}{b}\right)^{q}\\&(m,n,p,q=0,1,2,\cdots)\end{aligned}\right\}\tag{18-13}$$

式中

$$a' = a\sqrt{1-\left(\frac{y}{b}\right)^2}, \qquad b' = b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

考虑到结构与载荷的对称性，仅画出复合材料层合板分层区的第一象限，并将外层、内层分别标识为第一、二层，如图 18－15 所示。

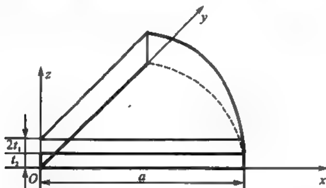


图 18－15 分层区第一象限

首先，来构造层合板分层部分的出面位移模态。

沿 $y=0$ 取切片，则在此切片中，根据式(18－9)，挠度可表示为

$$w(x,0) = w_0\left[1-\frac{m+3}{m+1}\left(\frac{x}{a}\right)^2+\frac{2}{m+1}\left(\frac{x}{a}\right)^{m+3}\right] \tag{18-14}$$

再沿 y 方向取切片过点$(x,\ 0)$，则在此切片中，挠度可表示为

$$w(x,y) = w(x,0)\left[1-\frac{n+3}{n+1}\left(\frac{y}{b'}\right)^2+\frac{2}{n+1}\left(\frac{y}{b'}\right)^{n+3}\right] \tag{18-15}$$

故分层区内任一点的位移可表示为

$$w(x,y) = w_0\left[1-\frac{m+3}{m+1}\left(\frac{x}{a}\right)^2+\frac{2}{m+1}\left(\frac{x}{a}\right)^{m+3}\right]\left[1-\frac{n+3}{n+1}\left(\frac{y}{b'}\right)^2+\frac{2}{n+1}\left(\frac{y}{b'}\right)^{n+3}\right] \tag{18-16}$$



式中，w_0为挠度幅值。

也可以先取 y 方向的切片，再取 x 方向的切片。构造的结果如下：

$$w(x,y)=w_0\left[1-\frac{m+3}{m+1}\left(\frac{x}{a}\right)^2+\frac{2}{m+1}\left(\frac{x}{a}\right)^{m+3}\right]\cdot\left[1-\frac{n+3}{n+1}\left(\frac{y}{b}\right)^2+\frac{2}{n+1}\left(\frac{y}{b}\right)^{n+3}\right] \quad (18-17)$$

综合式(18－16)、式(18－17)，可取

$$w(x,y)=\frac{1}{2}w_0\left\{\left[1-\frac{m+3}{m+1}\left(\frac{x}{a}\right)^2+\frac{2}{m+1}\left(\frac{x}{a}\right)^{m+3}\right]\cdot\left[1-\frac{n+3}{n+1}\left(\frac{y}{b'}\right)^2+\frac{2}{n+1}\left(\frac{y}{b'}\right)^{m+3}\right]+\left[1-\frac{m+3}{m+1}\left(\frac{x}{a'}\right)^2+\frac{2}{m+1}\left(\frac{x}{a'}\right)^{m+3}\right]\left[1-\frac{n+3}{n+1}\left(\frac{y}{b}\right)^2+\frac{2}{n+1}\left(\frac{y}{b}\right)^{m+3}\right]\right\} \quad (18-18)$$

现在来构造层合板分层部分的面内位移模态。

首先沿 x 方向取切片，切片过原点，根据式(18－9)，此切片中，第一层板中面的面内位移可表示为

$$u_{10}(x,0)=u_0\left[\frac{x}{a}-\left(\frac{x}{a}\right)^{m+2}\right] \quad (18-19)$$

式中，u_0为待定位移参量。

再过点$(x,0)$沿 y 方向取切片，此切片受 x 方向的载荷，如图 18－16 所示，所以此切片应看成处于弯曲变形状态。

下面来求 y 方向切片的位移模态。

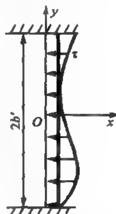


图 18－16　y 方向切片的受载状态

设梁的长度为 $2b'$，以梁的中点为原点，其载荷分布为

$$\tau=\mu_n\left(\frac{y}{b'}\right)^n \quad (18-20)$$



则受载梁的平衡方程为

$$EI_z \frac{d^4 u}{dy^4} = \mu_n \left(\frac{y}{b'}\right)^n \tag{18-21}$$

对上式积分，得到

$$EI_z \frac{d^3 u}{dy^3} = \mu_n \left[\frac{1}{n+1}\left(\frac{y}{b'}\right)^{n+1} b' + A\right]$$

$$EI_z \frac{d^2 u}{dy^2} = \mu_n \left[\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(\frac{y}{b'}\right)^{n+2} b'^2 + A\left(\frac{y}{b'}\right)b' + B\right]$$

$$EI_z \frac{du}{dy} = \mu_n \left[\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\left(\frac{y}{b'}\right)^{n+3} b'^3 + \frac{A}{2}\left(\frac{y}{b'}\right)^2 b'^2 + B\left(\frac{y}{b'}\right)b' + C\right]$$

$$EI_z u - \mu_n \left[\frac{\left(\frac{y}{b'}\right)^{n+4} b'^4}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} + \frac{A}{6}\left(\frac{y}{b'}\right)^3 b'^3 + \frac{B}{2}\left(\frac{y}{b'}\right)^2 b'^2 + C\left(\frac{y}{b'}\right)b' + D\right] \tag{18-22}$$

式中，A,B,C,D 为待定常数，需根据边界条件来确定。

图 18－16 所示情况的边界条件可表示为

$$\left.\begin{aligned} y = 0, &\quad \frac{du}{dy} = 0 \\ y = b' &\quad \frac{du}{dy} = 0 \quad (u = 0) \end{aligned}\right\} \tag{18-23}$$

又由载荷分布的对称性，在梁中点处，剪力为零，即有

$$y = 0, \quad \frac{d^3 u}{dy^3} = 0 \tag{18-24}$$

由式(18－21)至式(18－24)可确定待定常数，即



$$\left.\begin{aligned} &A = 0 \\ &B = -\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}b'^2 \\ &C = 0 \\ &D = \frac{1}{2(n+1)(n+3)(n+4)}b'^4 \end{aligned}\right\} \quad (18-25)$$

由以上各式可得

$$u = \frac{\mu_n}{EI_z}\frac{b'^4}{2(n+1)(n+3)(n+4)}\left[1-\frac{n+4}{n+2}\left(\frac{y}{b'}\right)^2+\frac{2}{n+2}\left(\frac{y}{b'}\right)^{n+4}\right] \quad (18-26)$$

于是过$(x, 0)$点 y 方向切片 x 方向的中面位移可表示为

$$u_{10}(x,y) = u_{10}(x,0)\left[1-\frac{n+4}{n+2}\left(\frac{y}{b'}\right)^2+\frac{2}{n+2}\left(\frac{y}{b'}\right)^{n+4}\right] \quad (18-27)$$

将式(18-19)代入,分层区内第一层中面上任一点(x, y)的 x 方向位移为

$$u_{10}(x,y) = u_0\left[\frac{x}{a}-\left(\frac{x}{a}\right)^{m+2}\right]\left[1-\frac{n+4}{n+2}\left(\frac{y}{b'}\right)^2+\frac{2}{n+2}\left(\frac{y}{b'}\right)^{n+4}\right] \quad (18-28)$$

同理,分层区内第一层中面上任一点(x, y)的 y 方向位移为

$$\nu_{10}(x,y) = \nu_0\left[\frac{y}{b}-\left(\frac{y}{b}\right)^{n+2}\right]\left[1-\frac{m+4}{m+2}\left(\frac{x}{a'}\right)^2+\frac{2}{m+2}\left(\frac{x}{a'}\right)^{m+4}\right] \quad (18-29)$$

式中,ν_0 为待定位移参量。

在小变形、无剪切变形条件下,一、二两层面内位移为

$$\left.\begin{aligned} &u_1(x,y,z_1) = u_{10}(x,y)-\frac{\partial w(x,y)}{\partial x}z_1 \\ &\nu_1(x,y,z_1) = \nu_{10}(x,y)-\frac{\partial w(x,y)}{\partial y}z_1 \\ &u_2(x,y,z_2) = -\frac{\partial w(x,y)}{\partial x}z_2,\quad \nu_2(x,y,z_2) = -\frac{\partial w(x,y)}{\partial y}z_2 \end{aligned}\right\} \quad (18-30)$$



上式中，z_1，z_2 分别为第一、二层的局部坐标。z_1 的坐标原点位于第一层中面与总体坐标 z 轴的交点上，z_2 的坐标原点与总体坐标原点重合。z_1，z_2 与 z 的关系如下：

$$z_2 = z \qquad (0 \leqslant z \leqslant t_2)$$

$$z_1 = z - t_1 - t_2 \qquad (t_2 \leqslant z \leqslant t_2 + 2t_1)$$

至此，构造了以待定位移参量 u_0，v_0，w_0 表示的对应于式(18－13)载荷状态的分层区内的位移模态。此位移模态满足分层区位移边界条件。

18.2.2 附加位移的片条合成——能量解法

在小变形条件下，根据几何方程

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{18－31}$$

由式(18－18)、式(18－27)至式(18－30)可得应变分量的表达式

$$\varepsilon_{ij(k)} = r_{ij(k)}(x,y)u_0 + s_{ij(k)}(x,y)v_0 + t_{ij(k)}(x,y)w_0 \tag{18－32}$$

式中，k 表示层号；$i,j=1,2$，与 x、y 相对应；函数 $r_{ij(k)}$，$s_{ij(k)}$，$t_{ij(k)}$ 是根据式(18－18)、式(18－27)至式(18－30)求出的系数。

在线弹性条件下，层板的物理方程可表示为

$$\sigma_{ij(k)} = C_{ijpq}^{(k)}\varepsilon_{ij(k)} \qquad (i,j,p,q = 1,2) \tag{18－33}$$

式中，$k=1,2$，表示层号，不求和；$C_{ijpq}^{(k)}$ 为各层刚度系数。

若层板为正交铺层，且外层为 0°层(纤维沿 y 轴)，内层为 90°层，则在这种情况下，有

$$\left.\begin{aligned}
&C_{1111}^{(1)} = \bar{C}_{22}, \quad C_{1122}^{(1)} = C_{2211}^{(1)} = \bar{C}_{12} = \bar{C}_{21}, \quad C_{2222}^{(1)} = \bar{C}_{11} \\
&C_{1111}^{(2)} = C_{11}, \quad C_{1122}^{(2)} = C_{2211}^{(2)} = \bar{C}_{12} = \bar{C}_{21}, \quad C_{2222}^{(2)} = \bar{C}_{22} \\
&C_{1212}^{(1)} = C_{2121}^{(1)} = C_{1212}^{(2)} = C_{2121}^{(2)} = \bar{C}_{66} \\
&C_{1112}^{(k)} = C_{1121}^{(k)} = C_{2212}^{(k)} = C_{2221}^{(k)} = 0 \\
&C_{1211}^{(k)} = C_{2111}^{(k)} = C_{1222}^{(k)} = C_{2122}^{(k)} = 0
\end{aligned}\right\} \tag{18－34}$$



式中，$\bar{C}_{11}$，$\bar{C}_{22}$等为材料主轴坐标系中的刚度系数。

$$\left.\begin{aligned}&\bar{C}_{11}=\frac{E_1}{(1-\nu_{12}\nu_{21})},\qquad \bar{C}_{22}=\frac{E^2}{(1-\nu_{12}\nu_{21})}\\&\bar{C}_{12}=\bar{C}_{21}=\frac{\nu_{21}E_1}{(1-\nu_{12}\nu_{21})}=\frac{\nu_{12}E_2}{(1-\nu_{12}\nu_{21})},\qquad \bar{C}_{66}-G_{12}\end{aligned}\right\}$$

(18－35)

式中，下标1表示纤维方向，下标2表示垂直纤维方向，E_i为i向的弹性模量；ν_{ij}为当应力作用在i方向时，由它引起的j方向应变与i方向应变的泊松比，$\nu_{ij}=-\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i}$（仅受$\sigma_i$作用），$G_{12}$为1－2平面内的剪切模量。

分层区内层板的应变能（只考虑第一象限）为

$$U=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\int_{V_k}\sigma_{ij(k)}\varepsilon_{ij(k)}\,\mathrm{d}\nu_k \tag{18-36}$$

式中，V_k为层板第一、二层在第一象限内的体积。外力势能为

$$\begin{aligned}V=&-\int_A\{\tau_{zx}(x,y)[u_1(x,y,-t_1)-u_2(x,y,t_2)]+\\&\tau_{zy}(x,y)[\nu_1(x,y,-t_1)-\nu_2(x,y,t_2)]\}\mathrm{d}A\end{aligned}$$

(18－37)

式中，A为分层区面积的1/4；t_1，t_2分别为分层上下表面在z_1，z_2局部坐标下的坐标值。

对式(18－36)、式(18－37)求变分，经整理可得

$$\left.\begin{aligned}&\delta U=\{u_0\quad \nu_0\quad w_0\}\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\delta u_0\\\delta\nu_0\\\delta w_0\end{bmatrix}\\&\delta V=[B_1\quad B_2\quad B_3][\delta u_0\quad \delta\nu_0\quad \delta w_0]^{\mathrm{T}}\end{aligned}\right\}$$

(18－38)

式中，A_{ij}，B_j可根据应变、应力表达式积分而得。

最后，根据最小势能原理

$$\delta(U+V)=0 \tag{18-39}$$

得到

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} \tag{18-40}$$

可以证明

$$A_{12} = A_{21}, \qquad A_{13} = A_{31} = A_{23} = A_{32} = 0$$

求解线性方程组式(18－40),可得

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= \frac{B_1 A_{22} - B_2 A_{12}}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{12}} \\ v_0 &= \frac{B_2 A_{11} - B_1 A_{12}}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{12}} \\ w_0 &= \frac{B_3}{A_{33}} \end{aligned}\right\} \tag{18-41}$$

由上式的计算结果可得出分层区三个方向的位移模态,进一步可根据几何方程和物理方程得出分层区的位移场和应力场。

18.2.3 附加位移的三角级数——能量解法

前面在层合梁分层问题力学模型的基础上构造了层合板分层问题的位移模态。下面,利用三角级数来构造位移模态。

由于研究对象相同,所以在这里不再重复力学模型的建立过程,直接对图 18－14 所示的$\langle\beta_2\rangle$状态进行分析。考虑到结构与载荷的对称性,仅分析分层区的第一象限.并将外层标识为第一层,内层标识为第二层。

对于层板的未分层区,在图 18－14 所示的$\langle\beta_2\rangle$ 状态中,未分层的层板表面与边界上都没有外力,未分层区与分层区的交界面上也无合力。故根据经典的层板理论,层板的未分层区可视为刚体。考虑到结构及载荷的对称性,可得分层区第一象限边界条件

$x=0$ 时 $\qquad u_{10}=0, \qquad \dfrac{\partial w}{\partial x}=0$



$y=0$ 时 $\qquad \nu_{10}=0, \quad \dfrac{\partial w}{\partial y}=0$

在边界曲面$\left(\dfrac{x}{a}\right)^2+\left(\dfrac{y}{b}\right)^2=1$ 上，有

$$w=0, \quad u_{10}=0, \quad \nu_{10}=0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial w}{\partial y}=0$$

式中，u_{10}，ν_{10}分别为第一层中面的 x，y 向位移；w 为板的横向位移。另外应指出，在状态分解过程中，由于对称受载状态的存在，可以认为分层区外层与内层之间存在法向约束，所以内、外层的横向位移相同。

根据边界条件，可设

$$\left.\begin{aligned} w &= \sum A_{mn}\left[\xi f_m\left(\frac{x}{a}\right)f_n\left(\frac{y}{b'}\right)+(1-\xi)f_m\left(\frac{x}{a'}\right)f_n\left(\frac{y}{b}\right)\right] \\ u_{10} &= \sum B_{mn}g_m\left(\frac{x}{a}\right)f_n\left(\frac{y}{b'}\right) \\ \nu_{10} &= \sum C_{mn}f_m\left(\frac{x}{a'}\right)g_n\left(\frac{y}{b}\right) \qquad (m,n=1,2,3,\cdots) \end{aligned}\right\} \tag{18-42}$$

式中，A_{mn}，B_{mn}，C_{mn}，ξ 均为待定常数。

$$a'=a\sqrt{1-\left(\frac{y}{b}\right)^2}, \qquad b'=b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

$$f_m\left(\frac{x}{a}\right)=\cos\left(\frac{2m-1}{a}\pi x\right)+1, \qquad f_n\left(\frac{y}{b}\right)=\cos\left(\frac{2n-1}{b}\pi y\right)+1$$

$$f_m\left(\frac{x}{a'}\right)=\cos\left(\frac{2m-1}{a'}\pi x\right)+1, \qquad f_n\left(\frac{y}{b'}\right)=\cos\left(\frac{2n-1}{b'}\pi y\right)+1$$

$$g_m\left(\frac{x}{a}\right)=\sin\left(\frac{2m-1}{a}\pi x\right), \qquad g_n\left(\frac{y}{b}\right)=\sin\left(\frac{2n-1}{b}\pi y\right)$$

为了计算简便，在这里取 $\xi=1/2$。

至此，利用三角级数构造了层合板分层三维问题的位移模态。同样，根据能量法，可以求解出位移函数中的广义位移，并进一步得到应变、应力解答，具体过程不再详述。



18.2.4 含椭圆分层层合板分层力学分析的能量差率方法

为了分析三维分层问题，采用法向切片法。首先在分层前沿切取法向切片，然后从两方面分析。一方面，假设椭圆分层区前沿的位移场模态，根据第 17 章中对二维分层问题的分析并将法向切片分层表面位移在分层前沿展开，建立分层区能量差率和分层区位移幅值的关系；另一方面，根据 18.2.2 节介绍的片条合成——能量解法确定分层区能量差率。由此确定位移幅值，进而得到能量释放率沿分层前沿的分布。

1. 二维裂纹总位能差率与应力强度因子的关系

对于法向切片而言，平面剪切和反平面剪切同时存在。而且，不论层板怎样铺设，分层上下的层板应按斜交铺设处理，各切片上下层板的铺层角与切片位置有关。

对于斜交铺层复合材料之间的Ⅱ型与Ⅲ型层间裂纹问题（如图 18－17 所示），第 17 章用特征函数展开法，用应力强度因子表示裂纹延长线上的近场切应力与裂纹上下表面面内位移。

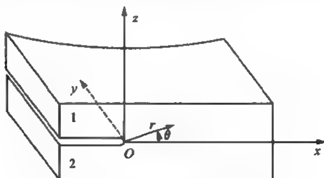


图 18－17　二维层板分层的力学模型



对斜交铺层层板平面剪切型(Ⅱ型)界面裂纹，由 17.3 节的推导可得

$$\sigma_{xz1}\Big|_{\theta=0}=\sigma_{xz2}\Big|_{\theta=0}=\frac{K_{\mathrm{II}}}{\sqrt{2\pi r}} \tag{18-43}$$

$$u_{x1}\Big|_{\theta=\pi}=-\frac{2(p_{11}g_{15}+p_{21}g_{35})}{t_{11}g_{15}+t_{21}g_{35}}\frac{r^{1/2}}{\sqrt{2\pi}}K_{\mathrm{II}} \tag{18-44}$$

$$u_{x2}\Big|_{\theta=-\pi}=\frac{2(p_{12}+p_{22}g_{75})}{t_{11}g_{15}+t_{21}g_{35}}\frac{r^{1/2}}{\sqrt{2\pi}}K_{\mathrm{II}} \tag{18-45}$$

对斜交铺层层板反平面剪切型(Ⅲ型)界面裂纹，由 17.1 节的推导可得

$$\sigma_{yz1}\Big|_{\theta=0}=\sigma_{yz2}\Big|_{\theta=0}=\frac{K_{\mathrm{III}}}{\sqrt{2\pi r}} \tag{18-46}$$

$$u_{y1}\Big|_{\theta=\pi}=\frac{2}{\mu_{z1}\beta_1}\frac{r^{1/2}}{\sqrt{2\pi}}K_{\mathrm{III}} \tag{18-47}$$

$$u_{y2}\Big|_{\theta=-\pi}=-\frac{2}{\mu_{z1}\beta_1\zeta}\frac{r^{1/2}}{\sqrt{2\pi}}K_{\mathrm{III}} \tag{18-48}$$

式中的系数均为已知常数，在第 17 章中确定。

设二维裂纹长度由 a 扩展至 $a+\Delta a$，则系统的总位能差[18.1]为

$$\Delta\Pi=-\frac{1}{2}\int_0^{\Delta a}(\sigma_{xz1}\Delta u_{x1}-\sigma_{xz2}\Delta u_{x2}+\sigma_{yz1}\Delta u_{y1}-\sigma_{yz2}\Delta u_{y2})\mathrm{d}r \tag{18-49}$$

根据能量释放率定义[18.1]可得能量释放率与应力强度因子的关系如下：

$$G=-\lim_{\Delta a\to 0}\frac{\Delta\Pi}{\Delta a}=\frac{1+\zeta}{4\mu_{z1}\beta_1\zeta}K_{\mathrm{III}}^2-\frac{p_{11}g_{15}+p_{21}g_{35}+p_{12}+p_{22}g_{75}}{\pi(t_{11}g_{15}+t_{21}g_{35})}K_{\mathrm{II}}^2 \tag{18-50}$$

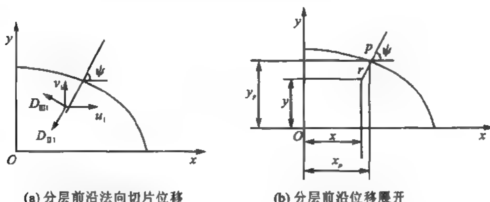
2. 分层前沿法向切片的位移与应力强度因子

首先假设椭圆分层区上下表面任 -点的面内位移，函数下标 1 和 2 分别表示分层上下表面，即



$$\left.\begin{aligned} u_1(x,y) &= f_1(x,y), \quad & v_1(x,y) &= g_1(x,y) \\ u_2(x,y) &= f_2(x,y), \quad & v_2(x,y) &= g_2(x,y) \end{aligned}\right\} \tag{18-51}$$

椭圆形分层区的面内位移如图 18－18 所示。



(a) 分层前沿法向切片位移　　(b) 分层前沿位移展开

图 18－18　椭圆形分层区的面内位移

过任意点(x,y)取分层区前沿的法向切片，与 x 正半轴夹角为 ψ，如图 18－18(a)所示，切片内分层上下表面的平面剪切位移 $D_{Ⅱ1}$，$D_{Ⅱ2}$ 以及上下表面的反平面剪切位移 $D_{Ⅲ1}$，$D_{Ⅲ2}$ 分别为

$$\left.\begin{aligned} D_{Ⅱ1} &= -(u_1\cos\psi + v_1\sin\psi), \quad & D_{Ⅲ1} &= -(u_1\sin\psi - v_1\cos\psi) \\ D_{Ⅱ2} &= -(u_2\cos\psi + v_2\sin\psi), \quad & D_{Ⅲ2} &= -(u_2\sin\psi - v_2\cos\psi) \end{aligned}\right\} \tag{18-52}$$

设式(18－51)中面内位移函数的平方为

$$\left.\begin{aligned} &F_1(x,y) = f_1^2(x,y), \quad G_1(x,y) = g_1^2(x,y) \\ &H_1(x,y) = f_1(x,y)g_1(x,y) \\ &F_2(x,y) = f_2^2(x,y), \quad G_2(x,y) = g_2^2(x,y) \\ &H_2(x,y) = f_2(x,y)g_2(x,y) \end{aligned}\right\} \tag{18-53}$$

将以上函数在分层前沿任一点(x_p,y_p)处用泰勒级数展开，并略去高阶小量，于是可得



$$
\left.\begin{aligned}
&u_1^2(x,y) = F_1(x,y) = \left[\frac{\partial F_1}{\partial x}\bigg|_p (x-x_p) + \frac{\partial F_1}{\partial y}\bigg|_p (y-y_p)\right] \\
&\nu_1^2(x,y) - G_1(x,y) = \left[\frac{\partial G_1}{\partial x}\bigg|_p (x-x_p) + \frac{\partial G_1}{\partial y}\bigg|_p (y-y_p)\right] \\
&u_1(x,y)\nu_1(x,y) - H_1(x,y) = \left[\frac{\partial H_1}{\partial x}\bigg|_p (x-x_p) + \right. \\
&\qquad\qquad \left.\frac{\partial H_1}{\partial y}\bigg|_p (y-y_p)\right] \\
&u_2^2(x,y) = F_2(x,y) = \left[\frac{\partial F_2}{\partial x}\bigg|_p (x-x_p) + \frac{\partial F_2}{\partial y}\bigg|_p (y-y_p)\right] \\
&\nu_2^2(x,y) = G_2(x,y) = \left[\frac{\partial G_2}{\partial x}\bigg|_p (x-x_p) + \frac{\partial G_2}{\partial y}\bigg|_p (y-y_p)\right] \\
&u_2(x,y)\nu_2(x,y) = H_2(x,y) = \left[\frac{\partial H_2}{\partial x}\bigg|_p (x-x_p) + \right. \\
&\qquad\qquad \left.\frac{\partial H_2}{\partial y}\bigg|_p (y-y_p)\right]
\end{aligned}\right\}
\tag{18-54}
$$

代入式(18-52),可知切片梁位移平方的表达式为

$$
\begin{aligned}
D_{\text{切}1}^2 = &\left[\frac{\partial F_1}{\partial x}\bigg|_p (x-x_p) + \frac{\partial F_1}{\partial y}\bigg|_p (y-y_p)\right](\cos\psi)^2 + \\
&\left[\frac{\partial G_1}{\partial x}\bigg|_p (x-x_p) + \frac{\partial G_1}{\partial y}\bigg|_p (y-y_p)\right](\sin\psi)^2 + \\
&\left[\frac{\partial H_1}{\partial x}\bigg|_p (x-x_p) + \frac{\partial H_1}{\partial y}\bigg|_p (y-y_p)\right]\sin 2\psi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_{\text{轴}1}^2 = &\left[\frac{\partial F_1}{\partial x}\bigg|_p (x-x_p) + \frac{\partial F_1}{\partial y}\bigg|_p (y-y_p)\right](\sin\psi)^2 + \\
&\left[\frac{\partial G_1}{\partial x}\bigg|_p (x-x_p) + \frac{\partial G_1}{\partial y}\bigg|_p (y-y_p)\right](\cos\psi)^2 \\
&\left[\frac{\partial H_1}{\partial x}\bigg|_p (x-x_p) + \frac{\partial H_1}{\partial y}\bigg|_p (y-y_p)\right]\sin 2\psi
\end{aligned}
$$

$$D_{\mathrm{II}2}^{2}=\left[\frac{\partial F_{2}}{\partial x}\bigg|_{p}(x-x_{p})+\frac{\partial F_{2}}{\partial y}\bigg|_{p}(y-y_{p})\right](\cos\psi)^{2}+$$
$$\left[\frac{\partial G_{2}}{\partial x}\bigg|_{p}(x-x_{p})+\frac{\partial G_{2}}{\partial y}\bigg|_{p}(y-y_{p})\right](\sin\psi)^{2}+$$
$$\left[\frac{\partial H_{2}}{\partial x}\bigg|_{p}(x-x_{p})+\frac{\partial H_{2}}{\partial y}\bigg|_{p}(y-y_{p})\right]\sin 2\psi$$
$$D_{\mathrm{III}2}^{2}=\left[\frac{\partial F_{2}}{\partial x}\bigg|_{p}(x-x_{p})+\frac{\partial F_{2}}{\partial y}\bigg|_{p}(y-y_{p})\right](\sin\psi)^{2}+$$
$$\left[\frac{\partial G_{2}}{\partial x}\bigg|_{p}(x-x_{p})+\frac{\partial G_{2}}{\partial y}\bigg|_{p}(y-y_{p})\right](\cos\psi)^{2}-$$
$$\left[\frac{\partial H_{2}}{\partial x}\bigg|_{p}(x-x_{p})+\frac{\partial H_{2}}{\partial y}\bigg|_{p}(y-y_{p})\right]\sin 2\psi$$

又由图 18-18(b)知

$$x_{p}-x=r\cos\psi,\qquad y_{p}-y=r\sin\psi \tag{18-55}$$

于是,上式化为

$$\left.\begin{aligned}
D_{\mathrm{II}k}^{2}=&-\left[\frac{\partial F_{k}}{\partial x}\bigg|_{p}\cos\psi+\frac{\partial F_{k}}{\partial y}\bigg|_{p}\sin\psi\right]r(\cos\psi)^{2}-\\
&\left[\frac{\partial G_{k}}{\partial x}\bigg|_{p}\cos\psi+\frac{\partial G_{k}}{\partial y}\bigg|_{p}\sin\psi\right]r(\sin\psi)^{2}-\\
&\left[\frac{\partial H_{k}}{\partial x}\bigg|_{p}\cos\psi+\frac{\partial H_{k}}{\partial y}\bigg|_{p}\sin\psi\right]r\sin 2\psi\\
D_{\mathrm{III}k}^{2}=&-\left[\frac{\partial F_{k}}{\partial x}\bigg|_{p}\cos\psi+\frac{\partial F_{k}}{\partial y}\bigg|_{p}\sin\psi\right]r(\cos\psi)^{2}-\\
&\left[\frac{\partial G_{k}}{\partial x}\bigg|_{p}\cos\psi+\frac{\partial G_{k}}{\partial y}\bigg|_{p}\sin\psi\right]r(\sin\psi)^{2}+\\
&\left[\frac{\partial H_{k}}{\partial x}\bigg|_{p}\cos\psi+\frac{\partial H_{k}}{\partial y}\bigg|_{p}\sin\psi\right]r\sin 2\psi
\end{aligned}\right\} \tag{18-56}$$

式中,$k=1,2$,表示分层上下表面。

式(18-56)给出了法向切片内的平面剪切位移和反平面剪切位移。根据第 17 章给出的二维分层问题分层前沿位移场,即由式(18-44)、式(18-45)、式(18-47)和式(18-48),可得切片应力强度因子与切片位移的关系



$$D^2_{\mathrm{II}1}=\frac{1}{\alpha_1^*(\psi)}K^2_{\mathrm{II}}r,\qquad D^2_{\mathrm{III}1}=\frac{1}{\beta_1^*(\psi)}K^2_{\mathrm{III}}r$$

$$D^2_{\mathrm{II}2}=\frac{1}{\alpha_2^*(\psi)}K^2_{\mathrm{II}}r,\qquad D^2_{\mathrm{III}2}=\frac{1}{\beta_2^*(\psi)}K^2_{\mathrm{III}}r$$

将式(18－56)代入上式，可得

$$\begin{aligned}K^2_{\mathrm{II}}=&-\alpha_k^*(\psi)\left\{\left[\frac{\partial F_k}{\partial x}\bigg|_p\cos\psi+\frac{\partial F_k}{\partial y}\bigg|_p\sin\psi\right](\cos\psi)^2+\right.\\&\left[\frac{\partial G_k}{\partial x}\bigg|_p\cos\psi+\frac{\partial G_k}{\partial y}\bigg|_p\sin\psi\right](\sin\psi)^2+\\&\left.\left[\frac{\partial H_k}{\partial x}\bigg|_p\cos\psi+\frac{\partial H_k}{\partial y}\bigg|_p\sin\psi\right]\sin 2\psi\right\}\end{aligned}\tag{18－57}$$

$$\begin{aligned}K^2_{\mathrm{III}}=&-\beta_k^*(\psi)\left\{\left[\frac{\partial F_k}{\partial x}\bigg|_p\cos\psi+\frac{\partial F_k}{\partial y}\bigg|_p\sin\psi\right](\sin)^2+\right.\\&\left[\frac{\partial G_k}{\partial x}\bigg|_p\cos\psi+\frac{\partial G_k}{\partial y}\bigg|_p\sin\psi\right](\cos\psi)^2-\\&\left.\left[\frac{\partial H_k}{\partial x}\bigg|_p\cos\psi+\frac{\partial H_k}{\partial y}\bigg|_p\sin\psi\right]\sin 2\psi\right\}\end{aligned}\tag{18－58}$$

其中的常数为

$$\frac{1}{\alpha_1^*(\psi)}=\left(\frac{p_{11}g_{15}+p_{21}g_{35}}{t_{11}g_{15}+t_{21}g_{35}}\right)^2\frac{2}{\pi},\qquad \frac{1}{\beta_1^*(\psi)}=\frac{1}{\mu_{z1}^2\beta_1^2}\frac{2}{\pi}$$

$$\frac{1}{\alpha_2^*(\psi)}=\left(\frac{p_{12}+p_{22}g_{75}}{t_{11}g_{15}+t_{21}g_{35}}\right)^2\frac{2}{\pi},\qquad \frac{1}{\beta_2^*(\psi)}=\frac{1}{\mu_{z1}^2\beta_1^2\zeta^2}\frac{2}{\pi}$$

应当说明的是，上式中各系数均为铺层角的函数，即为切片方位 ψ 的函数。

分层区及其扩展示意图如图 18－19 所示。

设图 18－19 所示的椭圆形分层前沿的参数方程

$$x=a\cos\varphi,\qquad y=b\sin\varphi\tag{18－59}$$

则其上一段弧长为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(a\sin\varphi)^2+(b\cos\varphi)^2}\,\mathrm{d}\varphi\tag{18－60}$$

椭圆上(x,y)点处的法线与 x 正半轴夹角 ψ 可表示为



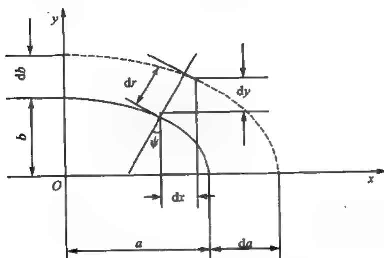


图 18－19　分层区及其扩展示意图

$$\cos\psi=\frac{b\cos\varphi}{\sqrt{(a\sin\varphi)^2+(b\cos\varphi)^2}},\ \sin\psi=\frac{a\sin\varphi}{\sqrt{(a\sin\varphi)^2+(b\cos\varphi)^2}} \tag{18-61}$$

设裂纹尖端区（即椭圆形分层区边缘）附近的位移场函数模态为[18.4]

$$\left.\begin{aligned}
f_1(x,y)=&\xi_f\frac{x}{a}\left[\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]+\\
&\eta_f\frac{x^3}{a^3}\left[\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}}+\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right]+\\
&\zeta_f\frac{x^5}{a^5}\left[\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{5}{2}}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{5}{2}}+\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{5}{2}}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{5}{2}}\right]\\
g_1(x,y)=&\xi_g\frac{y}{b}\left[\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]+\\
&\eta_g\frac{y^3}{b^3}\left[\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}}+\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right]+\\
&\zeta_g\frac{y^5}{b^5}\left[\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{5}{2}}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{5}{2}}+\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{5}{2}}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{5}{2}}\right]
\end{aligned}\right\} \tag{18-62}$$



式中，ξ_f，ξ_g 等为位移函数幅值；变量

$$\left.\begin{aligned}\bar{a}&=a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}=a\cos\varphi\\ \bar{b}&=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=b\sin\varphi\end{aligned}\right\}\tag{18-63}$$

当 $x\to\bar{a}$ 时

$$\lim\frac{x}{\bar{a}}=1,\qquad 1-\frac{x^2}{\bar{a}^2}=2\,\frac{\bar{a}-x}{\bar{a}}=2\,\frac{r}{a}\cos\psi\tag{18-64}$$

当 $y\to\bar{b}$ 时

$$\lim\frac{y}{\bar{b}}=1,\qquad 1-\frac{y^2}{\bar{b}^2}=2\,\frac{\bar{b}-y}{\bar{b}}=2\,\frac{r}{b}\sin\psi\tag{18-65}$$

于是，略去高阶项，式(18－62)表示为

$$\left.\begin{aligned}f_1(x,y)&=\xi_f\left[\sqrt{\frac{2}{a}\cos\psi\cos\varphi}+\sqrt{\frac{2}{b}\sin\psi\sin\varphi}\right]\sqrt{r}\\ g_1(x,y)&=\xi_g\left[\sqrt{\frac{2}{a}\cos\psi\cos\varphi}+\sqrt{\frac{2}{b}\sin\psi\sin\varphi}\right]\sqrt{r}\end{aligned}\right\}\tag{18-66}$$

因而

$$\left.\begin{aligned}F_1(x,y)&=\xi_f^2\left[\sqrt{\frac{2}{a}\cos\psi\cos\varphi}+\sqrt{\frac{2}{b}\sin\psi\sin\varphi}\right]^2r\\ G_1(x,y)&=\xi_g^2\left[\sqrt{\frac{2}{a}\cos\psi\cos\varphi}+\sqrt{\frac{2}{b}\sin\psi\sin\varphi}\right]^2r\\ H_1(x,y)&=\xi_f\xi_g\left[\sqrt{\frac{2}{a}\cos\psi\cos\varphi}+\sqrt{\frac{2}{b}\sin\psi\sin\varphi}\right]^2r\end{aligned}\right\}\tag{18-67}$$

在图 18－18 所示法向切片内，给任意点到分层前沿的距离 r 一个增量 $\mathrm{d}r$，其在坐标轴上投影为 $\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$，则有

$$\cos\psi=-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r},\qquad \sin\psi=-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r}$$



故

$$\left.\begin{aligned}
&\left.\frac{\partial F_1}{\partial x}\right|_p \cos\psi+\left.\frac{\partial F_1}{\partial y}\right|_p \sin\psi=\left.\frac{\partial F_1}{\partial x}\right|_p\left(-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}\right)+\left.\frac{\partial F_1}{\partial y}\right|_p\left(-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r}\right)=-\frac{\mathrm{d}F_1}{\mathrm{d}r}=\\
&\qquad -\xi_f\left[\sqrt{\frac{2}{a}}\cos\psi\cos\varphi+\sqrt{\frac{2}{b}}\sin\psi\sin\varphi\right]^2\\
&\left.\frac{\partial G_1}{\partial x}\right|_p \cos\psi+\left.\frac{\partial G_1}{\partial y}\right|_p \sin\psi=-\xi_g^2\left[\sqrt{\frac{2}{a}}\cos\psi\cos\varphi+\sqrt{\frac{2}{b}}\sin\psi\sin\varphi\right]^2\\
&\left.\frac{\partial H_1}{\partial x}\right|_p \cos\psi+\left.\frac{\partial H_1}{\partial y}\right|_p \sin\psi=-\xi_f\xi_g\left[\sqrt{\frac{2}{a}}\cos\psi\cos\varphi+\sqrt{\frac{2}{b}}\sin\psi\sin\varphi\right]^2
\end{aligned}\right\} \tag{18-68}$$

代入式(18－58)可得

$$\left.\begin{aligned}
K_{\mathrm{II}}^2 &= \alpha_1^*(\psi)(\xi_f\cos\psi+\xi_g\sin\psi)^2\left[\sqrt{\frac{2}{a}}\cos\psi\cos\varphi+\right.\\
&\qquad\left.\sqrt{\frac{2}{b}}\sin\psi\sin\varphi\right]^2\\
K_{\mathrm{III}}^2 &= \beta_1^*(\psi)(\xi_f\sin\psi-\xi_g\cos\psi)^2\left[\sqrt{\frac{2}{a}}\cos\psi\cos\varphi+\right.\\
&\qquad\left.\sqrt{\frac{2}{b}}\sin\psi\sin\varphi\right]^2
\end{aligned}\right\} \tag{18-69}$$

3. 含椭圆形分层复合材料层板的能量释放率分布

由式(18－50)，分层区法向切片的能量释放率与应力强度因子的关系可表示为

$$R=\gamma_{\mathrm{II}}K_{\mathrm{II}}^2+\gamma_{\mathrm{III}}K_{\mathrm{III}}^2 \tag{18-70}$$

式中

$$\gamma_{\mathrm{II}}=-\frac{p_{11}g_{15}+P_{21}g_{35}+p_{12}+p_{22}g_{75}}{\pi(t_{11}g_{15}+t_{21}g_{35})},\qquad \gamma_{\mathrm{III}}=\frac{1+\zeta}{4\mu_{z1}\beta_1\zeta} \tag{18-71}$$

设椭圆分层区沿 x，y 方向分别扩展 $\mathrm{d}a$，$\mathrm{d}b$，如图 18－19 所示，则法向扩展为

$$\mathrm{d}r=\cos\psi\cos\varphi\mathrm{d}a+\sin\psi\sin\varphi\mathrm{d}b \tag{18-72}$$



于是，随着分层区的扩展，其总位能的增量表示为

$$\mathrm{d}\Pi = -\oint_s R\,\mathrm{d}r\mathrm{d}s =$$

$$\left[-\int_s(\gamma_{\mathrm{II}} K_{\mathrm{II}}^2 + \gamma_{\mathrm{III}} K_{\mathrm{III}}^2)\cos\psi\cos\varphi\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}a +$$

$$\left[-\int_s(\gamma_{\mathrm{II}} K_{\mathrm{II}}^2 + \gamma_{\mathrm{III}} K_{\mathrm{III}}^2)\sin\psi\sin\varphi\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}b \quad (18-73)$$

另一方面，椭圆形分层区的总位能增量表示为

$$\mathrm{d}\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial a}\mathrm{d}a + \frac{\partial \Pi}{\partial b}\mathrm{d}b \quad (18-74)$$

由于 $\mathrm{d}a$，$\mathrm{d}b$ 的任意性，比较式(18－73)与式(18－74)，并将式(18－60)与式(18－61)代入可得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \Pi}{\partial a} &= -\int_s(\gamma_{\mathrm{II}} K_{\mathrm{II}}^2 + \gamma_{\mathrm{III}} K_{\mathrm{III}}^2)b(\cos\varphi)^2\mathrm{d}\varphi\\ \frac{\partial \Pi}{\partial b} &= -\int_s(\gamma_{\mathrm{II}} K_{\mathrm{II}}^2 + \gamma_{\mathrm{III}} K_{\mathrm{III}}^2)a(\sin\varphi)^2\mathrm{d}\varphi\end{aligned}\right\} \quad (18-75)$$

将式(18－69)代入式(18－75)，可得到关于 ξ_f，ξ_g 的非线性方程组，即

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a} = -\int_s[\gamma_{\mathrm{II}}\alpha_1^*(\psi)(\xi_f\cos\psi + \xi_g\sin\psi)^2 + \gamma_{\mathrm{III}}\beta_1^*(\psi)(\xi_f\sin\psi - \xi_g\cos\psi)^2]\left[\sqrt{\frac{2}{a}}\cos\psi\cos\varphi + \sqrt{\frac{2}{b}}\sin\psi\sin\varphi\right]^2 b(\cos\varphi)^2\mathrm{d}\varphi \quad (18-76)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial b} = -\int_s[\gamma_{\mathrm{II}}\alpha_1^*(\psi)(\xi_f\cos\psi + \xi_g\sin\psi)^2 + \gamma_{\mathrm{III}}\beta_1^*(\psi)(\xi_f\sin\psi - \xi_g\cos\psi)^2]\left[\sqrt{\frac{2}{a}}\cos\psi\cos\varphi + \sqrt{\frac{2}{b}}\sin\psi\sin\varphi\right]^2 a(\sin\varphi)^2\mathrm{d}\varphi \quad (18-77)$$

经积分后，式(18－76)、式(18－77)可写成

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a} = A_1\xi_f^2 + A_2\xi_f\xi_g + A_3\xi_g^2 \quad (18-78)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial b} = B_1\xi_f^2 + B_2\xi_f\xi_g + B_3\xi_g^2 \quad (18-79)$$



其中,积分

$$
\left.\begin{aligned}
A_1 &= -\int_s [\gamma_{\text{II}\alpha}(b\cos\varphi)^2 + \gamma_{\text{III}\beta}(a\sin\varphi)^2] \cdot \\
&\quad \frac{2(b\cos\varphi + a\sin\varphi)^2(\cos\varphi)^2}{a[(a\sin\varphi)^2 + (b\cos\varphi)^2]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\varphi \\
A_2 &= -\int_s 2(\gamma_{\text{II}\alpha} - \gamma_{\text{III}\beta})\sin\varphi\cos\varphi \cdot \\
&\quad \frac{2b(b\cos\varphi + a\sin\varphi)^2(\cos\varphi)^2}{[(a\sin\varphi)^2 + (b\cos\varphi)^2]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\varphi \\
A_3 &= -\int_s [\gamma_{\text{II}\alpha}(a\sin\varphi)^2 + \gamma_{\text{III}\beta}(b\cos\varphi)^2] \cdot \\
&\quad \frac{2(b\cos\varphi + a\sin\varphi)^2(\cos\varphi)^2}{a[(a\sin\varphi)^2 + (b\cos\varphi)^2]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\varphi \\
B_1 &= -\int_s [\gamma_{\text{II}\alpha}(b\cos\varphi)^2 + \gamma_{\text{III}\beta}(a\sin\varphi)^2] \cdot \\
&\quad \frac{2(b\cos\varphi + a\sin\varphi)^2(\sin\varphi)^2}{b[(a\sin\varphi)^2 + (b\cos\varphi)^2]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\varphi \\
B_2 &= -\int_s 2(\gamma_{\text{II}\alpha} - \gamma_{\text{III}\beta})\sin\varphi\cos\varphi \cdot \\
&\quad \frac{2a(b\cos\varphi + a\sin\varphi)^2(\sin\varphi)^2}{[(a\sin\varphi)^2 + (b\cos\varphi)^2]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\varphi \\
B_3 &= -\int_s [\gamma_{\text{II}\alpha}(a\sin\varphi)^2 + \gamma_{\text{III}\beta}(b\cos\beta)^2] \cdot \\
&\quad \frac{2(b\cos\varphi + a\sin\varphi)^2(\sin\varphi)^2}{b[(a\sin\varphi)^2 + (b\cos\varphi)^2]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\varphi
\end{aligned}\right\} \tag{18-80}
$$

式中

$$\gamma_{\text{II}\alpha} = \gamma_{\text{II}}\alpha_1^*, \qquad \gamma_{\text{III}\beta} = \gamma_{\text{III}}\beta_1^* \tag{18-81}$$

至此,在法向切片内得到了能量差率与分层区前沿位移幅值的关系。

另一方面,根据片条合成——能量解法,由式(18 - 36)、式(18 - 37),可分别写出分层区的应变能和外力势能的表达式,即



$$\left.\begin{aligned}U &= 4(A_{11}u_0^2 + A_{22}v_0^2 + A_{12}u_0v_0 + A_{33}w_0^2)\\ V &= -4(B_1u_0 + B_2v_0 + B_3w_0)\end{aligned}\right\}\tag{18-82}$$

分层区的总势能为

$$\Pi = U + V \tag{18-83}$$

这里，附加位移幅值 u_0, v_0, w_0 是分层区尺寸 a, b 的函数，求导得出$\frac{\partial \Pi}{\partial a}, \frac{\partial \Pi}{\partial b}$的表达式。至于 u_0, v_0, w_0 的大小，则根据能量法确定。

求解非线性方程组式(18-78)、式(18-79)得到位移幅值 ξ_f，ξ_g 的值，代入式(18-69)即得到应力强度因子，再代入式(18-70)，可得沿椭圆分层区前沿的能量释放率的分布。

以上给出了一般情况下复合材料层合板分层问题能量释放率的计算方法。下面再给出复合材料层合板分层问题能量释放率的一种简化计算方法。

在式(18-66)中所设位移 $f_1(x,y)$ 与 $g_1(x,y)$ 是相同的函数，因此可以认为 $\xi_f = \xi_g = \xi$，并假设裂纹的虚扩展方式是比例扩展，即

$$\mathrm{d}a = a\mathrm{d}f, \qquad \mathrm{d}b = b\mathrm{d}f$$

于是

$$\mathrm{d}\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial a}\mathrm{d}a + \frac{\partial \Pi}{\partial b}\mathrm{d}b = \left[\frac{\partial \Pi}{\partial a}a + \frac{\partial \Pi}{\partial b}b\right]\mathrm{d}f \tag{18-84}$$

同时

$$\mathrm{d}\Pi = -\oint R ab\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}f = -\oint(\gamma_{\mathrm{II}}K_{\mathrm{II}}^2 + \gamma_{\mathrm{III}}K_{\mathrm{III}}^2)ab\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}f \tag{18-85}$$

由以上两式得

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a}a + \frac{\partial \Pi}{\partial b}b = -\oint(\gamma_{\mathrm{II}}K_{\mathrm{II}}^2 + \gamma_{\mathrm{III}}K_{\mathrm{III}}^2)ab\,\mathrm{d}\varphi =$$
$$-\xi^2\oint[\gamma_{\mathrm{II}}\alpha_1^*(b\cos\varphi + a\sin\varphi)^2 + \gamma_{\mathrm{III}}\beta_1^*(a\sin\varphi - b\cos\varphi)^2]\frac{2(b\cos\varphi + a\sin\varphi)^2}{[(a\sin\varphi)^2 + (b\cos\varphi)^2]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\varphi \tag{18-86}$$



式中，左边$\frac{\partial \Pi}{\partial a}$，$\frac{\partial \Pi}{\partial b}$由总势能表达式(18 - 83)求导后得到。由式(18 - 86)容易解得ξ的值。将ξ值代入式(18 - 69)可得到应力强度因子K_{II}，K_{III}的表达式，再根据式(18 - 70)，即可得分层区各点的能量释放率分布的表达式

$$R(\varphi) = \xi^2 [\gamma_{\text{II}} \alpha_1^* (b\cos\varphi + a\sin\varphi)^2 + \gamma_{\text{III}} \beta_1^* (a\sin\varphi - b\cos\varphi)^2] \cdot \frac{2(b\cos\varphi + a\sin\varphi)^2}{ab[(a\sin\varphi)^2 + (b\cos\varphi)^2]^{\frac{3}{2}}} \tag{18-87}$$

式中，φ是椭圆参数角。

4. 算例及结果分析

设正交复材四层板铺设角为[0°/90°/90°/0°]，0°层纤维沿x方向，材料常数如下：$E_1 = 137.9$ GPa，$E_2 = 14.48$ GPa，$G_{12} = 5.86$ GPa，$\nu_{12} = 0.21$，$\nu_{23} = 0.21$。假定x方向为椭圆分层区的长轴方向，半长轴$a = 100$ mm不变，而半短轴分别为$b = 100$ mm，90 mm，80 mm，70 mm，60 mm，50 mm。下面给出在各种几何尺寸和载荷状态下，含椭圆分层区的层合板按椭圆参数角φ的能量释放率分布值(1/4分层区)。横坐标为椭圆参数角φ(°)，纵坐标为能量释放率(N·m^{-1})。

图18 - 20给出了双向均布载荷作用、厚度比$t_2/t_1 = 1$情况下，六种椭圆形分层区的能量释放率分布。由图中可以看出，能量释放率沿分层区前沿的变化很大，其幅值点随短长轴比的变小而趋向于长轴顶点，最大值出现在$b/a = 1$时$\varphi = 17°$附近，并且在不同分层区形状下，最大能量释放率随着短轴的增大而增大。

由于能量释放率的幅值点并不随厚度变化而变化，图18 - 21给出了总厚度不变时在双向均布载荷作用下，在能量释放率幅值点能量释放率随厚度比的变化规律。

图18 - 22与图18 - 23分别给出了在只有x方向和只有y方向均布载荷作用下，不同椭圆形分层区下的能量释放率分布。由图中可以看出分布规律与双向均布载荷作用时相似。等值均布载



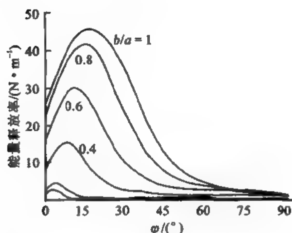


图 18－20 双向均布载荷作用下不同形状分层区分层前沿能量释放率的角分布

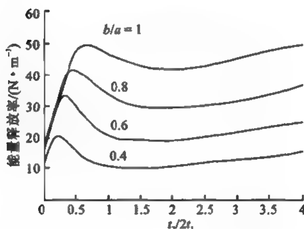


图 18－21 双向均布载荷作用下不同形状分层区最大能量释放率随厚度比的变化

荷作用于椭圆短轴方向时能量释放率比作用于椭圆长轴方向时大，但比双向均布载荷作用时小。图 18－24、图 18－25 给出了几种形状椭圆分层区在分别只有 x 或 y 方向线性载荷作用时能量释放率分布值。由图可以看出线性载荷作用时，其分布规律与只有 x 方向或 y 方向受均布载荷作用时相似，在与均布载荷合力相



同的情况下，幅值较均布载荷作用时小。

图 18－26 至图 18－31 给出了应力强度因子 K_{II} 的分布，图 18－32至图 18－37 给出了应力强度因子 K_{III} 的分布，其分布规律与能量释放率的分布规律相似。

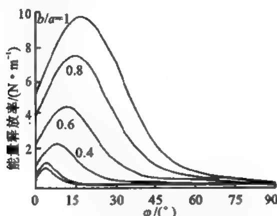


图 18－22　x 方向均布载荷作用下能量释放率的角分布

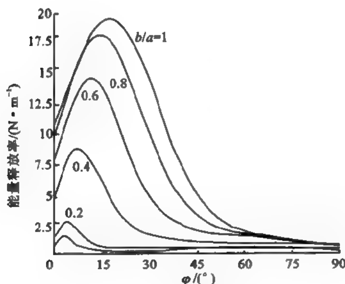


图 18－23　y 方向均布载荷作用下能量释放率的角分布



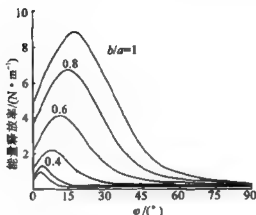


图8－24 x方向线性载荷作用下能量释放率的角分布

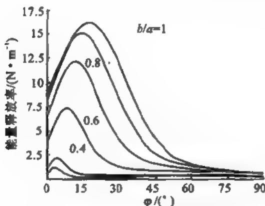


图18－25 y方向线性载荷作用下能量释放率的角分布

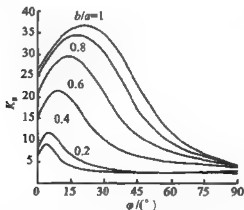


图18－26 双向均布载荷作用下不同形状分层区分层前沿 K_{I} 的角分布



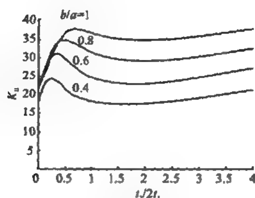


图 18-27 双向均布载荷作用下不同形状分层区 K_{I} 最大值随厚度比的变化

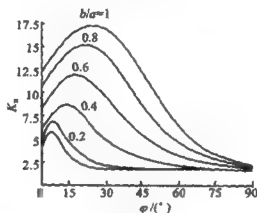


图 18-28 x 方向均布载荷作用下 K_{I} 的角分布

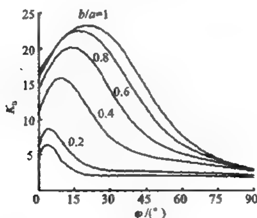


图 18-29 y 方向均布载荷作用下 K_{I} 的角分布



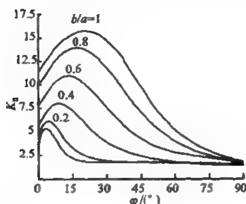


图 18－30　x 方向线性载荷作用下 K_{I} 的角分布

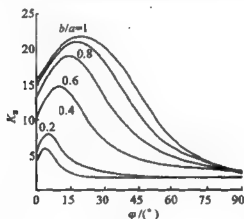


图 18－31　y 方向线性载荷作用下 K_{I} 的角分布

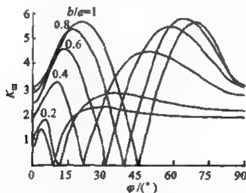


图 18－32　双向均布载荷作用下不同形状分层区

分层前沿 K_{II} 的角分布

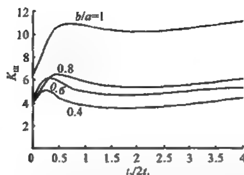


图 18－33　双向均布载荷作用下不同形状分层区 K_{III} 最大值随厚度比的变化

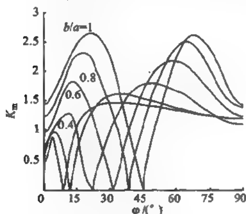


图 18－34　x 方向均布载荷作用下 K_{III} 的角分布

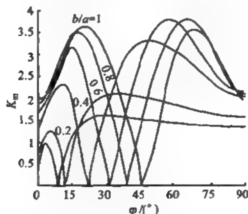


图 18－35　y 方向均布载荷作用下 K_{III} 的角分布



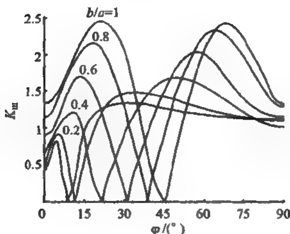


图 18-36 x 方向线性载荷作用下 K_{III} 的角分布

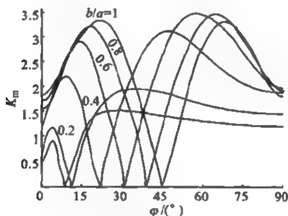


图 18-37 y 方向线性载荷作用下 K_{III} 的角分布

参考文献

[18.1] 张行.断裂力学.北京:宇航出版社,1990.

[18.2] 白静,孟庆春,张行.含矩形内部分层的复合材料圆柱壳块三维问题的片条合成能量解法.复合材料学报,2003,20(5):147-153.

[18.3] 白静,孟庆春,张行.复合材料层合曲梁分层问题的解析解法.复合材料学报,2003,20(5):142-146.



[18.4] 白静，孟庆春，张行．复合材料层合板三维分层问题的断裂力学分析．复合材料学报，2002，19(3)：75-82.

[18.5] 孟庆春，胡伟平，张行．含椭圆形分层层板的状态分解——片条合成能量解法．复合材料学报，2001，18(2)：102-108.

[18.6] 孟庆春，胡伟平，张行．含矩形内部分层的复合材料层板的状态分解——片条合成能量解法．复合材料学报，1999，16(3)：118-123.

[18.7] 胡伟平，孟庆春，张行．含内部分层复合材料层板三维问题的三角级数能量解法．复合材料学报，1998，15(3)：113-118.

[18.8] 缪长青，孟庆春，张行．分析蜂窝夹芯板脱胶问题的状态分解——能量方法．北京航空航天大学学报，1998，24(2)：207-211.

[18.9] 王奇志，孟庆春，张行．复合材料层合梁分层问题的附加状态——解析解法．北京航空航天大学学报，1998，24(3)：319-322.

[18.10] 王平，孟庆春，张行．复合材料层合梁非对称分层问题的解析解法．复合材料学报，2004，21(1)：95-99.

[18.11] 王平，孟庆春，张行．含非对称矩形分层的复合材料层合板状态分解——片条合成能量解法．复合材料学报，2004，21(1)：100-108.

附录 A 各向异性边缘裂纹平面问题角分布函数在各向同性情况下的推广

下面证明由 5.2 节所得应力与位移表达式同样也适用于各向同性材料的情况。

引入小量，使各向异性弹性理论中的复参数改写为

$$\left.\begin{aligned} &\mu_1 = \beta_1 \mathrm{i} = (1-\varepsilon)\mathrm{i}, \qquad \mu_2 = \beta_2 \mathrm{i} = (1+\varepsilon)\mathrm{i} \\ &\mu_3 = \bar{\mu}_1, \qquad \mu_4 = \bar{\mu}_2 \end{aligned}\right\} \quad (A-1)$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时，即得到各向同性的极限情况。

考虑到

$$z_k = x + \mu_k y = r_k(\cos\theta_k + \mathrm{i}\sin\theta_k) \qquad (k=1,2) \quad (A-2)$$

有

$$r_k = r\sqrt{\cos^2\theta + \beta_k^2 \sin^2\theta}$$

$$\cos\theta_k = \frac{r}{r_k}\cos\theta, \qquad \sin\theta_k = \frac{r}{r_k}\beta_k \sin\theta \qquad (A-3)$$

当 $\varepsilon \ll 1$ 时，略去 ε 的高阶小量，可以写出如下的近似表达式：

$$\left.\begin{aligned} &r_1^m = r^m(1 - m\varepsilon\sin^2\theta), \qquad r_2^m = r^m(1 + m\varepsilon\sin^2\theta) \\ &\sin m\theta_1 = \sin m\theta - m\varepsilon\sin\theta\cos\theta\cos m\theta \\ &\sin m\theta_2 = \sin m\theta + m\varepsilon\sin\theta\cos\theta\cos m\theta \\ &\cos m\theta_1 = \cos m\theta + m\varepsilon\sin\theta\cos\theta\sin m\theta \\ &\cos m\theta_2 = \cos m\theta - m\varepsilon\sin\theta\cos\theta\sin m\theta \end{aligned}\right\} \quad (A-4)$$

将式(A-4)代入式(5-112)和式(5-114)，并略去 ε 二阶以上的高阶小量，应力和位移场的角分布函数可化为如下形式：

$$R_{xxm}^{(1)} = -2r^{m-\frac{1}{2}}\left[\left(m-\frac{1}{2}\right)\sin\theta\sin\left(m-\frac{3}{2}\right)\theta - \cos\left(m-\frac{1}{2}\right)\theta\right]$$



$$R_{yym}^{(1)}=2r^{m-\frac{1}{2}}\left[\left(m-\frac{1}{2}\right)\sin\theta\sin\left(m-\frac{3}{2}\right)\theta+\cos\left(m-\frac{1}{2}\right)\theta\right]$$

$$R_{xym}^{(1)}=-2r^{m-\frac{1}{2}}\left(m-\frac{1}{2}\right)\sin\theta\cos\left(m-\frac{3}{2}\right)\theta$$

$$R_{xxm}^{(4)}=-2r^{m}[m\sin\theta\sin(m-1)\theta-2\cos m\theta]$$

$$R_{yym}^{(1)}=2r^{m}m\sin\theta\sin(m-1)\theta$$

$$R_{xym}^{(4)}=-2r^{m}[m\sin\theta\cos(m-1)\theta-\sin m\theta]$$

$$\left.\begin{aligned}
S_{xm}^{(1)}&=2r^{m+\frac{1}{2}}\left[(-a_{11}+a_{12})\sin\theta\sin\left(m-\frac{1}{2}\right)\theta+\right.\\
&\qquad\left.(a_{11}+a_{12})\frac{1}{m+\frac{1}{2}}\cos\left(m+\frac{1}{2}\right)\theta\right]\\
S_{ym}^{(1)}&=-2r^{m+\frac{1}{2}}\left[(-a_{12}+a_{22})\sin\theta\cos\left(m-\frac{1}{2}\right)\theta-\right.\\
&\qquad\left.2a_{22}\frac{1}{m+\frac{1}{2}}\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)\theta\right]\\
S_{xm}^{(4)}&=2r^{m+1}\left[(-a_{11}+a_{12})\sin\theta\sin m\theta+\right.\\
&\qquad\left.2a_{11}\frac{1}{m+1}\cos(m+1)\theta\right]\\
S_{ym}^{(4)}&=-2r^{m+1}\left[(-a_{12}+a_{22})\sin\theta\cos m\theta-\right.\\
&\qquad\left.(a_{12}+a_{22})\frac{1}{m+1}\sin(m+1)\theta\right]
\end{aligned}\right\}\tag{A-5}$$

以及



$$
\left.
\begin{aligned}
e_{xx1n} &= \frac{A_n}{4\pi a_{22}} \frac{(a_{12} - 3a_{22})A_n^2 - (a_{12} + a_{22})B_n^2}{(A_n^2 + B_n^2)^2} \\
e_{xx2n} &= \frac{-B_n}{4\pi a_{11}} \frac{(a_{11} - 3a_{12})A_n^2 - (a_{11} + a_{12})B_n^2}{(A_n^2 + B_n^2)^2} \\
e_{yy1n} &= \frac{A_n}{4\pi a_{22}} \frac{(a_{12} + a_{22})A_n^2 + (3a_{12} - a_{12})B_n^2}{(A_n^2 + B_n^2)^2} \\
e_{yy2n} &= \frac{-B_n}{4\pi a_{11}} \frac{(a_{11} + a_{12})A_n^2 + (3a_{11} - a_{12})B_n^2}{(A_n^2 + B_n^2)^2} \\
e_{xy1n} &= \frac{B_n}{4\pi a_{22}} \frac{(a_{12} - 3a_{22})A_n^2 - (a_{12} + a_{22})B_n^2}{(A_n^2 + B_n^2)^2} \\
e_{xy2n} &= \frac{-A_n}{4\pi a_{11}} \frac{(a_{11} + a_{12})A_n^2 + (3a_{11} - a_{12})B_n^2}{(A_n^2 + B_n^2)^2}
\end{aligned}
\right\} \quad (A-6)
$$

式中

$$
A_n = r\cos\theta - r^{(n)}\cos\theta^{(n)}
$$

$$
B_n = r\sin\theta - r^{(n)}\sin\theta^{(n)}
$$

这里，$r^{(n)}$ 和 $\theta^{(n)}$ 为表示第 n 个小钉孔位置处的极坐标。

对于各向同性问题，以上各式中的材料常数可取为

$$
a_{11} = a_{22} = \frac{1}{E}, \qquad a_{12} = -\frac{\nu}{E} \qquad (A-7)
$$

将式(A－7)代入表达式(A－5)和式(A－6)，容易证明：所有角分布函数均可转化为根据各向同性弹性理论所导出的相应表达式。

附录B　关于扩展裂纹尖端场中独立待定参量个数的分析

式(10-33)的推导如下。首先令式(10-30)中$\theta=0$，得到

$$-\mu\bar{\varphi}(0)=-\bar{\sigma}_e^m(0)[\bar{\varphi}(0)]^{-n} \tag{B-1}$$

由此解得式(10-33)中第一式

$$\bar{\varphi}(0)=\left[\frac{\bar{\sigma}_e^m(0)}{\mu}\right]^{1/(n+1)} \tag{B-2}$$

进一步，对式(10-30)关于θ求导，经化简可得

$$\bar{\varphi}''(\theta)=\sin(\theta)^{-1}[(\mu-1)\bar{\varphi}'\cos\theta-\mu\bar{\varphi}\sin\theta-(\bar{\sigma}_e^m\bar{\varphi}^{-n})'] \tag{B-3}$$

考虑到$\bar{\varphi}$和$\bar{\sigma}_e$的对称性，以及当$\theta\to0$时上式右方属于0/0型的极限，从而设$\lim\limits_{\theta\to0}\bar{\varphi}''(\theta)$存在，利用罗必塔法则及式(B-2)经化简可得

$$\lim_{\theta\to0}\bar{\varphi}''(\theta)=[\mu(n+1)-2]^{-1}\lim_{\theta\to0}[(\bar{\sigma}_e^m)''\bar{\varphi}^{-n}+\mu\bar{\varphi}] \tag{B-4}$$

由于

$$(\bar{\sigma}_e^m)''=m(m-1)\bar{\sigma}_e^{m-2}(\bar{\sigma}_e')^2+m\bar{\sigma}_e^{m-1}\bar{\sigma}_e'' \tag{B-5}$$

及$\bar{\sigma}_e$关于θ对称，得到

$$\lim_{\theta\to0}(\bar{\sigma}_e^m)''=m\lim_{\theta\to0}\bar{\sigma}_e^{m-1}\lim_{\theta\to0}\bar{\sigma}_e'' \tag{B-6}$$

利用式(10-9)、式(10-18)、式(10-31)、式(10-32)和式(B-6)得到

$$\lim_{\theta\to0}(\bar{\sigma}_e^m)''=\frac{1}{2}m\bar{\sigma}_e^{m-2}(0)\{2s_1\bar{A}''(0)+(s_2+2s_3)\bar{A}''^2(0)+[s_2+2\bar{A}''(0)]\bar{A}''''(0)\} \tag{B-7}$$

$$\left.\begin{aligned}s_1&=(\lambda+2)^2(\lambda^2+\lambda+1)\\ s_2&=(\lambda+2)(1-\lambda)\\ s_3&=3(1+\lambda)\end{aligned}\right\} \tag{B-8}$$



又由式(10－15)、式(10－16)、式(10－31)和式(10－32)得到

$$\overline{A}''''(0)=[\overline{A}''(0)+e_1][\bar{\varphi}''(0)/\bar{\varphi}(0)]-b_1\overline{A}''(0)-b_3 \tag{B-9}$$

将式(B－9)代入式(B－7)，再将式(B－7)代入式(B－4)并利用式(B－2)得

$$\varphi''(0)=\frac{2\mu\bar{\varphi}(0)+mh_1[\bar{\varphi}(0)]^{-n}[\bar{\sigma}_e(0)]^{m-2}}{[2\mu(n+1)-4]\bar{\varphi}(0)-mh_2[\bar{\varphi}(0)]^{-n-1}[\bar{\sigma}_e(0)]^{m-2}} \tag{B-10}$$

$$h_1=2s_1\overline{A}''(0)+(s_2+2s_3)\overline{A}''^2(0)-[s_2+2\overline{A}''(0)][b_1\overline{A}''(0)+b_3] \tag{B-11}$$

$$h_2=[s_2+2\overline{A}''(0)][\overline{A}''(0)+e_1] \tag{B-12}$$

附录 C 关于扩展裂纹尖端场中塑性力学全量理论适用性的讨论

由于采用了塑性力学全量理论，所以必须保证应力和应变按比例变化。以下就此作一些理论验证。为此从式(12 - 7)、式(12 - 14)和式(12 - 20)可得

$$d\sigma_{ij} = \frac{d\alpha}{\alpha}\sigma_{ij} + \frac{da}{r}\sigma_{ij}^{\triangle} \tag{C - 1}$$

$$\sigma_{ij} = \alpha r^{\lambda}\bar{\sigma}_{ij}(\theta), \qquad \sigma_{ij}^{\triangle} = \alpha r^{\lambda}\bar{\sigma}_{ij}^{\triangle}(\theta) \tag{C - 2}$$

$$\bar{\sigma}_{ij}^{\triangle}(\theta) = \bar{\sigma}'_{ij}(\theta)\sin\theta - \lambda\bar{\sigma}_{ij}(\theta)\cos\theta \tag{C - 3}$$

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{d(\alpha/\beta)^{n}}{(\alpha/\beta)^{n}}\varepsilon_{ij} + \frac{da}{r}\varepsilon_{ij}^{\triangle} \tag{C - 4}$$

$$\varepsilon_{ij} = b_1\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n} r^{n(\lambda-\mu)}\bar{\varepsilon}_{ij}(\theta), \qquad \varepsilon_{ij}^{\triangle} = b_1\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n} r^{n(\lambda-\mu)}\bar{\varepsilon}_{ij}^{\triangle}(\theta) \tag{C - 5}$$

$$\bar{\varepsilon}_{ij}^{\triangle}(\theta) = \bar{\varepsilon}'_{ij}(\theta)\sin\theta - n(\lambda-\mu)\bar{\varepsilon}_{ij}(\theta)\cos\theta \tag{C - 6}$$

显然，式(C - 1)和式(C - 4)中的第一项分别反映了应力和应变的比例变化量，而其第二项则反映了非比例变化量。鉴于 $\bar{\sigma}_{ij}$ 与 $\bar{\sigma}_{ij}^{\triangle}$ 属同一数量级，$\bar{\varepsilon}_{ij}$ 与 $\bar{\varepsilon}_{ij}^{\triangle}$ 属同一数量级，为保证使用塑性力学全量理论的有效性，需限制

$$\frac{d\alpha}{\alpha} \gg \frac{da}{r}, \qquad \frac{d(\alpha/\beta)^{n}}{(\alpha/\beta)^{n}} \gg \frac{da}{r} \tag{C - 7}$$

从而式(C - 1)和式(C - 4)中的非比例项可略，而得到

$$d\sigma_{ij} = \frac{d\alpha}{\alpha}\sigma_{ij}, \qquad d\varepsilon_{ij} = \frac{d(\alpha/\beta)^{n}}{(\alpha/\beta)^{n}}\varepsilon_{ij} \tag{C - 8}$$

这意味满足式(C - 7)或式(12 - 20)的区域，r 很小，但不应是无限小，而应力和应变按比例变化。与此对应，式(12 - 21)应保留第一项而得到式(12 - 22)。